中国精算师资格考试用书

寿险精算

Actuarial Aspects of Life Insurance

主编　张连增

主审　李晓林

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算/张连增主编．—北京：中国财政经济出版社，2010.11
中国精算师资格考试用书
ISBN 978－7－5095－2556－2

Ⅰ．①寿…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①人寿保险－精算学－资格考核－自学参考资料　Ⅳ．①F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 200875 号

责任编辑：张冬梅　　责任校对：胡永立
封面设计：耕者设计　　版式设计：兰　波

中国财政经济出版社出版

URL：http://www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092毫米　16开　33.75印张　817 000 字
2010年 11 月第 1版　2010 年 11月北京第 1次印刷
定价：72.00 元
ISBN 978－7－5095－2556－2/F·2174
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

编审委员会



总　　序

ZONGXU

精算起源于保险业，是保险公司经营不可或缺的核心技术之一。保险公司只有运用精算技术进行保险产品定价、准备金评估、风险管理等，才能在科学基础上实现保险业务的稳健经营，有效防范风险。

我们常说的精算，包括三个方面，即：精算理论技术、精算规则和精算师资格认证。

精算理论是对保险业务经营中各种不确定因素和风险规律的认识，精算技术以精算理论为指导，是精算工作中对各种不确定因素和风险进行识别、评估、定价、处置等所采用的方法、技术，包括所使用的数学模型、数学工具等。随着保险业经营实践的发展和人们认识的深化，精算理论技术也在不断发展。精算理论技术属于学术研究的范畴，可以存在不同的观点和流派，各种不同观点和流派之间的讨论、交流，可以促进精算理论技术的发展。

精算规则，是保险监管机关制定或认可的关于精算工作应当遵循、遵守或采用的原则、方法、标准、制度等规范。制定精算规则，以精算理论技术为基础，又要综合考虑一定时期的经济环境、保险业发展状况和风险特征、精算技术力量、监管政策的要求等多种因素。

精算工作需要专业人员从事，精算师就是具备精算的知识、技能，从事精算工作的专业技术人员。虽然精算师的从业范围不限于保险业，但主要还是在保险及相关行业就职（如对保险公司的精算报告进行审核的会计师事务所，为保险公司服务的精算咨询公司等）。在保险公司中，精算师责任重大。因此，必须经过资格认证，才能担任精算师（如同律师、注册会计师需要资格认证）。在国外，精算师资格的取得一般有两种方式：一种是通过专业资格考试取得，另一种是经过学历教育后取得，但主流是通过考试取得。在发达国家，精算师有自己的专业团体——精算师协会，一般由精算师协会组织资格考试，对通过考试的人授予精算师资格。

精算理论技术、精算规则、精算师资格认证三者相互联系，密不可分：精算理论技术是基础，制定精算规则、考试认证精算师，均以精算理论技术为基础，精算规则是精算师从事精算实务的直接依据。

我国自1980年恢复办理国内保险业务之后，曾长期缺乏精算专业人才，既没有制定精算规则，也没有建立自己的精算师资格考试认证制度。1988年南开大学在北美精算协会的支持下开办精算专业教育，此后国内又有多所大学开办精算专业教育，培养了一批精算人才。由于当时中国没有精算师资格认证制度，这些国内学习精算的人员主要是考取北美和英国等国外的精算师资格。1992年，国内的保险市场对外开放，外资保险公司进入国内市场，一些具有国外资格的精算师到国内工作。

1995年颁布并施行的《中华人民共和国保险法》中，要求寿险公司必须聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。《保险法》首先要求寿险公司聘用精算师、建立精算报告制度，是因为：第一，精算起源于寿险业务经营，精算技术在寿险业的应用较为成熟；第二，寿险业务期限长，风险更具隐蔽性，对精算技术的运用更为迫切和重要，第三，在精算专业人员严重不足、精算规则空白的条件下，同时要求寿险业和非寿险业聘用精算专业人员、建立精算报告制度，难以实现。

为此，当时的保险监管部门——中国人民银行保险司于1997年10月启动了“中国精算制度建设”研究项目，决定建立中国的精算师资格考试认证制度，并逐步制定精算规则。中国的精算师资格考试认证制度，主要借鉴北美精算协会的考试体系，把精算师资格分为准精算师和精算师两个阶段，分别设立考试课程，通过准精算师考试课程的，授予准精算师资格，在获得准精算师资格基础上，再通过精算师资格考试的课程，授予精算师资格。在课程设置、考试内容、难度等方面，均力求达到与发达国家的精算师考试相当的水平。在制度设计、拟定考试大纲、教材编写过程中，得到国际精算团体的大力支持和帮助。1998年11月，中国保监会成立之后，继续推进精算制度建设。2000年，中国精算师资格考试开考，与此配套的教材也陆续出版发行。中国保监会1999年发布了关于寿险公司的精算规定，建立了寿险公司精算规则体系的基本框架。

2002年10月《保险法》进行了第一次修改，于2003年1月1日起施行。修改后的《保险法》把聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度的要求扩大到非寿险公司。因此，经过论证、筹备后，自2004年开始进行非寿险精算师的资格考试认证，称为中国精算师（非寿险方向），与此相适应，以前的精算师则称为中国精算师（寿险方向）。同时关于非寿险精算的规则也由中国保监会陆续制定发布。

2007年，中国精算师协会成立，组织精算师资格考试是协会的重要职能之一。协会设立了考试教育委员会，负责精算师资格考试和后续教育事宜（此前是由中国保险行业协会的精算工作委员会负责精算师资格考试）。

中国精算师资格考试施行10年来，通过考试认证了一批中国精算师和

中国准精算师，取得了一定成绩，积累了一定经验。目前已在北京、上海、天津、广州等 15 个城市设立了考试中心，并在香港、加拿大滑铁卢大学设立了 2 个海外考试中心，每年春秋两季举办考试。

随着国内保险市场的发育、精算技术的发展及国际精算界的变革，原有的考试体系已不完全适应。为此，中国精算师协会于 2009 年决定对中国精算师资格考试认证体系进行调整，并于 2011 年实施。调整的基本内容是：精算师资格考试仍分为准精算师和精算师两个阶段；在准精算师阶段，不再区分方向，对原寿险和非寿险两个方向的考试课程进行整合，考生通过 8 门必考的准精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国准精算师资格；精算师则继续分为寿险和非寿险两个方向，有 3 年以上工作经历的准精算师，通过 5 门精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国精算师（寿险方向）或中国精算师（非寿险方向）的资格，5 门精算师考试课程，既有必考的，也有选考的，具体科目，因寿险和非寿险方向有所不同。

对于在旧考试体系下已经通过的考试科目，如何转换为新考试体系的相应科目，也进行了研究，制定了转换规则。

为编写新考试体系的教材，中国精算师协会成立了教材编审委员会。教材编写力图贯彻国际性、先进性和实用性三个原则。国际性是指，鉴于中国精算师协会已正式申请加入国际精算师协会，因此精算师资格考试必须符合国际精算师协会的要求，达到国际精算师协会的标准。所以，在课程设置、课程内容、必考科目等方面，均以国际精算师协会的要求为标准。先进性是指，尽可能把精算理论技术的最新成果包括在这套教材之中。实用性是指，教材内容紧密联系国内保险业的实际，考虑国内精算人员需要掌握的知识和技能。

教材的具体编写实行主编负责制。教材编审委员会研究、协调、决定教材编写中的重大事项，确定各门课程的主编和主审人员，指定协调人对若干相关课程的内容调整、取舍和进度进行协调。教材初稿完成后，不仅由主审进行审阅，而且组织保险公司的相关人员进行试读，提出修改意见。教材的主编、主审、试读人员，都是在保险业、精算界具有业务专长、经验较为丰富、具有一定影响力的人员。可以说，这套教材的编写，是集中了行业的智慧和力量，凝结着组织协调人员、编审人员、试读人员的心血。

尽管如此，我们仍不认为这套教材已经尽善尽美。由于经验不足、认识水平有限，也由于时间仓促，教材在某些方面还显粗糙，还存在许多可改进、待完善之处。我们希望在教材投入使用之后，听取专家、考生和社会各界人士的意见，将来进一步修订。

回顾中国精算师资格考试 10 年来的历程，是在保险监管机关的领导

下，在保险业、有关高等院校及社会各界的积极参与下，在国际精算组织的支持下，不断发展、完善，取得进步的。在此，我谨代表中国精算师协会，对多年来关心、支持、参与、帮助中国精算事业发展的有关领导、专家和广大的精算专业人员表示真诚的敬意和感谢！

中国精算师协会　会长

2010 年 11 月 15 日

编写说明

BIANXIESHUOMING

自2011年春季开始，中国精算师资格考试将采用新的考试科目体系。呈现给读者的这本教材《寿险精算》是中国准精算师资格考试科目A5的参考用书。《寿险精算》是精算考试中精算核心课程。每一名精算考生，不论将来是获得寿险精算师资格还是非寿险精算师资格，在掌握了基本的数学、经济学基础后，都要从寿险精算入门，步入精算学的殿堂。

本教材内容分为两部分：寿险精算数学和寿险精算实务。顾名思义，这是在2011年前国内精算师资格考试两门科目基础上，加以调整、修订、完善，最终编写完成的。本书内容丰富，篇幅较长，涵盖了寿险精算从数学到实务的各个分支。从精算考生和命题人的角度，这也是一个很大的挑战。

在编写本教材时，我们兼顾了如下几个原则：参考当前国际精算师协会的教育标准，对编写内容加以取舍；在新的中国精算师资格考试体系下，调整编写内容；考虑教材内容的内在逻辑结构，以及读者的易读易懂，对有些内容做了较大程度的改动。

具体来说，对寿险精算的一些基础性的内容，一般都加以保留；另外在寿险精算数学部分，增加了多状态转换模型（第十章）。考虑到与其他课程的衔接，删去了在原来寿险精算实务教材中的养老金精算一章。对偿付能力（第十九章）的介绍，无论从内容的更新，还是从论述深度上，都有了很大的加强。对原来寿险精算实务教材中的定价部分（原《寿险精算实务》第四~五章），进行了较大幅度的改写，最后形成了本书的第十四~十五章。

本教材能够得以顺利编写完成，在很大程度上得益于各位编写者的大力合作和辛勤劳动。本教材凝聚了很多同行近一年来的智慧和心血。在编写完成之际，回顾从2009年下半年至今近一年的编写过程，我对很多同行的努力表示感谢。

本书编写人员如下：张连增（主编、南开大学）、李勇权（南开大学）、王树勇（中航三星人寿）、章晖（百年人寿）、施岚（南开大学）。其中，李勇权完成第一至五章的初稿编写，并完成了本书附表的大部分初稿。张连增完成第六至十章的编写。施岚完成第十一至十二章的初稿编写。王树勇完成第十六至十九章的初稿编写。章晖完成第十三至十五章的初稿编

写。初稿完成后，根据中国精算师协会教材编委会的要求，我主持对全书初稿做了校阅、修改、完善，数易其稿，以一年之内做好一件事的心态，投入了巨大的时间、耐心和热情，最终把此教材呈现给广大读者。

在教材编写之前，即 2009 年 8 月，适逢我在加拿大 Waterloo 大学访问，王树勇代我参加了中国精算师协会的教材编写会议，做了大量准备性的工作。在这里我要感谢来自保险公司的王树勇和章晖。他们在繁忙的工作之外，抽出时间从事寿险精算实务部分的编写。以他们所拥有的多年实践经验，由他们来编写寿险精算实务部分，那是再合适不过了。

在教材编写过程中，南开大学风险管理与保险学系有众多的精算研究生参与了本教材编写的辅助工作。特别是南开大学风险管理与保险学系 2010 级博士生段白鸽对全书的贡献尤为突出。寿险精算实务是本书的难点部分。我和部分研究生校阅了寿险精算实务的初稿后，她又逐字校阅了全部内容，发现了很多不完善的地方甚至小错误，为提高本教材的质量作出了贡献。另外，她还投入了大量时间和精力，做了很多编辑工作，使本教材在页面形式上更美观更专业。

参与教材编写辅助工作的部分研究生还包括：南开大学风险管理与保险学系 2008 级硕士生杜琦、王志丹、郭少伟、吴晓飞、焦宪福、李潇，其中杜琦独立核对了本书附表初稿并进行了补充，王志丹整理了本书附录，其他四名研究生核对了第七至十章习题。2009 级硕士生王乐祥、史占领、韩亚飞、周晶晶、李苏娟、陈婷、张彦林也参与了教材编写辅助工作，其中王乐祥花了大量时间，对前五章的页面格式进行了编辑，使之符合规范要求，其他六名研究生核对了前六章各章习题。还有很多研究生都为本书的出版作出了或多或少的贡献，恕不一一列举。

书稿完成后，本教材主审李晓林教授和试读负责人杨静平教授认真通读了全稿，改正了一些错误，提出了很多好的建议，使本书增色不少。对他们的辛勤劳动和帮助，我在此表示衷心感谢。

编写一本高质量的教材绝非易事，但它是我们教材编写者的目标，也是广大读者的期望。编写教材的过程，也是对专业知识进一步加深理解、在专业上熟能生巧精益求精的过程，也是字斟句酌提高写作能力、向读者传播知识能力的挑战。每一个不准确乃至小错误的改正，都会使本教材向完美的目标更近一步。

本教材可作为中国精算师资格考试科目 A5 的参考用书，也可以作为高校保险精算专业课程的教材，还可作为研究生、教师和科研工作者的参考书。

作为编写者，我们已尽全力，但谬误之处也许还有很多，恳请读者加以指正。

张连增

2010 年 6 月 25 日

目　录

第一篇　寿险精算数学

第二篇　寿险精算实务

第一篇　寿险精算数学

第一章　生存分布与生命表

学习目标

- □ 了解常用生命表函数的概率意义、函数表达式及相互关系
- □ 了解生存分布与生命表之间的关系
- □ 了解寿险生命表的特点与构造原理，掌握分数年龄生命表函数的计算方法

§1.1　引　言

寿险精算的主要研究都建立在生命个体（如被保险人）的生存情况的基础上。精算学的发展始于对生存分布和生命表的研究。在开始生存分布和生命表的讨论之前，我们先介绍几个基本的概念和符号。

首先，我们用符号 (x) 表示 x 岁的生命，用 $T(x)$ 表示 (x) 从现在直到死亡之间的时间长度。显然，(x) 在何时死亡是未知的、是不确定的，因此 $T(x)$ 不是一个确定的数，而是一个随机变量，我们称 $T(x)$ 为 (x) 的未来生命时间长度随机变量。

用 X 表示 (x) 死亡时的年龄。显然，X 也是一个随机变量，并且有 $T(x) = X - x$。称 X 为 (x) 的寿命随机变量。

如果 $(x) = (0)$，即一个新生婴儿，那么很显然，新生婴儿的未来生命时间长度恰好等于其寿命，即 $T(0) = X$。

既然 X 和 $T(x)$ 均为随机变量，所以，我们可以研究他们的概率分布情况。基于概率统计的基础知识，我们记 X 的分布函数为 $F_X(x)$，于是

$$F_X(x) = Pr(X \leqslant x) \qquad x \geqslant 0 \tag{1-1}$$

显然，$\{X \leqslant x\}$ 表示新生儿将于 x 岁之前死亡的随机事件。于是，概率分布函数 $F_X(x)$ 对应的是一种死亡概率。

与上述死亡概率对应，我们可以定义函数 $s_X(x)$ 为：

$$s_X(x) = 1 - F_X(x) = Pr(X > x) \qquad x \geqslant 0 \tag{1-2}$$

显然，$\{X > x\}$ 表示新生儿将于 x 岁之后死亡——即新生儿将在 x 岁还

生存的随机事件，所以 $s_X(x)$ 为新生儿将在 x 岁仍然活着的概率。基于此，我们称 $s_X(x)$ 为生存函数，为方便起见，有时省略下标记为 $s(x)$。

注意到分布函数 $F_X(x)$ 和生存函数 $s_X(x)$ 之间的简单关系，可以知道这二者对于相应的随机变量 X 的意义和地位，它们有相同的作用！因此，基于概率统计的经验，我们知道，为了研究随机变量 X，研究分布函数 $F_X(x)$或生存函数 $s_X(x)$ 二者中之一即可。一般的概率统计教材研究随机变量时，往往习惯于从随机变量的分布函数入手，而精算教材则更习惯于从生存函数入手来研究相应的寿命随机变量或生命时间长度随机变量（这也许与人们乐生恶死的潜意识有关！因为生存函数对应的是生存概率，而分布函数对应的是死亡概率）。

我们约定 $F_X(0)=0$，或 $s_X(0)=1$，即所考虑的（0）是活着的。记随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$，于是，

$$f_X(x)=F'_X(x)=-s'_X(x),$$

$$s_X(x)=1-F_X(x)=\int_x^{\infty}f_X(t)\,dt,$$

$$\int_0^{\infty}f_X(t)\,dt=1。$$

【例 1-1】 假设某地区人群的寿命随机变量分布函数为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2(100-x)}{10\,000}, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：

（1）该地区人群的生存函数；

（2）该地区某人将在（70，80）之间死亡的概率。

解：（1）当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，

$$\begin{aligned}s_X(x)&=Pr(X>x)=1-F_X(x)\\&=1-\int_0^x\frac{-2t+200}{10\,000}dt=\frac{(100-x)^2}{10\,000}\end{aligned}$$

故有

$$s_X(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ \dfrac{(100-x)^2}{10\,000}, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 0, & x\geqslant 100\end{cases}$$

（2）有 $Pr(70<X\leqslant 80)=s_X(70)-s_X(80)$

$$=0.09-0.04=0.05$$

接下来考虑一般的（x）。首先，（x）将在 $y(>x)$ 岁仍然生存的概率为：

$$Pr(X>y \mid X>x)=s_X(y)/s_X(x) \quad (1-3)$$

或
$$\begin{aligned}F_{T(x)}(y-x)&=Pr(T(x)<y-x)\\&=[F_X(y)-F_X(x)]/s_X(x)\\&=[s_X(x)-s_X(y)]/s_X(x) \quad (1-4)\end{aligned}$$

其在 y 岁之前死亡的概率为：

$$\begin{aligned}Pr(x<X\leqslant y \mid X>x)&=[F_X(y)-F_X(x)]/[1-F_X(x)]\\&=[s_X(x)-s_X(y)]/s_X(x) \quad (1-5)\end{aligned}$$

等价地
$$Pr(X>y \mid X>x)=\frac{s_X(y)}{s_X(x)} \quad (1-6)$$

在精算学里，通常用符号 p、q 来表示生存和死亡的概率，更具体地，用符号 ${}_tp_x$ 表示（x）在 t 年后仍然生存的概率，${}_tq_x$ 表示（x）将在接下来的 t 年内死亡的概率。即

$$\begin{aligned}{}_tp_x&=Pr(T(x)>t)=Pr(X>x+t \mid X>x)\\&=s_X(x+t)/s_X(x) \quad (1-7)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}{}_tq_x&=1-{}_tp_x=Pr(T(x)\leqslant t)\\&=F_{T(x)}(t)\\&=[s_X(x)-s_X(x+t)]/s_X(x) \qquad t\geqslant 0 \quad (1-8)\end{aligned}$$

当（x）=（0）时，因为 $T(x)=T(0)=X$，所以，

$$\begin{aligned}{}_tq_0&=Pr[X\leqslant t]\\&=F_X(x) \qquad t\geqslant 0\\{}_tp_0&=s_X(x) \qquad x\geqslant 0\end{aligned}$$

特别地，当 $t=1$ 时，可以将上述符号左下角的 t 省略不写，即

$$\begin{aligned}q_x&=Pr[(x)\text{将在未来 1 年内死亡}]\\&=Pr(T(x)\leqslant 1)\\p_x&=Pr[(x)\text{将活到年龄 } x+1]\\&=Pr(T(x)>1)\end{aligned}$$

另外，用 $t|$ 来表示延期 t（年）。因此，对于（x）将在 t 年后的 u 年内死亡的概率，我们可以用 ${}_{t|u}q_x$ 来表示，即

$$\begin{aligned}{}_{t|u}q_x&=Pr\ [t<T\ (x)\ \leqslant t+u]\\&={}_{t+u}q_x-{}_tq_x\\&={}_tp_x-{}_{t+u}p_x \quad (1-9)\end{aligned}$$

上式中，如果 $u=1$，则可简记为 ${}_{t|}q_x$。

【例 1-2】　已知 $s_X(x)=1-\frac{x}{110}$，求 ${}_{10}p_{30}$ 和 ${}_{10|5}q_{25}$。

解： ${}_{10}p_{30}=\frac{s(40)}{s(30)}=\frac{500(1-40/110)}{500(1-30/110)}=7/8=87.5\%$

$$_{10|5}p_{25} = {}_{10}p_{25} \cdot {}_{5}q_{35} = \frac{s(35)}{s(25)} \cdot \left(1 - \frac{s(40)}{s(35)}\right) = \frac{s(35) - s(40)}{s(25)}$$

$$= \frac{(1 - 35/110) - (1 - 40/110)}{1 - 25/110} = 4/85 \approx 4.706\%$$

将连续型随机变量 $T(x)$ 的整数部分用 $K(x)$ 表示，即 $K(x) = [T(x)]$。同时令 $S(x) = T(x) - K(x)$。分别称 $K(x)$ 和 $S(x)$ 为 (x) 的简略未来生命时间长度随机变量和 (x) 的死亡年残余时间长度随机变量。我们有：

$$\begin{aligned} Pr[K(x) = k] &= Pr[k \leqslant T(x) < k + 1] \\ &= Pr[k < T(x) \leqslant k + 1] \\ &= {}_{k}p_{x} - {}_{k+1}p_{x} \\ &= {}_{k}p_{x}\ q_{x+k} = {}_{k|}q_{x} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \end{aligned} \qquad (1-10)$$

$$\begin{aligned} F_{K(x)}(k) &= Pr[K(x) \leqslant k] \\ &= \sum_{k=0}^{k} {}_{k|}q_{x} = {}_{k+1}q_{x} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} Pr[(K = k) \cap (S \leqslant s)] &= Pr[(k \leqslant T \leqslant k + s)] \\ &= {}_{k}p_{x} \cdot {}_{s}q_{x+k} \end{aligned}$$

在不致引起混淆的情况下，可以将 $T(x)$ 简记为 T，将 $K(x)$ 简记为 K，将 $S(x)$ 简记为 S。

【例 1-3】 假设 (x) 的生存函数是 $s_X(x) = \left(\frac{120 - x}{120}\right)^{1/2}$，$0 \leqslant x \leqslant 120$，求：他未来生命时间长度的整数部分为 30 的概率。

解： $Pr[K(x) = 30] = Pr[30 \leqslant T(x) < 31] = {}_{30}p_{x} - {}_{31}p_{x}$

$$= \frac{s_X(x + 30) - s_X(x + 31)}{s_X(x)}$$

$$= \frac{\sqrt{90 - x} - \sqrt{89 - x}}{\sqrt{120 - x}}$$

在 (1-5) 用生存函数给出了 0 岁的人在活到 x 岁的前提下，在 (x, y) 之间死亡的概率。如果将 $y - x$ 固定，则该条件概率（已到达 x 岁的人在接下来 $y - x$ 年内死亡的概率）可以看成 x 的函数，利用微积分的技术，考虑 $y - x$ 为无穷小量（令 $y - x = \Delta x$），则该概率可以成为一个瞬间的死亡率，再由 (1-5)，有

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leqslant x + \Delta x \mid X > x) &= [F_X(x + \Delta x) - F_X(x)]/[1 - F_X(x)] \\ &\approx \Delta x\, f_X(x)/[1 - F_X(x)] \end{aligned}$$

在上式中，$f_X(x)/[1 - F_X(x)]$ 可以解释为条件密度函数，对于任意的年龄 x，它给出的是 (0) 在 x 岁生存的条件下，对应的 X 在 x 时的条件概率密度函数的值，我们将该函数记为 $\mu(x)$ 或 μ_x，即

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$$
$$= \frac{-s'(x)}{s(x)}$$
$$= \frac{-d\ln s(x)}{dx} \qquad (1-11)$$

并称之为死亡力（也有称该函数为失效率、风险率或危险率函数）。

由（1－11），我们有

$$-\mu(y)dy = d\ln s(y)$$

从而有

$${}_tp_x = \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right]$$
$$= \exp\left[-\int_0^t \mu(x+s)ds\right] \qquad (1-12)$$

特别地，$x=0$ 时，有

$${}_xp_0 = s_X(x)$$
$$= \exp\left[-\int_0^x \mu(s)ds\right] \qquad (1-13)$$

于是

$$F_X(x) = 1 - s_X(x)$$
$$= 1 - \exp\left[-\int_0^x \mu(s)ds\right]$$
$$F'_X(x) = f_X(x)$$
$$= \exp\left[-\int_0^x \mu(s)ds\right]\mu(x)$$
$$= {}_xp_0 \cdot \mu(x)$$

记 $F_{T(x)}(t)$ 和 $f_{T(x)}(t)$ 为 $T(x)$ 的分布函数和概率密度函数，因为

$$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x$$

所以

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}F_{T(x)}(t)$$
$$= \frac{d}{dt}\,{}_tq_x$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{1 - \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right]\right\}$$
$$= \left\{-\frac{d}{dt}\left[-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right]\right\}\cdot \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right]$$
$$= {}_tp_x \cdot \mu(x+t) \qquad t \geqslant 0 \qquad (1-14)$$

于是

$$ {}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\ \mu(x+s)ds $$

特别地

$$ {}_\infty q_x = \int_0^t {}_tp_x\ \mu(x+t)dt = 1 $$

另外

$$ \frac{d}{dt}(1-{}_tp_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x $$

$$ = {}_tp_x \cdot \mu(x+t) \qquad (1-15) $$

因为

$$ \lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0 $$

所以有

$$ \lim_{n\to\infty}(-\ln {}_np_x) = \infty $$

从而

$$ \lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n} \mu(y)dy = \infty $$

【例 1-4】 已知 $\mu(45+t)=\dfrac{1}{270-3t}$，求 ${}_{10}q_{45}$。

解：${}_{10}q_{45} = 1 - {}_{10}p_{45} = 1 - e^{-\int_0^{10}\mu(45+t)dt}$

$$ = 1 - e^{\ln(\frac{8}{9})^{1/3}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/3} \approx 0.0385 $$

§1.2 生 命 表

前面我们讨论了随机变量 X 或 $T(x)$ 的概率分布函数、生存函数、概率密度函数及死亡力函数等，在概率统计课程中，往往通过给出概率分布函数（或密度函数等）来描述随机变量，不过对于具体含义为人的寿命（或未来生命时间长度）的随机变量而言，想要找到一个简单的函数作为其分布函数（或密度函数）几乎是不可能的（当然，也有人认为这样的函数是存在的，并致力于寻找这样的函数，后面我们将介绍此类函数），所以我们需要利用其他描述随机变量的方法，来描述我们所要研究的特定的随机变量 X 和 $T(x)$。生命表就是一种行之有效的描述随机变量 X 和 $T(x)$ 近似特征的方法。

最简单的生命表通过给出每一个年龄的 q_x 值来反映 X 和 $T(x)$ 的特征。一般的生命表，除了给出 q_x 值外，还给出一些其他的函数值。因此，在给出生命表之前，我们先讨论一些生命表函数。

1.2.1 生命表函数与生存函数

考虑一群新生婴儿，共 $l_0=100\ 000$ 名。每个婴儿的死亡情况是相互独

立并且具有相同的概率分布，他们的生存情况由生存函数 $s_X(x)$ 给出。

令 $L(x)$ 表示这群人在 x 岁还活着的人数。用 $j=1, 2, \cdots, l_0$ 来记这些人，则有

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

其中，I_j 为 j 的示性函数，即

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{如果 } j \text{ 生存到 } x \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} E[I_j] &= Pr\{j \text{ 在 } x \text{ 岁还活着}\} \\ &= Pr\{T(0) > x\} \\ &= s(x) \qquad j=1, 2, \cdots, l_0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E[L(x)] &= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] \\ &= l_0 \cdot s(x) \end{aligned}$$

记 $l_x = E[L(x)]$，即 l_x 为 l_0 个新生儿中预期生存到 x 岁的人数，于是

$$l_x = l_0 \cdot s(x) \tag{1-16}$$

由于不同新生儿的生存情况是相互独立的，所以 I_j 相互独立。于是，由

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

知 $L(x)$ 服从参数为 $n=l_0$，$p=s(x)$ 的二项分布。

令 ${}_nD_x$ 为这 l_0 个新生儿在 x 和 $x+n$ 岁之间死亡的人数，并记 ${}_nd_x = E[{}_nD_x]$。因为新生儿在 x 和 $x+n$ 岁之间死亡的概率为 $s(x)-s(x+n)$，所以有

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E[{}_nD_x] \\ &= l_0[s(x) - s(x+n)] \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{1-17}$$

$n=1$ 时可以将 ${}_nd_x$ 和 ${}_nD_x$ 中的左下标略去，即

$$\begin{aligned} d_x &= E[D_x] \\ &= l_0[s(x) - s(x+1)] \\ &= l_x - l_{x+1} \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} \mu(x) &= -\frac{1}{s(x)} \cdot \frac{ds(x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} \end{aligned} \tag{1-18}$$

有

$$-dl_x = l_x \cdot \mu(x)dx \tag{1-19}$$

及

$$-d\ln l_x = -\mu(x)dx$$

从而

$$l_b = l_a \exp[-\int_a^b \mu(y)dy]$$

令 $a=0$，$b=x$，则有

$$l_x = l_0 \exp[-\int_0^x \mu(y)dy] \tag{1-20}$$

令 $a=x$，$b=x+n$，有

$$l_{x+n} = l_x \cdot \exp[-\int_x^{x+n} \mu(y)dy] \tag{1-21}$$

及

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} dl_y$$

$$= \int_x^{x+n} l_y \mu(y)dy \tag{1-22}$$

为了方便起见，因为 l_0 可以被看成是具有同一生存函数 $s(x)$ 的新生儿的个数，所以称之为随机生存组。

下面进一步引入：

ω，表示人口极限年龄，是生命表的年龄上限，此时有，$l_\omega = 0$。

T_x，表示 x 岁人群的未来累积生存人年数；${}_nL_x$，x 岁人群在 $x \sim x+n$ 岁生存的人年数。$T_x = \int_0^\infty l_{x+t}dt$，${}_nL_x = \int_0^n l_{x+t}dt$ 。易得 L_{x+n}与 T_x 之间的关系式：

$$T_x = \sum_{n=0}^{\omega-x-1} L_{x+n}$$

$\mathring{e}_x = E[T(x)] = \frac{T_x}{l_x}$，表示（$x$）的平均余寿；$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t \cdot {}_tp_x \cdot u_{x+t}dt + n \cdot {}_np_x$，表示（$x$）在 n 年内的平均余寿，这里 n 可以取非整数值；

$e_x = E(K(x)) = \sum_{k=0}^{\omega-1} k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-1} k \cdot {}_{k|}q_x$，表示（$x$）的整值平均余寿；

$e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot {}_{k|}q_x + n \cdot {}_np_x$，表示（$x$）在 n 年内的整值平均余寿，这里 n 取整数值。

在死亡均匀分布假设下，每一整数年龄内死亡的人的生存时间都可表示为 $K(x)+\frac{1}{2}$，此时：$\mathring{e}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot {}_{k|}q_x = e_x + \frac{1}{2}$。

【例 1-5】 已知(i)$s_X(x) = \frac{(k^3-x)^{1/3}}{k}$，$0 \leqslant x \leqslant k^3$，$k>0(ii)\mathring{e}_{40} = 2\mathring{e}_{80}$。求：$\mathring{e}_{60}$。

解：由定义可得：$\mathring{e}_{40}=\dfrac{T_{40}}{l_{40}}=\dfrac{\int_0^{\infty} l_{40+t}dt}{l_{40}}=\dfrac{l_0\cdot\int_0^{\infty} s(40+t)dt}{l_0\cdot s(40)}$

$$=\frac{\int_0^{k^3-40}\frac{(k^3-40-t)}{k}dt}{\frac{(k^3-40)^{1/3}}{k}}=\frac{3}{4}\cdot(k^3-40)$$

同理，可得：$\mathring{e}_{80}=\dfrac{3}{4}\cdot(k^3-80)$

进而有：$(k^3-40)=2\cdot(k^3-80),k^3=120$

$$\mathring{e}_{60}=\frac{3}{4}\cdot(k^3-60)=\frac{3}{4}\cdot 60=45$$

1.2.2　生命表举例

表1－1是我们作为示范的生命表，它是中国人寿保险业经验生命表CL（2000－2003）的CL1表（非养老金业务男表）。

表1－1　　生命表举例：CL（2000－2003）的CL1表

年龄 x	死亡率 q_x	年龄 x	死亡率 q_x	年龄 x	死亡率 q_x
0	0.000722	20	0.000621	40	0.001715
1	0.000603	21	0.000661	41	0.001845
2	0.000499	22	0.000692	42	0.001978
3	0.000416	23	0.000716	43	0.002113
4	0.000358	24	0.000738	44	0.002255
5	0.000323	25	0.000759	45	0.002413
6	0.000309	26	0.000779	46	0.002595
7	0.000308	27	0.000795	47	0.002805
8	0.000311	28	0.000815	48	0.003042
9	0.000312	29	0.000842	49	0.003299
10	0.000312	30	0.000881	50	0.00357
11	0.000312	31	0.000932	51	0.003847
12	0.000313	32	0.000994	52	0.004132
13	0.00032	33	0.001055	53	0.004434
14	0.000336	34	0.001121	54	0.004778
15	0.000364	35	0.001194	55	0.005203
16	0.000404	36	0.001275	56	0.005744
17	0.000455	37	0.001367	57	0.006427
18	0.000513	38	0.001472	58	0.00726
19	0.000572	39	0.001589	59	0.008229

续表

年龄 x	死亡率 q_x	年龄 x	死亡率 q_x	年龄 x	死亡率 q_x
60	0.009313	76	0.050829	92	0.244059
61	0.01049	77	0.056262	93	0.267383
62	0.011747	78	0.062257	94	0.292544
63	0.013091	79	0.068871	95	0.319604
64	0.014542	80	0.076187	96	0.348606
65	0.016134	81	0.084224	97	0.379572
66	0.017905	82	0.093071	98	0.412495
67	0.019886	83	0.1028	99	0.447334
68	0.022103	84	0.113489	100	0.48401
69	0.024571	85	0.125221	101	0.522397
70	0.027309	86	0.13808	102	0.562317
71	0.03034	87	0.152157	103	0.603539
72	0.033684	88	0.167543	104	0.64577
73	0.037371	89	0.184333	105	1
74	0.04143	90	0.202621	—	—
75	0.045902	91	0.2225	—	—

在表 1－1 基础上，假设 $l_0 = 1\ 000\ 000$（l_0 为任意指定的生命表基数，指定该基数的目的是为了将生命表中所列示的死亡概率以更直观的方式展现出来），利用 q_x 与 p_x、$s_X(x)$ 及 l_x、d_x 的如下关系：

$$p_x = 1 - q_x = s_X(x+1)/s_X(x) = l_{x+1}/l_x$$

$$q_x = d_x/l_x$$

可以得到表 1－2。

表 1－2　　示例经验生命表

年龄	生存数	死亡数	死亡率	生存概率
(x)	l_x	d_x	$1\ 000q_x$	p_x
0	1 000 000	722	0.722	0.999278
1	999 278	603	0.603	0.999397
2	998 675	498	0.499	0.999501
3	998 177	415	0.416	0.999584
4	997 762	357	0.358	0.999642
5	997 405	322	0.323	0.999677
6	997 082	308	0.309	0.999691
7	996 774	307	0.308	0.999692

续表

年龄	生存数	死亡数	死亡率	生存概率
(x)	l_x	d_x	$1\ 000q_x$	p_x
8	996 467	310	0.311	0.999689
9	996 157	311	0.312	0.999688
10	995 847	311	0.312	0.999688
11	995 536	311	0.312	0.999688
12	995 225	312	0.313	0.999687
13	994 914	318	0.32	0.99968
14	994 595	334	0.336	0.999664
15	994 261	362	0.364	0.999636
16	993 899	402	0.404	0.999596
17	993 498	452	0.455	0.999545
18	993 046	509	0.513	0.999487
19	992 536	568	0.572	0.999428
20	991 969	616	0.621	0.999379
21	991 353	655	0.661	0.999339
22	990 697	686	0.692	0.999308
23	990 012	709	0.716	0.999284
24	989 303	730	0.738	0.999262
25	988 573	750	0.759	0.999241
26	987 823	770	0.779	0.999221
27	987 053	785	0.795	0.999205
28	986 268	804	0.815	0.999185
29	985 464	830	0.842	0.999158
30	984 635	867	0.881	0.999119
31	983 767	917	0.932	0.999068
32	982 850	977	0.994	0.999006
33	981 873	1 036	1.055	0.998945
34	980 838	1 100	1.121	0.998879
35	979 738	1 170	1.194	0.998806
36	978 568	1 248	1.275	0.998725
37	977 321	1 336	1.367	0.998633
38	975 985	1 437	1.472	0.998528
39	974 548	1 549	1.589	0.998411
40	972 999	1 669	1.715	0.998285
41	971 331	1 792	1.845	0.998155
42	969 539	1 918	1.978	0.998022
43	967 621	2 045	2.113	0.997887

续表

年龄	生存数	死亡数	死亡率	生存概率
(x)	l_x	d_x	$1\ 000q_x$	p_x
44	965 576	2 177	2. 255	0. 997745
45	963 399	2 325	2. 413	0. 997587
46	961 074	2 494	2. 595	0. 997405
47	958 580	2 689	2. 805	0. 997195
48	955 891	2 908	3. 042	0. 996958
49	952 984	3 144	3. 299	0. 996701
50	949 840	3 391	3. 57	0. 99643
51	946 449	3 641	3. 847	0. 996153
52	942 808	3 896	4. 132	0. 995868
53	938 912	4 163	4. 434	0. 995566
54	934 749	4 466	4. 778	0. 995222
55	930 283	4 840	5. 203	0. 994797
56	925 442	5 316	5. 744	0. 994256
57	920 127	5 914	6. 427	0. 993573
58	914 213	6 637	7. 26	0. 99274
59	907 576	7 468	8. 229	0. 991771
60	900 107	8 383	9. 313	0. 990687
61	891 725	9 354	10. 49	0. 98951
62	882 371	10 365	11. 747	0. 988253
63	872 005	11 415	13. 091	0. 986909
64	860 590	12 515	14. 542	0. 985458
65	848 075	13 683	16. 134	0. 983866
66	834 392	14 940	17. 905	0. 982095
67	819 453	16 296	19. 886	0. 980114
68	803 157	17 752	22. 103	0. 977897
69	785 405	19 298	24. 571	0. 975429
70	766 107	20 922	27. 309	0. 972691
71	745 185	22 609	30. 34	0. 96966
72	722 576	24 339	33. 684	0. 966316
73	698 237	26 094	37. 371	0. 962629
74	672 143	27 847	41. 43	0. 95857
75	644 296	29 574	45. 902	0. 954098
76	614 722	31 246	50. 829	0. 949171
77	583 476	32 828	56. 262	0. 943738

续表

年龄	生存数	死亡数	死亡率	生存概率
(x)	l_x	d_x	$1\ 000q_x$	p_x
78	550 648	34 282	62. 257	0. 937743
79	516 367	35 563	68. 871	0. 931129
80	480 804	36 631	76. 187	0. 923813
81	444 173	37 410	84. 224	0. 915776
82	406 763	37 858	93. 071	0. 906929
83	368 905	37 923	102. 8	0. 8972
84	330 982	37 563	113. 489	0. 886511
85	293 419	36 742	125. 221	0. 874779
86	256 677	35 442	138. 08	0. 86192
87	221 235	33 662	152. 157	0. 847843
88	187 572	31 426	167. 543	0. 832457
89	156 146	28 783	184. 333	0. 815667
90	127 363	25 806	202. 621	0. 797379
91	101 557	22 596	222. 5	0. 7775
92	78 960	19 271	244. 059	0. 755941
93	59 689	15 960	267. 383	0. 732617
94	43 729	12 793	292. 544	0. 707456
95	30 937	9 887	319. 604	0. 680396
96	21 049	7 338	348. 606	0. 651394
97	13 711	5 204	379. 572	0. 620428
98	8 507	3 509	412. 495	0. 587505
99	4 998	2 236	447. 334	0. 552666
100	2 762	1 337	484. 01	0. 51599
101	1 425	745	522. 397	0. 477603
102	681	383	562. 317	0. 437683
103	298	180	603. 539	0. 396461
104	118	76	645. 77	0. 35423
105	42	42	1000	0

通过初步观察，可以发现，就该生命表而言：

1. 死亡率在开始时是逐年降低的，从 0 岁一直降到 7 岁，然后才开始随年龄增加，直到 23 岁的死亡率还没有 0 岁的高；

2. 在 83 岁出现的死亡人数最多；

3. 差不多到 80 岁，全部人口死亡人数达到半数；

4. 全体人口的平均寿命为 76.71 岁，有超过 58% 的人将活到 77 岁；

5. 在 4 岁和 15 岁之间出现的死亡人数是局部最少的（每年死亡的人数都没有超过 400 人）。

有时，通过图示的方法能够帮助我们进行数据的观察，如［例 1-6］。

【例 1-6】 根据表 1-2，作 l_x、d_x 和 q_x 的图。

解：

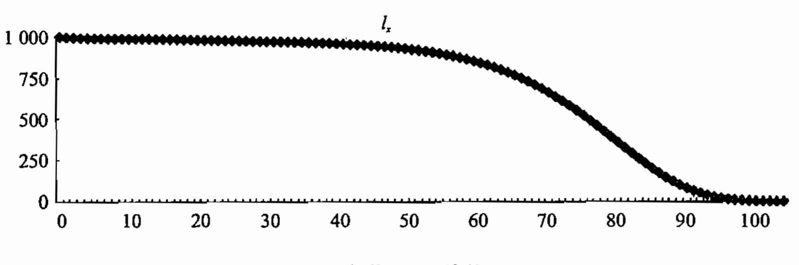


图 1-1　l_x 变化图（单位：1 000）

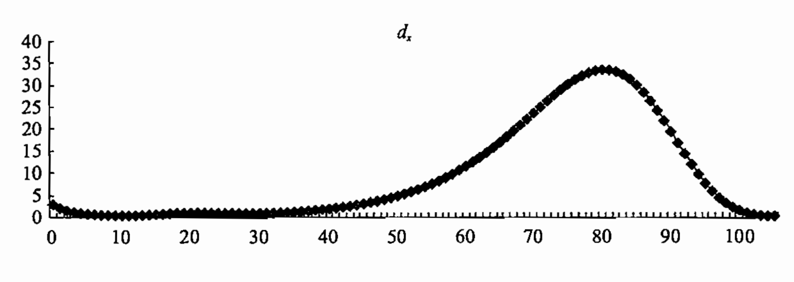


图 1-2　d_x 变化图（单位：1 000）

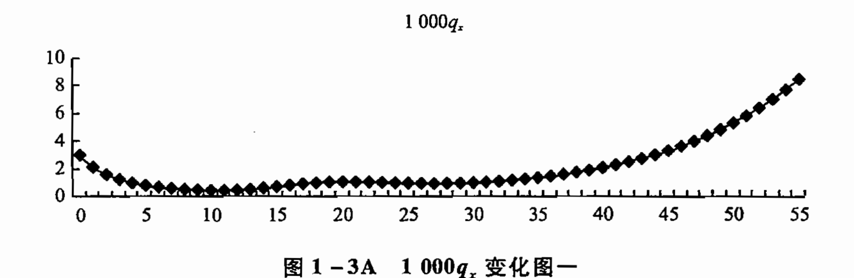


图 1-3A　1 000q_x 变化图一

1 000q_x

500
400
300
200
100
0
55 60 65 70 75 80 85 90 95 100

图 1-3B　1 000q_x 变化图二

【例 1－7】 假设卫东和李扬的死亡率分布相互独立且均服从示范生命表，他们的年龄分别为卫东 25 岁，李扬 30 岁。分别求：他们在 65 岁至 90 之间死亡的概率。

解：查表得：$l_{25}=988\ 573$，$l_{30}=984\ 635$，$l_{65}=848\ 075$，$l_{90}=127\ 363$

对于卫东：$${}_{40|25}q_{25}=\frac{s(65)-s(90)}{s(25)}=\frac{l_{65}-l_{90}}{l_{25}}=\frac{848\ 075-127\ 363}{988\ 573}$$
$$\approx 0.729$$

类似，对于李扬：$${}_{35|25}q_{30}=\frac{l_{65}-l_{90}}{l_{30}}=\frac{848\ 075-127\ 363}{984\ 635}\approx 0.732$$

【例 1－8】 根据示例生命表，求：$e_{20:\overline{3}|}$。

解：查表可得（假设 $l_0=1\ 000\ 000$）

x	l_x
20	991 969
21	991 353
22	990 697
23	990 012

$$e_{20:\overline{3}|}=0\cdot {}_{0|}q_{20}+1\cdot {}_{1|}q_{20}+2\cdot {}_{2|}q_{20}+3\cdot {}_{3}q_{20}$$
$$=1\cdot p_{20}\cdot q_{21}+2\cdot {}_{2}p_{20}\cdot q_{22}+3\cdot {}_{3}p_{20}$$
$$=\frac{l_{21}}{l_{20}}\left(1-\frac{l_{22}}{l_{21}}\right)+2\frac{l_{22}}{l_{20}}\left(1-\frac{l_{23}}{l_{22}}\right)+3\frac{l_{23}}{l_{20}}$$
$$=\frac{l_{21}}{l_{20}}+\frac{l_{22}}{l_{20}}+\frac{l_{23}}{l_{20}}=\frac{991\ 353}{991\ 969}+\frac{990\ 697}{991\ 969}+\frac{990\ 012}{991\ 969}\approx 2.9961$$

对于表 1－2，我们将其看成是一群生命的生存情况表，其中：

1. 这群生命在开始时由 l_0 个 0 岁生命组成；

2. 该生命群是封闭的。其他任何生命不准进入，成员减少的唯一原因是死亡；

3. l_x 是该群生命在 x 岁还活着的成员个数。

这样，再根据上述有关生命表函数的讨论，我们有：

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1-q_0)\\ &= l_0-d_0\\ l_2 &= l_1(1-q_1)\\ &= l_1-d_1\\ &= l_0-(d_0+d_1)\\ &\cdots\cdots\\ l_x &= l_{x-1}\cdot(1-q_{x-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= l_{x-1} - d_{x-1} \\
&= l_0 - (d_0 + d_1 + \cdots + d_{x-1}) \\
&= l_0[1 - (d_0 + d_1 + \cdots + d_{x-1})/l_0] \\
&= l_0[1 - {}_xq_0] \qquad (1-23)
\end{aligned}
$$

其中 l_x 是这一生存组中活到 x 岁的人数。l_0 为基数，上述方程可以改写成

$$
\begin{aligned}
l_1 &= l_0 \cdot p_0 \\
l_2 &= l_1 \cdot p_1 \\
&= l_1 - d_1 \\
&= (l_0p_0)p_1 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
l_x &= l_{x-1} \cdot p_{x-1} \\
&= l_0(p_0p_1 \times \cdots \times p_{x-1}) \\
&= l_0 \cdot {}_xp_0 \qquad (1-24)
\end{aligned}
$$

需要说明的是，生命表通常并不是通过观察 l_0 个 0 岁新生儿的生存过程，记录每一个新生儿的死亡年龄，从而得到每个年龄的剩余人数 l_x 的。这样做显然不合算，因为如果这样操作，编这样一张生命表至少得花 100 多年的时间。另外这样做也缺乏时效性，因为它反映的是 100 多年前的一代人的生存模式。事实上，生命表的编制是通过利用最近的一段时期的数据，如中国人寿保险业经验生命表（2000 - 2003）所使用的是 2000 - 2003 年期间中国人寿保险业有关的数据，通过先估计各年龄死亡率 q_x，然后再由 q_x 衍生出 l_x 的。生命表构造的更具体的讨论不是本课程的重点，有兴趣的读者可以参考其他相关书籍。

§1.3　分数年龄假设

在表 1 - 2 中可以发现，表中所给出的数值都是相应函数在整数点的值。对于非整数值，在表中是找不到的。事实上，这也是生命表的一种局限性，因为在一张表中，只能给出有限个数据。只有整数点上数值的函数显然不是一个完整的函数。并且，在对一些其他函数的讨论中可以发现，仅有 l_x 在整数点上的值是不够的。事实上，只有 ${}_np_x$ 和 ${}_nq_x$ 在 x 和 n 为整数时可以仅由生命表中的 l_x 给出。因此，还需要对 $s(0<s<1)$，确定 l_{x+s} 的值。注意，讨论 l_x 在非整数点上的值时，通常都是分段进行的，一般以一年为一段，因此，下面我们对整数 $x(x=0, 1, 2, \cdots, \omega-1)$，及任意的 $s \in (0, 1)$，在已知 l_x 和 l_{x+1} 值的前提下讨论 l_{x+s}。

假设 l_{x+s} 作为 s 的函数，在 [0，1] 区间上并具有某种数学形式。$s=0$ 和 $s=1$ 分别对应于 l_x 和 l_{x+1}。而对于 $0<s<1$，假定 l_{x+s} 在闭区间 [0，1] 上连续，在开区间（0，1）上可微。

事实上，这个假设也是讨论上述生命表衍生函数的基础。仅在上述假设下，我们并不能得出 l_{x+s} 在 $0<s<1$ 上的值。因此，还需要作进一步的假设，即关于 l_{x+s} 数学形式的假设。通常假设 l_{x+s} 作为 s 的函数在 [0，1] 区间上具有某种数学形式，常见假设有线性假设、指数假设和双曲假设。下面我们分别讨论：

1.3.1 线性假设

线性假设又叫均匀分布假设或均匀假设，在这种假设下，l_{x+s} 具有线性形式，即 l_{x+s} 可以写成 $a+bs$ 的形式。由连续性，可知

$$l_x=a,\quad l_{x+1}=a+b$$

因此

$$b=l_{x+1}-a=l_{x+1}-l_x=-d_x$$

于是

$$l_{x+s}=l_x-s\cdot d_x$$

或

$$\begin{aligned}l_{x+s}&=l_x-s\cdot(l_x-l_{x+1})\\&=s\cdot l_{x+1}+(1-s)\cdot l_x\end{aligned}\tag{1-25}$$

此时，l_{x+s} 的值就可以由 l_x 和 l_{x+1} 完全确定下来。

确定 l_{x+s} 的值后，其他函数的值也就相应地被确定。事实上，有

$$\begin{aligned}{}_sp_x&=\frac{l_{x+s}}{l_x}=1-s\cdot\frac{d_x}{l_x}\\&=1-s\cdot q_x\end{aligned}\tag{1-26}$$

$${}_sq_x=1-{}_sp_x=s\cdot q_x\tag{1-27}$$

另外

$$\begin{aligned}{}_{1-s}p_{x+s}&=\frac{l_{x+1}}{l_{x+s}}=\frac{l_{x+1}}{l_x-s\cdot d_x}\\&=\frac{p_x}{1-s\cdot q_x}\end{aligned}\tag{1-28}$$

$$\begin{aligned}{}_{1-s}q_{x+s}&=1-{}_{1-s}p_{x+s}=\frac{1-s\cdot q_x-p_x}{1-s\cdot q_x}\\&=\frac{(1-s)\cdot q_x}{1-s\cdot q_x}\end{aligned}\tag{1-29}$$

且

$$\mu_{x+s}=\frac{-\frac{d}{ds}l_{x+s}}{l_{x+s}}=\frac{d_x}{l_x-s\cdot d_x}$$

$$=\frac{q_x}{1-s\cdot q_x} \tag{1-30}$$

$$f(X=x+s\mid X>x)=\frac{f(x+s)}{s(x)}=\frac{{}_{x+s}p_0\cdot\mu(x+s)}{s(x)}$$

$$={}_sp_x\cdot\mu(x+s)=q_x \tag{1-31}$$

这是一个非常简洁且非常实用的结果，它表明，在线性假设下，区间（x，$x+1$）上的条件死亡密度为一个常数，并且这个常数就是在这个区间上的死亡概率。这同时表明随机变量 s 在这个区间上是均匀分布的。实际上，$l_{x+s}=l_x-s\cdot d_x$ 也意味着在这个区间上，人数是均匀下降的（即匀速的）。为此，l_{x+s}的线性假设通常被称为死亡的均匀分布假设，简称为 *UDD* 假设。

另外，注意到在均匀分布假设下，有

$$Pr[(K=k)\cap(S\leqslant s)]={}_kp_x\cdot s\cdot q_{x+k}={}_kp_x\cdot{}_sq_{x+k}$$
$$={}_{k|}q_x\cdot s$$
$$=\Pr(K=k)\cdot\Pr(S\leqslant s) \tag{1-32}$$

这表明，在均匀分布假设下，随机变量 K 和 S 是独立的。

注意：由于在 $s=0$ 和 $s=1$ 处没有可微性假设，所以，对 μ_{x+s}和 $f(s\mid X>x)$ 的讨论不包括这两点。

1.3.2 指数假设

指数假设又叫对数线性假设或常力假设，这种假设下 l_{x+s}具有指数形式，即它可以写成 ab^s 的形式，由

$$l_x=ab^0=a$$
$$l_{x+1}=ab^1=ab$$

有

$$b=\frac{l_{x+1}}{a}=\frac{l_{x+1}}{l_x}=p_x$$

于是

$$l_{x+s}=l_x\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)^s=(l_{x+1})^s\cdot(l_x)^{1-s} \tag{1-33}$$

或

$$l_{x+s}=l_x\cdot(p_x)^s \tag{1-34}$$

从而

$${}_sp_x=\frac{l_{x+s}}{l_x}=(p_x)^s \tag{1-35}$$

$$
\begin{aligned}
{}_sq_x &= 1 - {}_sp_x \\
&= 1 - (p_x)^s = 1 - (1 - q_x)^s \qquad (1-36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{1-s}p_{x+s} &= \frac{l_{x+1}}{l_{x+s}} = \frac{l_{x+1}}{l_x(p_x)^s} \\
&= \frac{p_x}{(p_x)^s} = (p_x)^{1-s} \qquad (1-37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{1-s}q_{x+s} &= 1 - {}_{1-s}p_{x+s} = 1 - (p_x)^{1-s} \\
&= 1 - (1 - q_x)^{1-s} \qquad (1-38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+s} &= \frac{-\frac{d}{ds}l_{x+s}}{l_{x+s}} = \frac{-l_x\,(p_x)^s \cdot \ (\ln p_x)}{l_x\,(p_x)^s} \\
&= -\ln p_x \qquad (1-39)
\end{aligned}
$$

这表明，在指数假设下，死亡力 μ_{x+s} 在 $0<s<1$ 上是一个常数。通常把这个常数死亡力记为 μ，即 $\mu=-\ln p_x$，于是

$$p_x = e^{-\mu}, \quad {}_sp_x = e^{-\mu s}$$

及

$${}_{1-s}p_{x+s} = e^{-\mu\cdot(1-s)}$$

从而

$$
\begin{aligned}
f(s\mid X>x) &= \frac{f(x+s)}{s(x)} = \frac{{}_{x+s}p_0 \cdot \mu(x+s)}{s(x)} = {}_sp_x \cdot \mu(x+s) \\
&= \mu \cdot e^{-\mu s} \qquad (1-40)
\end{aligned}
$$

这表明 S 在（0，1）上服从参数为 μ 指数的指数分布。所以有时又将指数分布称为常力分布。

1.3.3 双曲假设

双曲假设又叫调和假设或 Balducci 假设，这种假设下 l_{x+s} 具有双曲线形式，即它可写成 $(a+bs)^{-1}$ 的形式，

由 $s=0$ 时，

$l_x=\frac{1}{a}$ 及 $s=1$ 时，$l_{x+1}=\frac{1}{a+b}$

有

$$a = \frac{1}{l_x}, \qquad b = \frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}$$

从而

$$l_{x+s} = \left(\frac{1}{l_x} + s\left\{\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}\right\}\right)^{-1} \qquad (1-41)$$

或

$$\frac{1}{l_{x+s}}=\frac{1}{l_x}+s\left(\frac{1}{l_{x+1}}-\frac{1}{l_x}\right)$$

$$=s\cdot\frac{1}{l_{x+1}}+(1-s)\cdot\frac{1}{l_x} \tag{1-42}$$

这表明，这种假设下$\frac{1}{l_{x+s}}$具有线性形式。

类似地，在双曲假设下，可以得到其他生命表函数的表达式。

首先

$$({}_sp_x)^{-1}=\frac{l_x}{l_{x+s}}=l_x\left(\frac{1}{l_x}+s\left\{\frac{1}{l_{x+1}}-\frac{1}{l_x}\right\}\right)$$

$$=1+s\left(\frac{1}{p_x}-1\right)$$

$$=\frac{p_x+s(1-p_x)}{p_x} \tag{1-43}$$

于是

$${}_sp_x=\frac{p_x}{p_x+s(1-p_x)}$$

$$=\frac{1-q_x}{1-(1-s)q_x} \tag{1-44}$$

$${}_sq_x=1-{}_sp_x$$

$$=\frac{s\cdot q_x}{1-(1-s)q_x} \tag{1-45}$$

$${}_{1-s}p_{x+s}=\frac{l_{x+1}}{l_{x+s}}$$

$$=l_{x+1}\left(\frac{1}{l_x}+s\left\{\frac{1}{l_{x+1}}-\frac{1}{l_x}\right\}\right)=p_x+s(1-p_x)$$

$$=1-(1-s)q_x \tag{1-46}$$

$${}_{1-s}q_{x+s}=1-{}_{1-s}p_{x+s}$$

$$=(1-s)\cdot q_x \tag{1-47}$$

$$\mu(x+s)=\frac{-\frac{d}{ds}{}_sp_x}{{}_sp_x}$$

$$=-\frac{d}{ds}\left[\frac{p_x}{p_x+s(1-p_x)}\right]\div\frac{p_x}{p_x+s(1-p_x)}$$

$$=\frac{p_x\cdot q_x}{(p_x+s\cdot q_x)^2}\div\frac{p_x}{p_x+s\cdot q_x}=\frac{q_x}{p_x+s\cdot q_x}$$

$$=\frac{q_x}{1-(1-s)\cdot q_x} \tag{1-48}$$

$$f(s\mid X>x)={}_sp_x\cdot\mu(x+s)$$

$$=\frac{q_x(1-q_x)}{[1-(1-s)\cdot q_x]^2} \qquad (1-49)$$

注意，在调和假设下，死亡力在（x，$x+1$）上是单调递减的，这和直观的感觉有所不同。我们知道，死亡力描述了个体的瞬时死亡概率随时间变化的情况，因此，具有递增性质的死亡力才是合乎情理的，同时直觉也告诉我们，高龄人死亡的概率应该比年轻人死亡的概率大。当然，这种感觉并不一定总是正确的。事实上，经验表明，人类生命有这样一种特性，由于先天的缺陷或婴儿疾病，在婴幼儿阶段死亡率较高，而后死亡率随年龄的增长而下降，并在 30 岁左右趋于相对稳定，此后又随年龄的增长而升高。

在保险精算领域，具有递增性质的死亡力是更合理的，也是更常用的假设。首先，因为保险精算实务中更多考虑的是处于稳定年龄段的生命，这种生命的死亡力是递增的。其次，当考虑的是低龄生命时，即使国民生命表相应死亡力呈现先降而后升的形状，对保险公司来说，由于存在选择的过程，所以往往可以将身体虚弱者挡在门外，而只接纳那些身体条件较好者，而这些人的死亡力则是递增的。

在前面所作的三种假设中，线性假设下死亡力是递增的；指数假设下的死亡力为常数；调和假设则产生递减的死亡力。

需要强调的是，我们所作的三种假设均是针对单个（一年）区间的，因此，得到死亡力的增减性也只是局限于相应的一年区间，而不是在整个（0，∞）上的。

在一年区间上所作的这三种假设（当然还可以有其他的假设）各有优缺点。线性假设下，死亡力是单增的，这种结果是合乎情理的，同时，线性假设下的数学处理也比较简单。不过，这种简单既是线性假设的优点，也是它的缺点，正是因为这种简单，所以人们对用它来描述复杂生命情况的准确性不是十分放心。也正因为如此，所以有必要发展其他的假设方法。

指数假设在计算其他生命表函数时不如线性假设那么简单和方便，不过，指数假设有许多方便之处是其他假设所不及的。

双曲假设由于其死亡力递减而显得有点逊色，另外双曲假设下的有关计算也更麻烦，因此，这种假设的应用明显比前两种要少。但是，由这个假设得到的关系式${}_{1-s}q_{x+s}=(1-s)q_x$却十分有用。因此，这个假设同样具有其独特的好处。

意大利精算师 Gaetano Balducci 曾经指出了双曲线分布的诸多应用，因此，人们又将双曲假设称为 Balducci 假设或 Balducci 分布。

综合在上述假设下得到的一些关系式，我们得到如表 1－3 的比较表。

表 1-3　　分数年龄的概率函数在各种假设下的比较

函数	假设		
	均匀分布	常力	双曲
${}_tq_x$	tq_x	$1-(p_x)^t$	$tq_x/[1-(1-t)q_x]$
$\mu(x+t)$	$q_x/[1-{}_tq_x]$	$-\ln px$	$q_x/[1-(1-t)q_x]$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$(1-t)q_x/[1-tq_x]$	$1-(p_x)^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_yq_{x+t}$	$yq_x/[1-tq_x]$	$1-(p_x)^y$	$yq_x/[1-(1-y-t)q_x]$
${}_tp_x$	$1-{}_tq_x$	$(p_x)^t$	$p_x/[1-(1-t)q_x]$
${}_tp_x\ \mu(x+t)$	q_x	$-(p_x)^t\ln p_x$	$q_xp_x/[1-(1-t)q_x]^2$

注：表中 x 为整数，$0<t<1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$y+t\leqslant 1$。

§1.4　一些死亡解析律

用生命表加上分数年龄间的假设能够完全描述生命的生存情况。不过，这种描述方法有时显得比较复杂，因此，人们还希望能够用一个简单的数学函数来替代上述复杂方法。问题是：是否存在可以描述人类生存情况的数学函数？如果有，这种函数的具体表达式是什么？

很多人认为，既然自然界的很多现象都能被一些简单的数学公式很好地解释和描述，所以应该相信，人类的生存情况同样会服从某种简单的数学法则。曾经有很多人致力于寻求这种数学函数，他们通常利用带有少数几个参数的函数，作为描述人类生存模式的公式，我们将这种带有少数几个参数的公式称为死亡的解析律。

有四个重要的死亡解析律，它们在历史上曾经得到过很多的应用，并且直到现在，它们仍然具有重要的理论和应用价值。表 1-4 是这四个解析律的简单描述。

表 1-4　　不同解析律下的死亡和生存函数

提出人	$\mu(x)$	$s_X(x)$	约束条件
De Moivre(1729)	$(\omega-x)^{-1}$	$1-x/\omega$	$0\leqslant x<\omega$
Gompertz(1825)	Bc^x	$\mathrm{Exp}[-m(c^x-1)]$	$B>0$，$c>1$，$x\geqslant 0$
Makeham(1860)	$A+Bc^x$	$\mathrm{Exp}[-Ax-m(c^x-1)]$	$B>0$，$A\geqslant -B$，$c>1$，$x\geqslant 0$
Weibull(1939)	kx^n	$\mathrm{Exp}(-ux^{n+1})$	$k>0$，$n>1$，$x\geqslant 0$

注：

(1) 其中 $m=B/\ln c$，$u=k/(n+1)$；

(2) Gompertz 律是 Makeham 律的特殊情况；

(3) 如果 $c=1$，则 Gompertz 律和 Makeham 律均为常力分布；

(4) 在 Makeham 律中，常数 A 反映的是意外风险，Bc^x 反映的是老化的风险。

§1.5　选择和终极表

在考察某种生命的生存情况时，有时可能需要区别该生命的来源，即，不同来源的生命，尽管年龄相同，但是有可能未来的生存情况会不同。例如，对于来自经济、地理和社会条件都有很大不同的地区的相同年龄的人，我们很自然会认为他们的未来生存情况是不同的。

在考虑选择的情况下，我们用 $s(t;\ x)$，$t\geqslant 0$ 表示被选择的 x 岁的人在 t 年后仍然生存的概率，这个函数与前面我们讨论过的生存函数的性质类似。因此可以展开类似的讨论。

为了构造相应的选择生命表，我们用 $l_{[x]}$ 表示被选择的 x 岁人群的人数，$l_{[x]}$ 相当于综合生命表中的基数 l_0，并且，相应地，有

$$l_{[x]+t}=l_{[x]}s(t;\ x) \tag{1-50}$$

这样，只要对所有整数 t 确定 $l_{[x]+t}$ 的值，那么，就可以得到选定 x 的选择生命表，并可用类似的方法得到其他的生命表函数值。如：若选择年龄为 x，那么对这种人中已经 $x+5$ 岁的人来说，他们将死于 $x+7$ 和 $x+10$ 岁之间的（条件）概率为：

$$_{2|3}q_{[x]+5}=\frac{l_{[x]+7}-l_{[x]+10}}{l_{[x]+5}}$$

通常，随着 t 的增加，选择的意义将逐渐减小，当 t 足够大时，选择将失去意义。这是因为一般情况下，合理的假设是：对于特定的被选择人群，他们在被单独观察过一段时期后，剩余仍然存活的人群应该与大众人群无异，因此可以对他们使用综合生命表。

具有这种性质的生命表叫选择终极表。事实上，经验表明，使选择有意义的时期往往不超过 15 年。我们把这种使选择有意义的时期叫做观察期。

确定观察期是构造选择终极表的第一步。为讨论的方便，我们考虑观察期为 4 年的情况，这意味着，对被选择生命来说，过了 4 年以后，死亡力只与年龄有关，与来自的人群无关。

设 x 为所要构造的生命表中被选择的最小年龄。然后，选取一个基数 $l_{[x]}$，并且

$$l_{[x]+t}=l_{[x]}s(t;\ x) \qquad t=1,\ 2,\ 3 \tag{1-51}$$

$$l_{x+t}=l_{[x]}s(t;\ x) \qquad t\geqslant 4 \tag{1-52}$$

注意到，上式表明，

$$l_{[x]}=l_{x+4}/s(4;\ x) \tag{1-53}$$

因为 l_{x+4} 由综合生命表的基数 l_0 和确定的生存函数确定，而 $s(4;\ x)$

则为确定的生存函数，所以上式表明，这里的基数 $l_{[x]}$ 并不能像在构造综合生命表时那样任意选择，而是由式（1－53）来确定。

我们将 $l_{[x]+t}$ 与 l_{x+t} 排成如表 1－5 所示的行－列格式：

表 1－5　　选择终极生命表

$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$l_{[x]+3}$	l_{x+4}
				l_{x+5}
				l_{x+6}

接下来，对选择年龄［$x+1$］，类似地有

$$l_{[x+1]+t}=l_{[x+1]}s(t;\ x+1)\qquad t=1,\ 2,\ 3$$

$$l_{x+1+t}=l_{[x+1]}s(t;\ x+1)\qquad t\geqslant 4$$

由上式可以确定

$$l_{[x+1]}=\frac{l_{x+5}}{s(4;\ x+1)}$$

……

完整的选择终极表的形式如表 1－6。其中假设 20 岁是选择的最小年龄。

表 1－6　　选择终极生命表

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$l_{[x]+3}$	l_{x+4}	$x+4$
[20]	$l_{[20]}$	$l_{[20]+1}$	$l_{[20]+2}$	$l_{[20]+3}$	l_{24}	24
[21]	$l_{[21]}$	$l_{[21]+1}$	$l_{[21]+2}$	$l_{[21]+3}$	l_{25}	25
[22]	$l_{[22]}$	$l_{[22]+1}$	$l_{[22]+2}$	$l_{[22]+3}$	l_{26}	26
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

【例 1－9】 设选择期为 4 年，用 l_x 函数表示下面的条件概率：

（1）$_{2|4}q_{[20]+1}$

（2）$_{2|4}q_{[22]+3}$

解：（1）$_{2|4}q_{[20]+1}$ 表示在 20 岁被选择，21 岁活着的人死于 23 到 27 岁之间的条件概率。

$$_{2|4}q_{[20]+1}={}_2p_{[20]+1}\cdot {}_4q_{[20]+3}={}_2p_{[20]+1}\cdot(1-{}_4p_{[20]+3})={}_2p_{[20]+1}\cdot(1-p_{[20]+3}\cdot {}_3p_{[20]+4})$$

$$={}_2p_{[20]+1}\cdot(1-p_{[20]+3}\cdot {}_3p_{[20]+4})=\frac{l_{[20]+3}}{l_{[20]+1}}\cdot\left(1-\frac{l_{[20]+4}}{l_{[20]+3}}\cdot\frac{l_{[20]+7}}{l_{[20]+4}}\right)$$

$$=\frac{l_{[20]+3}}{l_{[20]+1}}\cdot\left(1-\frac{l_{[20]+7}}{l_{[20]+3}}\right)=\frac{l_{[20]+3}}{l_{[20]+1}}\cdot\left(\frac{l_{[20]+3}-l_{[20]+7}}{l_{[20]+3}}\right)=\frac{l_{[20]+3}-l_{27}}{l_{[20]+1}}$$

（2）类似，${}_{2|4}q_{[22]+3}$表示在 22 岁被选择，25 岁活着的人死于 27 ~ 31 岁之间的条件概率。

对该人来说 27 岁已超出选择期，因此概率为$\frac{l_{27}-l_{31}}{l_{[22]+3}}$。

【例 1－10】 已知选择和终极生命表：

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	q_{x+4}
33	0.020	0.015	0.030	0.025	0.035
34	0.010	0.025	0.020	0.030	0.040
35	0.020	0.015	0.030	0.035	0.050
36	0.010	0.025	0.030	0.045	0.040
37	0.020	0.025	0.040	0.035	0.030
38	0.020	0.035	0.030	0.025	0.035
39	0.030	0.025	0.020	0.035	0.045
40	0.020	0.015	0.030	0.040	0.040
41	0.010	0.025	0.035	0.035	0.035
42	0.020	0.030	0.030	0.030	0.035

求：已投保 2 年的（36）活到 40 岁的概率。

解：

$${}_4p_{[34]+2}=p_{[34]+2}\cdot p_{[34]+3}\cdot p_{38}\cdot p_{39}=(1-0.02)(1-0.03)(1-0.04)(1-0.05)$$
$$=0.98\cdot 0.97\cdot 0.96\cdot 0.95\approx 0.86695$$

习　题

1. 已知生存函数 $s(x)=\begin{cases}(10\,000-x^2)/10\,000, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 0, & x>100\end{cases}$，计算：

（ⅰ）新生婴儿在 60 岁到 70 岁之间死亡的概率；

（ⅱ）60 岁的人在 70 岁以前死亡的概率；

（ⅲ）50 岁的人能活到 70 岁的概率；

（ⅳ）50 岁的人在 60 岁到 70 岁之间死亡的概率。

2. 给定生命表：

x	l_x	q_x	d_x
50	1 000	0.020	
51			32
52			30
53			28
54		0.028	

求800个年龄为50岁的人，在54岁和55岁之间死亡人数期望值。

3. 已知电灯泡的使用寿命分布为：

$l_0=1\ 000\ 000$，$l_1=800\ 000$，$l_2=600\ 000$，$l_3=300\ 000$，$l_4=0$

某家工厂初始有2 500只灯泡，毁坏的灯泡将会在年末的时候更换。求在第三年末的时候需要更换多少只灯泡？

4. 已知一个70岁的人服从如下死亡力约束：

$$\mu_{70}(t)=\begin{cases}0.01, & t\leqslant 5\\ 0.02, & t>5\end{cases}$$

求${}_{20}p_{70}$。

5. 已知死亡力$\mu_x=2x$，求累积分布函数$F(x)$，概率密度函数$f(x)$，以及生存函数$s(x)$。

6. 已知$l_x=100(k-0.5x)^{2/3}$，$\mu_{50}=1/48$，求k的值。

7. 对于某一特定人群，修订生命表是根据标准生命表编制而成的，其编制规则是：修订生命表的死亡力等于标准生命表的死亡力的1/2。若已知，在标准生命表里$q_{80}=0.30$，求修正生命表里的q_{80}^{*}。

8. 已知（ⅰ）$\mu_{x+t}^{*}=\mu_{x+t}-k$，$0\leqslant t\leqslant 1$；（ⅱ）$q_x^{*}=0$，$q_x^{*}$是由$\mu_x^{*}$计算而得到的。求$k$的值。

9. 已知$\mu_x=A+e^x$，$x\geqslant 0$，${}_{0.5}p_0=0.50$，求A的值。

10. 已知${}_tp_x=1-t^2/100$，$0<t\leqslant 10$，求μ_{x+5}。

11. 已知（ⅰ）$\mu_{35+t}=\mu$，$0\leqslant t\leqslant 1$；（ⅱ）$p_{35}=0.985$；（ⅲ）μ_{35+t}^{*}，$0\leqslant t\leqslant 1$表示35岁的个体遭受额外风险时的死亡力；（ⅳ）$\mu_{35+t}^{*}=\mu+c$，$0\leqslant t\leqslant 0.5$；（ⅴ）额外死亡力$c$在35.5岁到36岁之间由$c$线性递减为0，求$q_{35}^{*}$。

12. 已知（ⅰ）$\mu(x)=F+e^{2x}$，$x\geqslant 0$，（ⅱ）${}_{0.4}p_0=0.50$，求F的值。

13. 已知新生婴儿的死亡力在初始的几个月里是递减的。若某个新生儿的死亡力是$\mu_x=1/(10+x)$，$x\geqslant 0$，x是月度量，求这个新生儿活了5个月后在随后的15个月死亡的概率。

14. 已知 $s(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-(e^x/100), & 1\leqslant x<4.5\\ 0, & x\geqslant 4.5\end{cases}$，求 $\mu(4)$。

15. 已知（ⅰ）$R=1-e^{-\int_0^1\mu(x+t)dt}$；（ⅱ）$S=1-e^{-\int_0^1(\mu(x+t)-k)dt}$；（ⅲ）$k$ 是正常数。另外有 $S=\frac{2}{3}R$，求 k 的值。

16. 给定一组研究对象，出生时男女人数相等。若有（ⅰ）对于男性 $\mu_x^m=0.10$，$x\geqslant 0$；（ⅱ）对于女性 $\mu_x^f=0.08$，$x\geqslant 0$，求这群人的 q_{60}。

17. 已知（ⅰ）μ_x^G 表示 Gompertz 律，$B=0.05$，$c=10^{0.04}$；（ⅱ）$\mu_x^W=kx^n$，$k=0.1$，$n>0$；（ⅲ）$\mu_{50}^G=\mu_{50}^W$。求 n 的值。

18. 已知生存函数 $s(x)=1/(1+x)$，求 $T(x)$ 的中位数。

19. 已知 $e_{35}=49$，$p_{35}=0.995$。假设 μ_x 在 $35\leqslant x\leqslant 36$ 时修正为原来的 2 倍，求修正后的 e_{35}^*。

20. 已知生存分布函数 $l_x=1\,000\left(1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right)$，$0\leqslant x\leqslant 100$，$\mu_x$ 表示实际死亡力，μ_x^l，$50\leqslant x\leqslant 51$ 表示死亡均匀分布假设下的死亡力，求 $\mu_{50.25}-\mu_{50.25}^l$。

21. 已知 $\mu(80.5)=0.0202$，$\mu(81.5)=0.0408$，$\mu(82.5)=0.0619$，且有死亡在每个整数年龄间服从均匀分布，求（80.5）在两年内死亡的概率。

22. 已知 $q_{70}=0.040$，$q_{71}=0.044$，且有死亡在每个年龄内都是均匀分布的，求 $\mathring{e}_{70:\overline{1.5|}}$。

23. 已知某一个选择期为 2 年的选择生命表如下图，且有 $q_{[80]+1}=q_{[81]+1}$，而且

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}
80	1 000	950	900
81	—	920	—
82	—	—	860

求 ${}_{1|}q_{[80]+1}$ 的值。

第二章　人寿保险的精算现值

学习目标

- □ 熟悉人寿保险的数学模型
- □ 熟悉人寿保险现值随机变量及人寿保险精算现值
- □ 掌握各种寿险产品趸缴净保费及人寿保险现值随机变量方差的计算方法
- □ 了解趸缴净保费的实际意义及递推公式
- □ 熟悉利用换算函数计算人寿保险的趸缴净保费

保险是指投保人根据合同约定，向保险人支付保险费，以换取保险人对于合同约定的可能发生的事故因其发生所造成的财产损失承担赔偿保险金责任，或者当被保险人死亡、伤残、疾病或者达到合同约定的年龄、期限时承担给付保险金的责任。

人身保险是以人的寿命和身体为保险标的的保险。人身保险的投保人按照保单约定向保险人缴纳保险费，当被保险人在合同期限内发生死亡、伤残、疾病等保险事故或达到人身保险合同约定的年龄、期限时，由保险人依照合同约定承担给付保险金的责任。

人寿保险是人身保险的一种。和所有保险业务一样，被保险人将风险转嫁给保险人，接受保险人的条款并支付保险费。人寿保险转嫁的是被保险人的生存或者死亡的风险。它起源于古代的互助团体，其原理是通过集合具有同质风险的大量被保险人，通过在这些被保险人之间进行风险分散——即由所有的被保险人共同出资给遭遇风险的少数被保险人——来达到降低突发风险事故对遭遇风险事故的个体造成的财务冲击。

本章的目的就是讨论各种人寿保险的模型和方法。

§2.1　连续型保险

所谓连续型保险，指的是在保险事故出现后立即支付保险利益的保险，因为人寿保险一般以被保险人的死亡为保险事故，所以有时又叫做在死亡即刻支付的保险。

在本书中，根据保险条款的规定，在保险事故出现后，保险公司向被保险人（或其受益人）支付的保险金为保险利益，保险利益一般为从保险

开始（保单生效）后到保险事故出现之间的时间长度的函数，根据上一章的记号，用 t 来记时间变量，相应的保险利益记为 b_t。一般情况下，统称 b_t 为保额函数。相应地，用 v_t 记贴现函数，即将 b_t 贴现到保险开始时的函数。通常假设贴现因子中的利率为常数。

对于一份新发行的保单，因为保险事故发生的时间由随机变量 $T(x)$ 来描述，而保险利益的支付时间及其价值均与 $T(x)$ 有关，所以，可以定义相应的现值随机变量如下：

$$Z = b_T v_T \tag{2-1}$$

其中，b_T 为保额随机变量，v_T 为贴现随机变量。下面对不同的人寿保险，分别进行讨论。

2.1.1　等额保险

所谓等额保险，是指保险利益的金额在保险开始时就已经固定，只是支付的时间不确定而已，支付时间与保险事故发生的时间有关。

1. 定期死亡保险。考虑 n 年期定期死亡保险，这种保险只有被保险人在保险开始后 n 年内死亡，保险公司才对被保险人进行支付。对于在死亡时刻进行支付，并且保险利益为 1 的 n 年期定期死亡保险，有

$$b_T = \begin{cases} 1 & T \leqslant n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

及

$$v_T = v^T$$

从而

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leqslant n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

称现值函数随机变量 Z 的数学期望为保险的精算现值。

记（x）的连续型单位保额 n 年期定期死亡保险的精算现值 $E[Z]$ 为 $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$，于是

$$\begin{aligned} \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= \int_0^n v^t f_T(t)\,dt \\ &= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \end{aligned} \tag{2-2}$$

并且，Z 的 j 阶矩为

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= \int_0^n (v^t)^j\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \\ &= \int_0^n e^{-(\delta_j)t}\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \end{aligned}$$

上式中第二个等号表明：Z 的 j 阶矩为连续型单位保额 n 年期定期死亡保险在利息力 δ_j 下的精算现值。

可以证明，如果对任意的 $t\geqslant 0$，都有 $b_t^j=b_t$，那么，在利息力 δ 下 Z 的 j 阶矩等于在利息力 δ_j 下 Z 的 1 阶矩。

更准确地，用符号表示，上述规则为：如果 Z 的所有矩都存在且对任意的 $t\geqslant 0$，有 $b_t^j=b_t$，那么

$$E[Z^j]@\delta_t=E[Z]@j\delta_t \tag{2-3}$$

这个性质通常又叫矩规则。由矩规则，有

$$\mathrm{Var}(Z)={}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}-(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2 \tag{2-4}$$

其中上式右边第一个函数左上角的 2 表示该函数所使用的利息力为已知利息力的 2 倍。

【例 2-1】 假设利息力为常数 δ，死亡力为常数 μ，计算发行给 (x) 的单位保额的五年期定期死亡保险的精算现值和方差。

解： 由于

$$Z=\begin{cases}v^T & T\leqslant 5\\ 0 & T>5\end{cases}$$

所以精算现值为：

$$\begin{aligned}E(Z)&=\int_0^5(v^t)\,{}_tp_x\ \mu_{(x+t)}dt\\&=\int_0^5 e^{-(\delta+\mu)t}\mu dt\\&=\frac{\mu}{\mu+\delta}\left(1-e^{-5(\mu+\delta)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Z^2)&=\int_0^5 v^{2t}\,{}_tp_x\ \mu_{x+t}dt\\&=\frac{\mu}{\mu+2\delta}(1-e^{-5(\mu+2\delta)})\end{aligned}$$

方差为：

$$\mathrm{Var}(Z)=\frac{\mu}{\mu+2\delta}(1-e^{-5(\mu+2\delta)})-\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}(1-e^{-5(\mu+\delta)})\right)^2$$

2. 终身寿险。对于 (x) 的连续型单位保额的终身寿险，有

$$b_T=1$$

及

$$v_T=v^T$$

因此

$$Z=v^T \qquad T\geqslant 0$$

相应的精算现值为

$$\bar{A}_x=E[Z]$$

$$= \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_x(t) dt \qquad (2-5)$$

显然，终身寿险是定期保险的极限情况。

【例 2－2】 某发行给（70）的终身寿险，若被保险人在 90 岁之前死亡，死亡给付为 5 单位保额，若被保险人在 90 岁之后死亡，死亡给付为 1 单位保额，死亡时刻立即给付，已知 Z 为该保单的现值随机变量，$\mu_{70}(t) = 0.02(t>0)$，$\delta = 0.04$

求：$\mathrm{Var}(Z)$

解：由于 $Z = \begin{cases} 5v^T & T \leqslant 20 \\ v^T & T > 20 \end{cases}$

令 $$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leqslant 20 \\ 0 & T > 20 \end{cases},\ Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leqslant 20 \\ v^T & T > 20 \end{cases}$$

可得 $Z = 5Z_1 + Z_2$，$Z_1 Z_2 = 0$

$$E(Z_1) = \frac{\mu}{\mu+\delta}(1 - e^{-n(\mu+\delta)})$$
$$= \frac{0.02}{0.06}(1 - e^{-1.2}) = 0.232935$$

$$E(Z_1^2) = \frac{\mu}{\mu+2\delta}(1 - e^{-n(\mu+2\delta)})$$
$$= \frac{0.02}{0.10}(1 - e^{-2}) = 0.172933$$

同理可得 $E(Z_2) = 0.100398$，$E(Z_2^2) = 0.027067$

$$E(Z) = 5E(Z_1) + E(Z_2) = 1.26507$$
$$E(Z^2) = E[(5Z_1 + Z_2)^2] = 25E(Z_1^2) + E(Z_2^2) = 4.35039$$
$$\mathrm{Var}(Z) = 4.35039 - 1.26507^2 = 2.75$$

【例 2－3】 某对（35）发行的终身寿险，死亡发生时给付 10 单位保额，若该人死亡率服从 UDD 假设，$\omega = 100$，$\delta = 0.06$，Z 为该保险的现值随机变量，求：

（1）$E(Z)$

（2）$\mathrm{Var}(Z)$

解：首先在 UDD 假设下，${}_tp_{35}\mu_{35}(t) = q_{35} = \dfrac{1}{\omega - 35}$

$$(1)\ E(Z) = \int_0^\infty v^t f_T(t) dt$$
$$= \int_0^{65} 10e^{-0.06t} \frac{1}{65} dt$$
$$= \frac{10}{65} \frac{1}{0.06}(1 - e^{-65(0.06)})$$

$$= 2.5122$$

(2) $E(Z^2) = \int_0^{65} 10^2 e^{-0.12t} \frac{1}{65} dt$

$$= \frac{100}{65} \times \frac{1}{0.12} \times (1 - e^{-65(0.12)})$$

$$= 12.8153$$

$\mathrm{Var}(Z) = 6.5041$

【例 2－4】 假设某保险公司的某种 5 年定期连续型死亡保险有 250 个同为 (x) 岁的相互独立的被保险人，假设死亡力都为常数 $\mu = 0.1$，保险利益为 100。

假设保险公司要建立一个基金来应付对死亡的支付，该基金的利息力为 $\delta = 0.05$。为了使该基金有 95% 的把握在每个被保险人死亡时有充足的资金进行支付，计算在 $t = 0$ 时，该基金的最小量。

解： 设该基金的最小量为 G，T_i 为第 i 个被保险人未来生命时间长度随机变量，$i = 1, 2, \cdots, 250$。则保险公司支付给 i 的保险利益的现值为 $Z_i = 20v^{T_i}$，并且，保险公司所需要支出的总的保险利益为

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{250}$$

注意到被保险人相互独立，并且服从相同的生存模式，所以 $Z_i (i = 1, 2, \cdots, 250)$ 独立同分布。根据中心极限定理知，A 近似服从正态分布，且其均值

$$E[Z] = E[Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{250}]$$
$$= 250E[Z_1]$$

方差

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{250})$$
$$= 250\mathrm{Var}(Z_1)$$

由题设知，

$$E[Z_1] = E[100v^{T_1}]$$
$$= (100)\left(\frac{0.1}{0.1 + 0.05}\right)(1 - e^{-5(0.1+0.05)})$$
$$= 35.1756$$

$$E[(Z_1)^2] = E[100^2 v^{2T_1}]$$
$$= (100^2)\left(\frac{0.1}{0.1 + 0.1}\right)(1 - e^{-5(0.1+0.1)})$$
$$= 3\ 160.6028$$

$$\mathrm{Var}(Z_1) = E[Z_1^2] - E[Z_1]^2$$
$$= 1\ 923.2826$$

因此

$$E[Z]=250\times 35.1756$$
$$=8\ 793.9$$
$$\mathrm{Var}(Z)=250\times 1\ 923.2826$$
$$=480\ 820.65$$

从而

$$Z\sim N(8\ 793.9,\ 480\ 820.65)$$

所以

$$Pr\left\{\frac{Z-8\ 793.9}{\sqrt{480\ 820.65}}\leqslant 1.645\right\}=0.95$$

$$G=1.645\sqrt{480\ 820.65}+8\ 793.9=9\ 934.56$$

因此，在 $t=0$ 时，该基金的最小量为 9 934.56 就能保证基金有 95% 的把握进行支付。

3. 生存和两全保险。单位保额的 n 年期生存保险是指当被保险人在 n 年后还生存时，支付 1 元保险利益的保险。用符号表示，为：

$$b_T=\begin{cases}0 & T\leqslant n\\ 1 & T>n\end{cases}$$

及

$$v_T=v^n$$

从而

$$Z=\begin{cases}0 & T\leqslant n\\ v^n & T>n\end{cases}$$

用 $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ 记 n 年期生存保险的精算现值，于是：

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=E[Z]$$
$$=v^nE[b_T]$$
$$=v^nPr\{T(x)\geqslant n\}$$
$$=v^n\ {}_np_x$$
$$\mathrm{Var}(Z)=v^{2n}\mathrm{Var}(b_T)$$
$$=v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x$$
$$={}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}-(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})^2 \qquad (2-6)$$

注意到 n 年期生存保险是被保险人在 n 年后还活着的前提下得到的 1 元钱的现值，我们称这种现值为 n 时的 1 元钱在 0 时的精算现值。显然，精算现值既考虑到时间的因素，又考虑到死亡率的因素。又因为是单位支付的精算现值，所以又可称之为 n 期精算贴现因子，并且可以用另一个记号 ${}_nE_x$ 记之。

单位保额的 n 年期两全保险是指无论被保险人在 n 年后生存时还是在 n

年内死亡时都给被保险人支付单位保险利益的保险。用符号表示，就是

$$b_T = 1$$

及

$$v_T = \begin{cases} v^T & T \leqslant n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

从而

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leqslant n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

用记号 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$表示单位保额 n 年期两全保险的精算现值，即 $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E[Z]$，由矩规则，有：

$$\mathrm{Var}(Z) = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2 \tag{2-7}$$

注意到两全保险在被保险人死亡时和在保险到期还生存的情况下都支付保险利益，这其实相当于同时拥有定期死亡保险和定期生存保险两种保险，因此，两全保险可以看成是定期死亡保险和定期生存保险的组合。

令 Z_1、Z_2、Z_3 分别为定期死亡、生存和两全保险的现值随机变量，相应的保险利益均为 1，保险利益在死亡时刻或满期时支付，由于

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leqslant n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leqslant n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

和

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & T \leqslant n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

所以

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 \tag{2-8}$$

于是

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \tag{2-9}$$

和

$$\mathrm{Var}(Z_3) = \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) + 2\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) \tag{2-10}$$

因为

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2] \tag{2-11}$$

注意到对于任意的 T，均有 $Z_1 Z_2 = 0$，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) &= -E[Z_1]E[Z_2] \\ &= -\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \end{aligned} \tag{2-12}$$

于是

$$\text{Var}(Z_3)=\text{Var}(Z_1)+\text{Var}(Z_2)+2\text{Cov}(Z_1,Z_2)$$
$$=[{}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}-(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})^2]+[{}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}-(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})^2]-2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

【例 2-5】 假设某地区新生婴儿的寿命随机变量在（0，100）上服从均匀分布。对（25）的人，在利息力 $\delta=6\%$ 的情况下，计算发行给该人的 40 年期 1 000 元保额的两全保险现值随机变量的（1）精算现值；（2）方差。

解： 设 Z 为单位保额的两全保险的精算现值随机变量，于是

（1）
$$\bar{A}_{25:\overline{40}|}=E[Z]$$
$$=\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|}+A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1}$$
$$\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|}=\int_0^\infty v^t f(t)\,dt$$
$$=\int_0^{40}e^{-\delta t}\frac{1}{75}dt$$
$$=\frac{1-e^{-40\delta}}{75\delta}$$
$$=0.202063$$
$$A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1}=v^{40}{}_{40}p_{25}$$
$$=e^{-40\delta}(35/75)$$
$$=0.042335$$

从而，所求保险之精算现值为

$$1\ 000\bar{A}_{25:\overline{40}|}=1\ 000(0.202063+0.042335)$$
$$=244.40$$

（2）
$$\text{Var}(Z)=[{}^2\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|}-(\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|})^2]+[{}^2A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1}-(A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1})^2]-2\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|}A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1}$$
$${}^2\bar{A}^{1}_{25:\overline{40}|}=\frac{1-e^{-80\delta}}{150\delta}$$
$$=0.110197$$
$${}^2A_{25:\overline{40}|}^{\ \ 1}=e^{-80\delta}(35/75)$$
$$=0.003841$$

于是

$$\text{Var}(Z)=0.054307$$

从而，所求之方差为

$$\text{Var}(1\ 000Z)=1\ 000\ 000\text{Var}(Z)$$
$$=54\ 306.997$$

【例 2-6】 假设死亡力 $\mu=0.04$，利息力 $\delta=0.06$ 均为常数。分别求连续型单位保险利益的 30 年期定期死亡保险、定期生存保险和两全保险的现值随机变量的精算现值和方差。

解： 分别用 Z_1、Z_2、Z_3 表示定期死亡、生存和两全保险的现值随机变量

（1）定期死亡保险

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{30}|}=\int_0^{30}v^t\ {}_tp_x\ \mu_x(t)\,dt$$

$$=\int_0^{30}e^{-(\delta+\mu)t}\mu dt$$

$$=\frac{\mu}{\delta+\mu}[1-e^{-30(\delta+\mu)}]$$

$$=0.4(1-e^{-3})$$

$$=0.38$$

$$\text{Var}(Z_1)={}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{30}|}-(\bar{A}^{1}_{x:\overline{30}|})^2$$

$$=\frac{\mu}{2\delta+\mu}[1-e^{-30(2\delta+\mu)}]-(0.38)^2$$

$$=0.1034778$$

（2）定期生存保险

$$A_{x:\overline{30}|}^{\ \ 1}=v^{30}\ {}_{30}p_x$$

$$=e^{-30(\delta+\mu)}$$

$$=0.049787$$

$$\text{Var}(Z_2)=v^{60}\ {}_{30}p_x\ {}_{30}q_x$$

$$=e^{-30(2\delta+\mu)}(1-e^{-30\mu})$$

$$=0.05751$$

（3）两全保险

$$\bar{A}_{x:\overline{30}|}=\bar{A}^{1}_{x:\overline{30}|}+A_{x:\overline{30}|}^{\ \ 1}$$

$$=0.42988$$

$$\text{Var}(Z_3)=\text{Var}(Z_1)+\text{Var}(Z_2)-2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

$$=0.0713822$$

4. 延期保险。m 年延期保险对被保险人在 m 年后的死亡提供保障，换句话说，在 m 年内被保险人死亡将得不到保险赔付。例如，对连续型单位保额 m 年延期终身寿险，有

$$b_T=\begin{cases}1 & T>m\\ 0 & T\leqslant m\end{cases}$$

及

$$v_T=v^T$$

于是

$$Z=\begin{cases}v^T & T>m\\ 0 & T\leqslant m\end{cases}$$

将这种保险的精算现值记为 ${}_{m|}\bar{A}_x$，则

$$ {}_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\, dt \qquad (2-13) $$

【例 2-7】 对于例 2-5 所述地区的（25）的一份连续型 1 000 单位保险利益的延期 10 年终身寿险，假设利息力 $\delta=0.06$，求保险利益现值随机变量的：（1）数学期望；（2）方差；（3）分布函数；（4）第 95 个百分点 $\xi_Z^{0.95}$。

解：（1）

$$ 1\ 000\ {}_{10|}\bar{A}_{25} = 1\ 000\int_{10}^{75}\frac{e^{-\delta t}}{75}dt $$

$$ = 1\ 000\times\frac{e^{-10\delta}-e^{-75\delta}}{75\delta} $$

$$ = 119.49 $$

（2）

$$ \mathrm{Var}(1\ 000Z) = (1\ 000)^2\left[\frac{e^{-20\delta}-e^{-150\delta}}{150\delta}-\left(\frac{e^{-10\delta}-e^{-75\delta}}{75\delta}\right)^2\right] $$

$$ = 19\ 188.29 $$

（3）因为

$$ Z=\begin{cases} v^T & 10<T\leqslant 75 \\ 0 & T\leqslant 10 \end{cases} $$

所以

a）对 $0\leqslant z<v^{75}$，有

$$ \begin{aligned} F_Z(z) &= Pr(Z\leqslant z) \\ &= Pr(Z=0) \\ &= Pr(T\leqslant 10) \\ &= {}_{10}q_{25} \\ &= 10/75 \end{aligned} $$

b）对 $v^{75}<z<v^{10}$，有

$$ \begin{aligned} F_Z(z) &= Pr(Z\leqslant z) \\ &= Pr(v^T\leqslant z)+Pr(Z=0) \\ &= Pr(T\geqslant \ln z/(-\delta))+Pr(Z=0) \\ &= {}_sp_{25}+10/75=(85-s)/75 \\ &= [85-\ln z/(-\delta)]/75 \end{aligned} $$

其中 $s=\ln z/(-\delta)$；

c）对 $z\geqslant v^{10}$，有

$$ \begin{aligned} F_Z(z) &= Pr(Z\leqslant z) \\ &= 1 \end{aligned} $$

（4）由 Z 的分布知，当 $s=13.75$ 时，$F_Z(z)=(85-s)/75=95\%$，所以此时对应的 z 值即为 $\xi_Z^{0.95}$。

由 $s=\ln z/(-\delta)$，有

$$
\begin{aligned}
z &= \exp(-s\delta) \\
&= 0.438235
\end{aligned}
$$

也即

$$\xi_Z^{0.95} = 0.438235$$

2.1.2 变额保险

变额保险，顾名思义，是指保险利益不是常数，而是随着死亡发生的时间不同而不同的保险。理论上，保险利益随死亡时间的变化方式可以是非常任意的，不过在实务中，保险利益的变化往往是有一定规律的。

1. 递增保额保险。首先考虑保险利益按年度递增的终身寿险的情况：如果死亡在第一年内，则在死亡时刻支付1，如果死亡在第二年内，则在死亡时刻支付2，如此递推。用符号表示，就是

$$b_T = [T+1]$$

及

$$v_T = v^T$$

于是

$$
\begin{aligned}
Z &= [T+1]v^T \\
&= (K+1)v^T
\end{aligned}
$$

这种保险叫做年度递增终身寿险，其精算现值为

$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})x &= E[Z] \\
&= \int_0^\infty [t+1]v^t\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} (k+1)v^t\,{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \qquad (2-14)
\end{aligned}
$$

注意，由于保额函数不为1或0，所以不能直接利用矩规则计算高阶矩，而需要由它们的定义直接进行计算。

保险利益也可以按其他方式增加，如一年增加 m 次的终身寿险，其保额在第一个 $1/m$ 年内为 $1/m$，在第二个 $1/m$ 年内为 $2/m$，依次类推，用符号表示，就是

$$b_T = [Tm+1]/m$$

及

$$v_T = v^T$$

于是

$$Z = [Tm+1]v^T/m$$

其精算现值为

$$E[Z] = (I^{(m)}\bar{A})_x$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{[tm+1]}{m} v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k/m}^{(k+1)/m} \frac{k+1}{m} v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt$$

这种情况当 $m \to \infty$ 时，就变成了：

$$b_T = T$$

及

$$v_T = v^T$$

从而

$$Z = Tv^T$$

相应的精算现值为 $(\bar{I}\bar{A})_x$，且

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty} tv^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^t ds \right) v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \int_s^{\infty} v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt ds$$

$$= \int_0^{\infty} {}_{s|}\bar{A}_x ds \qquad (2-15)$$

对于上述各种终身寿险，如果将死亡保额限于 n 年内，则成为相应的 n 年期定期保险。类似的讨论留作练习。

2. 递减保额保险。首先考虑年度递减的情况，因为每年保险利益减少 1，所以我们只能考虑定期寿险的情况。对于年度递减保额的 n 年期定期保险，其在第一年提供死亡保额 n，在第二年提供死亡保额 $n-1$，……，最后保障在第 n 年末终止，即：

$$b_T = \begin{cases} n-[T] = n-K & T \leqslant n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

及

$$v_T = v^T$$

于是

$$Z = \begin{cases} v^T(n-[T]) & T \leqslant n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

其精算现值为

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-[t]) v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (n-k) v^t \, {}_tp_x \mu_x(t) dt \qquad (2-16)$$

可以类似地讨论保险利益按其他方式递减的保险，具体讨论留着练习。

我们将几种主要的连续型保险的精算现值公式总结如下：

1. 终身寿险

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt$$

2. n 年期定期保险

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt$$

3. n 年期生存保险

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} &= {}_nE_x \\ &= v^n \, {}_np_x \end{aligned}$$

4. n 年期两全保险

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ &= \int_0^{n} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt + {}_nE_x \end{aligned}$$

5. 延期 m 年的 $n(m<n)$ 年期定期保险

$${}_{m|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt$$

6. n 年期年度递增定期寿险

$$\begin{aligned} (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{n} [t+1] v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int_k^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \, {}_{k|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} \end{aligned}$$

7. n 年期年度递减定期寿险

$$\begin{aligned} (D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{n} (n-[t]) v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int_k^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \, {}_{k|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} \end{aligned}$$

8. 一年增加 m 次的 n 年期定期寿险

$$\begin{aligned} (I^{(m)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^{n} ([tm+1]/m) v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(k + \frac{j+1}{m}\right) \int_{j/m}^{(j+1)/m} v^{t+k} \, {}_{t+k}p_x \, \mu(x+k+t)\,dt \end{aligned}$$

【例 2－8】 假设（x）的死亡力为常数 μ，利息力为常数 δ，分别求：（1）$(I\bar{A})_x$；（2）$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}$；（3）$(I^{(m)}\bar{A})_x$。

解：（1）$(I\bar{A})_x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} (k+1) e^{-(\delta+\mu)t} \mu\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)k}$$

$$= \frac{\mu}{(\delta+\mu)[1-e^{-(\delta+\mu)}]}$$

(2) $(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n-[t])v^t {}_tp_x \mu(t)dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}(n-k)e^{-(\delta+\mu)t}\mu dt$$

$$= \frac{\mu[1-e^{-(\delta+\mu)}]}{\delta+\mu}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{-(\delta+\mu)k}$$

$$= \frac{\mu}{\delta+\mu}\left[n - \frac{e^{-(\delta+\mu)} - e^{-(1+n)(\delta+\mu)}}{1-e^{-(\delta+\mu)}}\right]$$

(3) $(I^{(m)}\bar{A})_x = \int_0^{\infty}\frac{[tm+1]}{m}v^t {}_tp_x \mu_x(t)dt$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k/m}^{(k+1)/m}\frac{k+1}{m}e^{-(\delta+\mu)t}\mu dt$$

$$= \frac{\mu[1-e^{-(\delta+\mu)/m}]}{m(\delta+\mu)}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-(\delta+\mu)k/m}$$

$$= \frac{\mu}{m(\delta+\mu)[1-e^{-(\delta+\mu)/m}]}$$

2.1.3　微分方程

对于连续型保险，可以通过利用微积分和微分方程的方法来发展这种保险的递推关系式。

考虑 (x) 的终身寿险，我们有

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = \frac{d}{dx}\left[1-\delta\int_0^{\infty}v^t {}_tp_x dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[-v^t {}_tp_x\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}(-\delta v^t)\ {}_tp_x dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[1-\delta\int_0^{\infty}v^t {}_tp_x dt\right]$$

$$= -\delta\int_0^{\infty}v^t\left(\frac{d}{dx}{}_tp_x\right)dt$$

$$= \delta\bar{A}_x - \mu(x)(1-\bar{A}_x)$$

上式用到对 ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}$ 求导。

另外，由

$$\bar{A}_x = E[v^T]$$
$$= E[v^T \mid T\leqslant h]Pr\{T\leqslant h\} + E[v^T \mid T>h]Pr\{T>h\}$$

注意到

$$Pr\{T\leqslant h\} = {}_hq_x$$

$$Pr\{T > h\} = {}_hp_x$$

$$f_T(t\mid T\leqslant h) = \begin{cases} \dfrac{f_T(t)}{F_T(h)} = \dfrac{{}_tp_x\,\mu(x+t)}{{}_hq_x} & 0\leqslant t\leqslant h \\ 0 & t > h \end{cases}$$

$$E[v^T\mid T>h] = v^hE[v^{T-h}\mid T-h>0] = v^h\bar{A}_{x+h}$$

所以

$$\bar{A}_x = \int_0^h \frac{v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)}{{}_hq_x}dt\;{}_hq_x + v^h\;{}_hp_x\;\bar{A}_{x+h}$$

于是

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \left[-\int_0^h v^t\;{}_tp_x\,\mu(x+t)dt + (1-v^h\;{}_hp_x)\bar{A}_{x+h}\right]/h$$

令 $h\to 0$，对上式两边取极限，有

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu(x) + [\mu(x)+\delta]\bar{A}_x$$

§2.2 离散型保险

理论上，保险利益应该在死亡即刻支付，实务中，大多数的保险利益也是从死亡时刻开始算起的，实际情况中，从保险事故发生、到保险公司接到报案、然后进行理赔处理、最后到支付保险利益，期间需要经过一些过程，因此死亡事故发生的时刻与保险利益支付的时刻之间一般有一段等待的时间，不过等待的这段时间是通常是需要考虑利息的。由此可见，连续型保险更接近实际情况。

然而从以上的讨论可以发现，有关连续型保险的计算要求已知确切的死亡率分布，而实际中可用的工具可能只有生命表或只有一些离散点的数据，因此，对于离散型保险的讨论就显得很有必要。

所谓离散型保险，指保险利益在保险事故出现后并不立即支付，而是等到一段时间后再支付，我们这里讨论的是保险利益在保险事故出现所在期的期末支付的情况，注意到，常用的期为年，所以这种保险有时又被称为死亡年度末支付保险。

对于死亡年度末支付保险，由于保险利益在死亡年度末支付，所以保险的保额现值为随机变量 K 的函数，而与具体死亡出现在相应年度内的具体时间点无关。

因此，保额随机变量和现值随机变量都可以写成 $K(K=[T])$ 的函数

b_{K+1}和 v_{K+1}，相应的保险利益现值随机变量为

$$Z_{K+1}=b_{K+1}v_{K+1} \tag{2-17}$$

这部分的讨论与上一部分的讨论平行，同样先讨论保险利益为固定金额的保险，然后再讨论保险利益可以变化的情况。

2.2.1　等额保险

1. n 年期定期保险。在死亡年末支付 1 的 n 年期定期保险，其保险利益函数、贴现函数和现值函数分别为：

$$b_{K+1}=\begin{cases}1 & K<n\\ 0 & K\geqslant n\end{cases}$$

$$v_{K+1}=v^{K+1}$$

$$Z=\begin{cases}v^{K+1} & K<n\\ 0 & K\geqslant n\end{cases}$$

记 n 年期定期保险的精算现值为 $A^1_{x:\overline{n}|}$，则

$$A^1_{x:\overline{n}|}=E[Z]=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k} \tag{2-18}$$

在上式两边同乘以 l_x，有

$$l_x A^1_{x:\overline{n}|}=l_x\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}d_{x+k} \tag{2-19}$$

上式最左边可以看成是保险人在卖出 l_x 份保险后收集到的保费，最右边则为保险公司卖出 l_x 份保险后，在接下来的 n 年内预期支付的保险利益的现值。

对于离散型单位保额的保险，因为满足 $(b_T)^2=b_T$，所以，矩规则成立。于是，现值随机变量的方差为

$$\mathrm{Var}(Z)={}^2A^1_{x:\overline{n}|}-(A^1_{x:\overline{n}|})^2 \tag{2-20}$$

其中，${}^2A^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\delta(k+1)}{}_kp_x\,q_{x+k}$。

另外，由

$$\begin{aligned}A^1_{x:\overline{n}|}&=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k}\\&=vq_x+\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k}\\&=vq_x+vp_x\sum_{k=0}^{n-1}v^{k}{}_{k-1}p_{x+1}q_{x+k}\\&=vq_x+vp_x\sum_{j=0}^{n-2}v^{j+1}{}_jp_{x+1}q_{x+1+j}\end{aligned}$$

有

$$A^1_{x:\overline{n}|}=vq_x+vp_xA^1_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$= A^{1}_{x:\overline{1}|} + vp_x A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} \qquad (2-21)$$

从而得到定期保险的一个递推公式，其中约定 $A^{1}_{x:\overline{0}|}=0$。这个递推关系式表明：一份 n 年期定期保险，可以拆成两份保险之和，它们分别是，一年期的定期保险和在一年后的 $n-1$ 年期定期保险，因为一年后的 $n-1$ 年期定期保险只有在被保险人生存的情况下才有意义，所以，其价值为一年后的 $A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}$在现在的精算现值。

由上述递推关系式，也可以得到一种由生命表直接计算定期保险的方法，即：n 年期定期保险的精算现值可以写成一系列的一年期保险的精算现值之和。

在式（2－21）第一个等号两边同乘以 $(1+i)l_x$，有

$$l_x A^{1}_{x:\overline{n}|}(1+i) = d_x + l_{x+1}A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$= l_x A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} + d_x(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}) \qquad (2-22)$$

上式第一个等号的左边可以看成是保险人在卖出 l_x 份保险后收集到的全部保费在时刻 1（即卖出保险 1 年后）的积累值，因为在 1 时还有 l_{x+1}个被保险人生存，所以保险公司应该有 l_{x+1}份 $n-1$ 年期的定期保险的负债，同时，因为在第一年死亡 d_x 人，保险公司在时刻 1 时需要向每个在第一年内死亡的人（或其受益人）支付 1 元保险利益，根据收支（含负债）相等的原则，第一个等号成立。

第二个等号是因为 $l_{x+1}=l_x-d_x$，等号右边的含义是：所有在 x 岁购买了 n 年期定期保险的 l_x 个人，在 1 年后都应该有一份 $n-1$ 年期的保险，同时对那些在这年内死亡的被保险人来说，他们还得到另外一笔金额为 $(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|})$ 的支付。因为 l_x 份保险预期将在 1 年后产生 d_x 份额外的金额为 $(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|})$ 的支付，所以平均每份保险的这种预期支付的金额为 $q_x(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|})$，我们称其为该 n 年期定期保险在第一年的年度花费。

由式（2－22），经过简单的数学处理，有

$$A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|} = iA^{1}_{x:\overline{n}|} - q_x(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|})$$

上式表明，$(x+1)$ 的 $n-1$ 年期定期保险与 (x) 的 n 年期定期保险的精算现值之差为 (x) 的 n 年期定期保险的精算现值在 1 年内产生的利息减去这一年该保险的年度花费。

由式（2－22），还可得到

$$v^{x+1}A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{x}A^{1}_{x:\overline{n}|} = -v^{x+1}q_x(1-A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|})$$

用 $x+1$ 替代上式中的 x，同时用 $n-1$ 替代上式中的 n，有

$$v^{x+2}A^{1}_{x+2:\overline{n-2}|} - v^{x+1}A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = -v^{x+2}q_{x+1}(1-A^{1}_{x+2:\overline{n-2}|})$$

……

最后，有

$$v^{x+n}A^{1}_{x+n:\overline{0}|} - v^{x+n-1}A^{1}_{x+n-1:\overline{1}|} = -v^{x+n}q_{x+n-1}(1-A^{1}_{x+n:\overline{0}|})$$

将上面各式相加，注意到 $A^{1}_{x+n:\overline{0}|}$ 为 0，所以有

$$-v^{x}A^{1}_{x:\overline{n}|}=-\sum_{k=1}^{n}v^{x+k}q_{x+k-1}(1-A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})$$

因此

$$A^{1}_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n}v^{k}q_{x+k-1}\ (1-A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})$$

这表明：保险的精算现值其实就是保险期限内各年度预期的年度花费的现值。

【例 2－9】 假设 $i=4\%$，利用示例生命表（2000－2003 非养老保险生命表 CL1），计算 20 岁被保险人的 1 000 单位保险利益的三年期定期死亡保险的精算现值。

解： 由

$$1\ 000A^{1}_{20:\overline{3}|}=1\ 000vq_{20}+1\ 000vp_{20}A^{1}_{21:\overline{2}|}$$

$$1\ 000A^{1}_{21:\overline{2}|}=1\ 000vq_{21}+1\ 000vp_{21}A^{1}_{22:\overline{1}|}$$

$$1\ 000A^{1}_{22:\overline{1}|}=1\ 000vq_{22}$$

由示例生命表，有

$$1\ 000q_{20}=0.621$$

$$p_{20}=1-q_{20}$$

$$1\ 000q_{21}=0.661$$

$$p_{21}=1-q_{21}$$

$$1\ 000q_{22}=0.692$$

$$v=1/1.04$$

所以有

$$1\ 000A^{1}_{22:\overline{1}|}=0.67$$

$$1\ 000A^{1}_{21:\overline{2}|}=1.27$$

$$1\ 000A^{1}_{20:\overline{3}|}=1.82$$

【例 2－10】 Z_1 为对（80）岁人的 10 年定期死亡保险的现值随机变量，Z_2 为对（81）岁人的 9 年定期死亡保险的现值随机变量，死亡给付均发生在死亡年末。已知：$q_{80}=0.1$，$i=0.04$，$E(Z_1)=0.5$，$\mathrm{Var}(Z_1)=0.2$，计算 $\mathrm{Var}(Z_2)$

解： ${}^{2}A^{1}_{80:\overline{10}|}=E\ (Z_1)^2+\mathrm{Var}(Z_1)\ =0.45$

$$A^{1}_{80:\overline{10}|}=vq_{80}+vp_{80}A^{1}_{81:\overline{9}|}$$

$$0.5=\frac{0.1}{1.04}+\frac{0.9A^{1}_{81:\overline{9}|}}{1.04}$$

$$A^{1}_{81:\overline{9}|}=\frac{0.42}{0.9}=0.46667$$

$$^{2}A^{1}_{80:\overline{10}|}=v^{2}q_{80}+v^{2}p_{80}{}^{2}A^{1}_{81:\overline{9}|}$$

$$0.45=\frac{0.1}{1.04^{2}}+\frac{0.9\times{}^{2}A^{1}_{81:\overline{9}|}}{1.04^{2}}$$

$$^{2}A^{1}_{81:\overline{9}|}=0.42969$$

$$\mathrm{Var}(Z_2)=0.42959-0.46667^{2}=0.21191$$

2. 终身寿险。注意到，如果令式（2－18）中 $n\to\infty$，那么 n 年期定期保险就变成了终身寿险，所以，终身寿险的精算现值为

$$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_{k}p_x\,q_{x+k} \tag{2-23}$$

上式两边同时乘以 l_x，得

$$l_x A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}d_{x+k} \tag{2-24}$$

上式的意义非常明显：左边可看成是在保单发行时，所有的被保险人 (x) 聚集的资金（相当于保险公司为发行全部保单而建立的保险基金），右边则是预期的全部死亡赔付在保单发行时的现值。

【例 2－11】 假设 $Pr(K(x)=k)=0.06(0.94)^k$，$k=0,1,2,\cdots$ 利率为常数 4%，求：

(1) A_x

(2) $\mathrm{Var}(v^{K+1})$

(3) $Pr(v^{K+1}>A_x)$

解：(1)
$$\begin{aligned}A_x&=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_{k}p_x\,q_{x+k}\\&=0.06\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(k+1)\delta}(0.94)^k\\&=\frac{0.06e^{-\delta}}{1-0.94e^{-\delta}}\\&=0.5952\end{aligned}$$

以上计算用到 $e^{\delta}=1+i$。

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(v^{K+1})&={}^{2}A_x-(A_x)^2\\&=\frac{0.06e^{-2\delta}}{1-0.94e^{-2\delta}}-(0.5952)^2\\&=0.0645\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}Pr(v^{K+1}>A_x)&=Pr(K+1<\ln(A_x)/(-\delta))\\&=\sum_{k=0}^{[s]}Pr\quad(K=k)\end{aligned}$$

其中 $[s]=[\ln(A_x)/(-\delta)-1]=12$，所以

$$Pr(v^{K+1}>A_x)=\sum_{k=0}^{12}0.06(0.94)^k$$

$$= 1 - (0.94)^{13}$$
$$= 0.5526$$

【例 2－12】　有 500 位 40 岁的人共同出资建立一个基金。该基金在每个成员死亡的年末支付 1 000 元给死者的指定收益人。他们按照示例生命表和 4% 的利率来计算终身寿险的精算现值，并按计算结果确定他们存入基金的金额。

前 5 年这群人的实际死亡情况是：第一年死亡 2 人，第二年死亡 2 人，第三年死亡 3 人，第四年死亡 3 人，第 5 年死亡 3 人。基金的实际投资收益情况是第一年的利率为 5%，第二和第三年均为 6%，第四和第五年为 7%。求：

（1）在第五年末，基金预期的余额；

（2）在第五年末，基金实际的余额。

解：（1）基金的预期金额。根据示例生命表和 4% 的利率计算出的终身寿险的精算现值为

$$1\ 000A_{40} = 245.29$$

所以，在第五年末，基金预期金额为

$$500 \times (l_{45}/l_{40}) \times 1\ 000A_{45} = 143\ 900.249$$

（2）基金的实际金额。首先，在 0 时收集到的基金总量为 $B_0 = 500 \times 245.29 = 122\ 645.33$，这些钱到 1 时的积累值为 $B_0(1+i_1) = 122\ 645.33 \times 1.05 = 12\ 877.593$，此时因为第一年出现 2 个死亡，所以需要支付 2 000 元的保险利益，因此，在支付保险利益后，时刻 1 时的基金余额为 $B_1 = 1\ 287\ 777.593 - 2\ 000 = 126\ 777.593$；

类似地，在支付保险利益后，2 时的基金余额为

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1(1+i_2) - 2\ 000 \\ &= 126\ 777.593 \times 1.06 - 2\ 000 \\ &= 132\ 384.249 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} B_3 &= B_2(1+i_3) - 3\ 000 \\ &= 137\ 327.3035 \\ B_4 &= B_3(1+i_4) - 3\ 000 \\ &= 143\ 940.215 \\ B_5 &= B_4(1+i_5) - 3\ 000 \\ &= 151\ 016.030 \end{aligned}$$

计算结果表明：基金预期金额与实际金额相差 －7 115.78 元，也就是说，实际结果不如预期的理想。造成实际结果不如预期理想的原因是在第一年的实际投资收益率没有达到预期的 6%，而是 5%！另外，从死亡人数方面看，实际的死亡情况比预期的还要好，因为各年实际出现的死亡人数都比预期的要少。由此也可以看出，利率假设在寿险产品定价中的重要性！

前面我们对定期寿险的精算现值推导了递推的关系式，注意到终身寿险是定期寿险的极限形式，所以可以在前面的基础上，建立类似的递推关系式。事实上，令式（2－21）中 $n\to\infty$，有

$$\begin{aligned}A_x &= vq_x + vp_x A_{x+1}\\ &= A^1_{x:\overline{1}|} + {}_vp_x A_{x+1}\end{aligned} \quad (2-25)$$

类似地，有

$$\begin{aligned}l_x(1+i)A_x &= d_x + l_{x+1}A_{x+1}\\ &= l_x A_{x+1} + d_x(1-A_{x+1})\end{aligned} \quad (2-26)$$

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1-A_{x+1})$$

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k q_{x+k-1}(1-A_{x+k})$$

其中 $q_x(1-A_{x+1})$ 为终身寿险第一年的年度花费。

另外，由式（2－23），我们有

$$\begin{aligned}A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= A^1_{x:\overline{n}|} + v^n\,{}_np_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{x+n}\,q_{x+k+n}\\ &= A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\,A_{x+n}\end{aligned} \quad (2-27)$$

上式给出了终身寿险的一种更一般的递推关系：终身寿险等于 n 年期定期寿险加上一份 n 年后的终身寿险的精算现值。

3. 两全保险。接下来考虑 n 年期两全保险。这种保险是 n 年期定期保险和 n 年期生存保险的组合，因此，相应的函数为：

$$b_{K+1} = 1$$

及

$$v_{K+1} = \begin{cases} v^{K+1} & K\leqslant n-1\\ v^n & K\geqslant n\end{cases}$$

于是

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K\leqslant n-1\\ v^n & K\geqslant n\end{cases}$$

其精算现值为

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} + v^n\,{}_np_x \quad (2-28)$$

类似于连续型保险的情况，我们有

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

对这种保险现值随机变量的方差，也可以类似地讨论。

【例 2－13】 已知某（35）的寿命服从 de Moivre 律，$\omega=100$，$i=$

0.05，Z 为对其发行的20年定期两全寿险的现值随机变量，计算 Z 的期望和方差。

解：令定期死亡保险的现值随机变量为 Z_1，定期生存保险的现值变量为 Z_2

由于该生命服从 de Moivre 律，${}_{k|}q_{35}=1/65$ 为常数

$$E(Z_1)=\sum_{k=0}^{19}v^{k+1}{}_kp_{35}q_{35+k}$$

$$=\frac{a_{\overline{20}|i=0.05}}{65}$$

$$=\frac{1}{65}\frac{1-(1/1.05)^{20}}{0.05}$$

$$=0.19173$$

$$E(Z_1^2)=\frac{1}{65}\frac{1-(1/1.05)^{40}}{1.05^2-1}$$

$$=0.12877$$

$$E(Z_2)=\frac{45}{65}\frac{1}{1.05^{20}}=0.26092$$

$$E(Z_2^2)=\frac{45}{65}\frac{1}{1.05^{40}}=0.09834$$

所以两全保险

$$E(Z)=0.19173+0.26092=0.45265$$

$$E(Z^2)=0.12877+0.09834=0.22711$$

$$\mathrm{Var}(Z)=0.02222$$

注意，生存保险没有即刻支付和年度末支付之分！

4. **延期保险**。对于离散型 m 年延期保险，其保额函数、贴现函数和现值函数分别为

$$b_{K+1}=\begin{cases}1 & K\geqslant m\\0 & K\leqslant m-1\end{cases}$$

及

$$v_{K+1}=v^{K+1}$$

$$Z=\begin{cases}v^{K+1} & K\geqslant m\\0 & K\leqslant m-1\end{cases}$$

相应的精算现值记为

$$\begin{aligned}{}_{m|}A_x&=\sum_{k=m}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k}\\&={}_mE_x\,A_{x+m}\end{aligned}\qquad(2-29)$$

将上式代入式（2－27）中，有

$$A_x=A^{1}_{x:\overline{n}|}+{}_nE_x\,A_{x+n}$$

$$= A_{x:\overline{n}|}^{1} + {}_{n|}A_x$$

即，终身保险可以看成是定期保险和相应的延期保险之和。

【例 2-14】 假设利率 $i=4\%$，利用示例生命表，求：

（1）A_{35}；（2）$A_{35:\overline{30}|}^{1}$；（3）$A_{35:\overline{30}|}$；（4）${}_{30|}A_{35}$。

解：（1）查表得：

$$A_{35} = 206.3146593/1\ 000$$
$$= 0.206315$$

（2）
$$A_{35:\overline{30}|}^{1} = A_{35} - {}_{30}E_{35}\ A_{65}$$
$$= A_{35} \quad {}_{30}p_{35}\ v^{30} A_{65}$$
$$= 0.206315 - (979\ 738/984\ 635) \times (543.271/1\ 000)/(1+4\%)^{30}$$
$$= 0.0396$$

（3）
$$A_{35:\overline{30}|} = A_{35:\overline{30}|}^{1} + A_{35:\overline{30}|}^{\ \ 1}$$
$$= A_{35:\overline{30}|}^{1} + {}_{30}p_{35} v^{30}$$
$$= 0.0396 + (979\ 738/984\ 635)/(1+4\%)^{30}$$
$$= 0.3464$$

（4）
$${}_{30|}A_{35} = A_{35} - A_{35:\overline{30}|}^{1}$$
$$= 0.2063 - 0.0396$$
$$= 0.1667$$

上面我们讨论了各种年度离散保险，类似地，我们还可以讨论在死亡所在的 $1/m$ 年度末支付的保险。这种支付模式可能更有实际意义，因为在人寿保险实务中，保险利益的支付并没有必要等到年末，而是在保险事故发生后比较短的时间内支付，因此，在死亡的 $1/m$ 年度末支付的保险可能更与实际情况接近。这种保险的讨论与上述讨论完全类似，我们以终身寿险为例进行讨论。

对在死亡的 $1/m$ 年度末支付的终身寿险，有

$$b_{(mK+J+1)/m} = 1$$

及

$$v_{(mK+J+1)/m} = v^{(mK+J+1)/m}$$

于是

$$Z = v^{(mK+J+1)/m}$$

其中，$J=[m(T-K)]=[mS]$，是用来说明死亡所在的 $1/m$ 年的序数，即：死亡出现在第 $K+1$ 年的第 $J+1$ 个 $1/m$ 年内。显然，J 的取值范围为 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$。

这种终身寿险的精算现值记为 $A_x^{(m)}$，我们有

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(mk+j+1)/m} Pr(k+j/m \leqslant T(x) < k+(j+1)/m)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(mk+j+1)/m}\left[{}_{k+j/m}p_x - {}_{k+(j+1)/m}p_x\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(mk+j+1)/m}\ {}_kp_x\left[{}_{j/m}p_{x+k} - {}_{(j+1)/m}p_{x+k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(mk+j+1)/m}\ {}_kp_x\left[{}_{(j+1)/m}q_{x+k} - {}_{j/m}p_{x+k}\right]$$

2.2.2　变额保险

1. 增额终身寿险。在第 $k+1$ 年末提供 $k+1$ 单位死亡保额的年度单增终身寿险，其保额函数、贴现函数和现值随机变量分别为：

$$b_{K+1} = K+1$$

$$v_{K+1} = v^{K+1}$$

$$Z = (K+1)v^{K+1}$$

相应的精算现值记为 $(IA)_x$，且

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \tag{2-30}$$

如果上述保险有期限 n，即

$$b_{K+1} = \begin{cases} K+1 & K \leqslant n-1 \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

$$v_{K+1} = v^{K+1}$$

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1} & K \leqslant n-1 \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

那么上述保险变为 n 年期定期单增保险，其精算现值为：

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \tag{2-31}$$

注意到式（2-31）的右边为式（2-30）右边的前 n 项。

2. 减额定期寿险。在 n 年内，在第 $k+1$ 年末提供 $n-k$ 单位死亡保额的年度减少定期寿险，其保额和贴现函数和现值随机变量为：

$$b_{K+1} = \begin{cases} n-K & K \leqslant n-1 \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

及

$$v_{K+1} = v^{K+1}$$

即

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1} & K \leqslant n-1 \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

这种保险的精算现值记为 $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$。

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(v^k\ {}_kp_x)(vq_{x+k})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\ {}_{k|}A^1_{x:\overline{1}|}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} (1) v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j-1} (1) v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}$$

图 2－1 给出了 8 年定期保险的保险利益 b_{k+1}。图中每一个单位方框区域表示一个延期的一年期保险，同一高度的所有的一年期保险之和为一个定期保险，期限为该高度一年期保险的数量，从图中可以发现，这种单减保险可以看成是不同期限的定期保险之和，正如上面公式中最后一个等号所表示的那样；另外，如果将由单位方框表示的一年期保险按照垂直方向相加，则同一垂直方向的单位保险之和为一延期的具有递减保险利益的一年期保险，也即为上面公式中第三个等号所表示的。

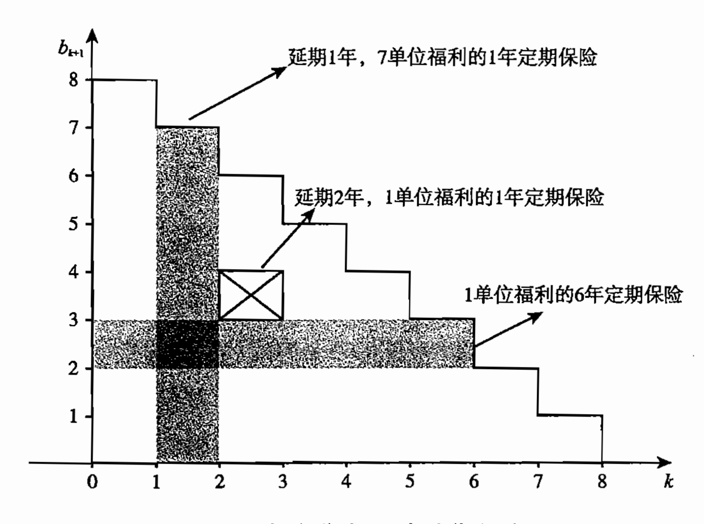


图 2－1　年度递减，8 年定期保险图

以下为几种主要的离散型保险的精算现值公式：

1. 终身寿险：

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

2. n 年期定期保险：

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

3. n 年期生存保险：

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_nE_x = v^n\ {}_np_x$$

4. n 年期两全保险：

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} + {}_nE_x$$

5. 延期 m 年、$n(m<n)$ 年期定期保险，

$${}_{m|}A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$$

6. n 年期年度递增定期保险：

$$(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ {}_{k|}A_{x:\overline{1}|}^1$$

7. n 年期年度递减定期保险：

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ {}_{k|}A_{x:\overline{1}|}^1$$

8. 一年增加 m 次的 n 年期定期寿险：

$$(I^{(m)}A)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)v^{k+(j+1)/m}\ {}_{k+j/m}p_x\ {}_{1/m}q_{x+k+j/m}$$

【例 2－15】 已知 $(IA)_{40}=6.4$，$(IA)_{50}=4.5$，$A_{40:\overline{10}|}^{\ \ 1}=0.6$，$(IA)_{40:\overline{10}|}^1=2.5$。求：$A_{50}$

解： $(IA)_{40}=(IA)_{40:\overline{10}|}^1+A_{40:\overline{10}|}^{\ \ 1}\left[(IA)_{40}+10A_{50}\right]$

$$6.4=2.5+0.6(4.5+10A_{50})$$

因此 $A_{50}=0.2$

§2.3 连续型保险与离散型保险之间的关系

本节我们讨论连续型与离散型保险之间的关系，首先，由

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \\ &= \int_0^1 v^t\ {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt + \int_1^\infty v^t\ {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt \\ &= \int_0^1 v^t\ {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt + v\int_0^\infty v^s\ {}_{s+1}p_x\,\mu_x(s+1)\,dt \\ &= \int_0^1 v^t\ {}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt + vp_x\bar{A}_{x+1} \qquad (2-32)\end{aligned}$$

在均匀分布假设下，由于

$$ {}_tp_x\ \mu_y(t)=q_y \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\ y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots $$

所以有

$$ \begin{aligned} \bar{A}_x &= q_x\int_0^1 v^t dt + vp_x\bar{A}_{x+1} \\ &= \frac{i}{\delta}vq_x + vp_x\bar{A}_{x+1} \end{aligned} \qquad (2-33) $$

因为

$$ A_x = vq_x + v\,p_x\,A_{x+1} $$

并注意到

$$ \begin{aligned} \bar{A}_\omega &= iA_\omega/\delta \\ &=0 \end{aligned} $$

所以有

$$ \bar{A}_x = iA_x/\delta \qquad (2-34) $$

另外，由

$$ \begin{aligned} \bar{A}_x &= E[v^T] \\ &= E[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] \\ &= E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] \end{aligned} \qquad (2-35) $$

在均匀分布假设下，由于

$$ E[(1+i)^{1-S}] = i/\delta $$

所以也有

$$ \bar{A}_x = iA_x/\delta $$

【例 2－16】 在均匀分布假设下，证明：

$$ A_x^{(m)} = iA_x/i^{(m)} \qquad (2-36) $$

证明： 因为在均匀分布假设下

$$ \begin{aligned} A_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(mk+j+1)/m}\ {}_kp_x[\ {}_{(j+1)/m}q_{x+k} - {}_{j/m}q_{x+k}] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\sum_{j=0}^{m-1} v^{(j+1)/m-1} \\ &= iA_x/i^{(m)} \end{aligned} $$

对于连续型 n 年期年度单增保险，这种保险的现值随机变量为：

$$ \begin{aligned} Z &= \begin{cases} (K+1)v^T & T<n \\ 0 & T\geqslant n \end{cases} \\ &= \begin{cases} (K+1)v^{K+1}v^{S-1} & T<n \\ 0 & T\geqslant n \end{cases} \end{aligned} $$

而离散型 n 年期年度单增保险的现值随机变量为：

$$W=\begin{cases}(K+1)v^{K+1} & K\leqslant n-1\\ 0 & K\geqslant n\end{cases}$$

于是

$$Z=W(1+i)^{1-S}$$

及

$$E[Z]=E[W(1+i)^{1-S}]$$

因为 W 只是 K 的函数，且 $K+1$ 与 $1-S$ 独立，所以

$$\begin{aligned}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}&=E[Z]\\&=E[W]E[(1+i)^{1-S}]\\&=(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}\frac{i}{\delta}\end{aligned}\tag{2-37}$$

一般地，对于连续型保险，其现值随机变量为 $Z=b_Tv_T$，其中，如果 $v_T=v^T$ 且 b_T 仅为 K 的函数，不妨设 $b_T=b^{*}_{K+1}$，则

$$\begin{aligned}Z&=b^{*}_{K+1}v^{T}\\&=b^{*}_{K+1}v^{K+1}(1+i)^{1-s}\end{aligned}$$

从而

$$E[Z]=E[b^{*}_{K+1}v^{K+1}(1+i)^{1-s}]\tag{2-38}$$

因为在均匀分布假设下，K 和 S 独立，并且 $1-S$ 服从均匀分布，所以

$$\begin{aligned}E[Z]&=E[b^{*}_{K+1}v^{K+1}]E[(1+i)^{1-s}]\\&=E[b^{*}_{K+1}v^{K+1}]i/\delta\end{aligned}\tag{2-39}$$

上式表明，在连续型与离散型保险之间有一个一般的关系，即两种保险之间有常数倍数关系，其条件除了均匀分布假设外，还有就是 $v_T=v^T$ 及在同一年度的保险利益是个常数。

例如，下列保险在均匀分布假设下，相应精算现值之间有如下的关系：

1. 终身寿险：

$$\bar{A}_x=\frac{i}{\delta}A_x$$

2. n 年期定期保险：

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

3. 延期 m 年的 n（$m<n$）年期定期保险：

$${}_{m|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}{}_{m|}A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

4. n 年期年度递增定期保险：

$$(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$$

5. n 年期年度递减定期保险：

$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$$

而对于两全保险，则有

6. n 年期两全保险：

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}A^{1}_{x:\overline{n}|}+{}_{n}E_{x}$$

【例 2-17】 对（45）男性发行的 2 年期连续型两全保险，死亡保额为 1 000 元。利用示例生命表、年内均匀分布假设和 $i=5\%$，计算该保险的精算现值。

解： 由生命表 CL(2000-2003) 可知

$q_{45}=0.002413$， $q_{46}=0.002595$

${}_{1|}q_{45}=(1-0.002413)(0.002595)=0.002589$

${}_{2|}p_{45}=1-q_{45}-{}_{1|}q_{45}=0.9950$

$$1\ 000A^{1}_{45:\overline{2}|}=\frac{2.413}{1.05}+\frac{2.589}{1.05^{2}}=4.6464$$

$$1\ 000\bar{A}_{45:\overline{2}|}^{\ \ \ 1}=\frac{995}{1.05^{2}}=902.4943$$

$$1\ 000A_{45:\overline{2}|}=\frac{i}{\delta}1\ 000A^{1}_{45:\overline{2}|}+1\ 000A_{45:\overline{2}|}^{\ \ \ 1}$$

$$=\left(\frac{0.05}{\ln 1.05}\right)4.6464+902.4943=907.26$$

【例 2-18】 对于（50）的连续型 5 年期年度递减保险，其第一年的死亡保额为 5 000，第二年为 4 000，如此等等，利用示例生命表（2000—2003 CL1）、均匀分布假设和 $i=4\%$，计算该保险的精算现值。

解： 该保险的精算现值为：

$$1\ 000(D\bar{A})^{1}_{50:\overline{5}|}=1\ 000\ \frac{i}{\delta}(DA)^{1}_{50:\overline{5}|}$$

$$(DA)^{1}_{50:\overline{5}|}=\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}{}_{k}p_{50}q_{50+k}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}d_{50+k}}{l_{50}}$$

$$=0.053636$$

$$1\ 000(D\bar{A})^{1}_{50:\overline{5}|}=1\ 000\ \frac{i}{\delta}(DA)^{1}_{50:\overline{5}|}$$

$$=1.0199\times 53.636$$

$$=54.703$$

【例 2-19】 求证：$(I^{(m)}\bar{A})_{x}=\dfrac{i^{(m)}}{\delta}\ (I^{(m)}A)_{x}$

证明：$(I^{(m)}A)_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)v^{k+(j+1)/m}\ {}_{k+j/m}p_x\ {}_{1/m}q_{x+k+j/m}$

因为在均匀分布假设下，

$$ {}_{k+j/m}p_x\ {}_{1/m}q_{x+k+j/m} = {}_kp_x\ {}_{j/m}p_{x+k}\ {}_{1/m}q_{x+k+j/m} = \frac{{}_kp_x\ q_{x+k}}{m} $$

所以

$$ (I^{(m)}A)_x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{{}_kp_x\ q_{x+k}}{m}v^k\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)v^{(j+1)/m} $$

又因为

$$ \begin{aligned} (I^{(m)}\bar{A})_x &= \int_0^{\infty}([tm+1]/m)v^t\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)\int_{j/m}^{(j+1)/m}v^{k+t}\ {}_{k+t}p_x\,\mu(x+k+t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_x\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)\int_{j/m}^{(j+1)/m}v^t\ {}_tp_{x+k}\,\mu(x+k+t)\,dt \end{aligned} $$

由于在均匀分布假设下，有

$$ {}_tp_{x+k}\,\mu(x+k+t) = q_{x+k} $$

所以

$$ \begin{aligned} (I^{(m)}\bar{A})_x &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_x\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)\int_{j/m}^{(j+1)/m}v^t q_{x+k}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_x\ q_{x+k}\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)v^{(j+1)/m}\frac{[(1+i)^{1/m}-1]}{\delta} \\ &= \frac{i^{(m)}}{m\delta}\sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_x\ q_{x+k}\sum_{j=0}^{m-1}\left(k+\frac{j+1}{m}\right)v^{(j+1)/m} \\ &= \frac{i^{(m)}}{\delta}(I^{(m)}A)_x \end{aligned} $$

§2.4　换 算 函 数

由上述讨论可以看出，对于各种保险的精算现值——也即趸缴净保费——的计算，我们可以在确定利率下，编制如附表的终身寿险精算现值表，然后可以得到各种离散型人寿保险的精算现值，如果所需求的是连续型保险的精算现值，则在年内均匀分布假设下，利用 §2.3 的讨论，得到连续型保险的精算现值。

实务中，还有一种常用的计算人寿保险趸缴净保费的方法。这种方法与上述方法类似，只不过不是事先编制终身寿险趸缴净保费表，而是编制一种所谓的换算函数表。

首先，注意到在（2－24）

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k}$$

右边求和项中，每一项都是经过的时间长度和到达年龄的函数，当利率为常数时，我们可以在（2－24）两边同时乘以 v^x，这样，右边的各项均可以表示为到达年龄的函数，即

$$v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k}$$

由此，我们定义换算函数如下：

$$D_x = v^x l_x \tag{2-40}$$

$$C_x = v^{x+1} d_x = D_x v^x q_x \tag{2-41}$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} \tag{2-42}$$

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} \tag{2-43}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{x+k} \tag{2-44}$$

$$S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k} \tag{2-45}$$

由上述定义，我们有

1. 终身寿险精算现值：

$$A_x = M_x / D_x \tag{2-46}$$

2. 定期寿险精算现值：

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = (M_x - M_{x+n}) / D_x \tag{2-47}$$

3. 生存保险精算现值：

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = D_{x+n} / D_x \tag{2-48}$$

4. 两全保险精算现值：

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ &= (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) / D_x \end{aligned} \tag{2-49}$$

5. 延期保险精算现值：

$$_{m|n}A_x = (M_{x+m} - M_{x+m+n}) / D_x \tag{2-50}$$

6. n 年期年度递增定期寿险精算现值：

$$\begin{aligned} (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1) v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (M_{x+k} - M_{x+n})}{D_x} \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x} \end{aligned} \tag{2-51}$$

7. n 年期年度递减定期寿险精算现值：

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{nM_x-\sum_{y=x+1}^{x+n}M_y}{D_x}=\frac{nM_x-R_{x+1}-R_{x+n+1}}{D_x} \tag{2-52}$$

也可以针对连续型保险的趸缴净保费来定义换算函数，如

$$\bar{C}_x=\int_0^1 v^{x+t}l_{x+t}\mu_{x+t}dt=\int_0^1 D_{x+t}\mu_{x+t}dt \tag{2-53}$$

$$\bar{M}_x=\sum_{y=x}^{\infty}\bar{C}_y=\int_x^{\infty}D_y\mu_y dy \tag{2-54}$$

$$\bar{R}_x=\sum_{y=x}^{\infty}\bar{M}_y \tag{2-55}$$

【例 2-20】 对于一份发行给（50）的十年期连续型保单，如果被保险人在第一年内死亡，则支付死亡保额 10 万元，如果被保险人在第二年死亡，则支付死亡保额 9 万元，如此类推。

利用换算函数表（根据 2000－2003 CL1 得到），及年内均匀分布假设，假设利率为 4%，计算该保险的精算现值。

解： $(D\bar{A})_{50:\overline{10}|}^{1}=\frac{i}{\delta}(DA)_{50:\overline{10}|}^{1}$

$$(DA)_{50:\overline{10}|}^{1}=\frac{10M_{50}-\sum_{y=51}^{60}M_y}{D_{50}}=\frac{10M_{50}-R_{51}+R_{61}}{D_{50}}$$

$$=(10\times 45\ 886.06-1\ 099\ 729.35+669\ 034.22)/133\ 654.42$$

$$=0.210734$$

$(D\bar{A})_{50:\overline{10}|}^{1}=4\%\times 0.210734/\ln(1.040)=0.214921$（万元）

习　题

1. 假设 $l_x=103-x$，$(0\leqslant x\leqslant 103)$，利息力 $\delta=0.06$，计算 $\bar{A}_{45:\overline{20}|}$。

2. 给定死亡服从 de Moivre 律，极限年龄 $\omega=100$，利息率 $\delta=0.06$，计算 $\bar{A}_{40:\overline{10}|}^{1}$。

3. 设 Z 为（50）的连续终身寿险的现值随机变量，已知死亡服从 de Moivre 律且极限年龄 $\omega=100$，利率 $i=0.01$，给付额 $b_t=1\ 000-0.1t^2$，计算 $E(Z)$。

4. 已知未来寿命 T 的密度函数为 $g(t)=\begin{cases}1/75, & 0<t<75\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，利息力 $\delta=0.05$，Z 为死亡后立即给付保额为 1 的保险的现值随机变量，求 $\mathrm{Var}(Z)$。

5. 某（x）三年期定期保险，Z 为现值随机变量，$q_{x+k}=0.02(k+1)$，死亡年末的给付如下表。

k	b_{k+1}
0	300 000
1	350 000
2	400 000

$i=0.06$，计算 $E(Z)$。

6. 已知如下死亡信息：

x	l_x
40	11 000
41	10 000
42	8 500
43	6 500
44	4 000

假设实际利率被设定如下：

第 n 年	利率（%）
1	6
2	7
3	8
4+	9

计算对（41）的3年期保额为1的定期寿险的净保费，死亡给付发生在死亡年末。

7. 现有选择终极生命表如下：

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	78 900	77 200	75 100	62
61	76 400	74 700	72 500	63
62	73 800	72 000	69 800	64

对（60）岁人两年期保额为1的定期寿险，死亡假设服从上表，给付发生在死亡年末，Z 为该保险的现值随机变量，$i=0.05$，计算 $\mathrm{Var}(Z)$。

8. 已知 $i=0.06$，$\mu_x(t)=\ln 1.02$，计算 $A_x^{(4)}$。

9. （35）的10年延期终身寿险，保额为1，死亡发生时给付，$\delta=0.1$，$\mu=0.06$，Z 为该保险的现值随机变量，计算 Z 的90%分位数。

10. 已知死亡力为常数，$\delta=0.06$，${}^2\bar{A}_x=0.25$，计算 $(\bar{I}\bar{A})_x$。

11. 关于（50）的 30 年期保额为 1 的死亡即付定期保险，死亡服从 de Moivre 率，$\omega=100$，$\delta=0.04$，计算现值随机变量的 60% 分位数。

12. 化简$\dfrac{(IA)_x-A^1_{x:\overline{1}|}}{(IA)_{x+1}+A_{x+1}}$。

13. 已知：$(IA)_x=13.00$，　$(IA)_{x+5}=15.25$，$A_{x+5}=0.4$，$A_{x:\overline{5}|}=0.76$，${}_5p_x=0.96$，$i=0.05$，计算 $(DA)^1_{x:\overline{5}|}$。

14. （40）购买两份保单，每份保单的趸缴净保费为 100。其中一份保单是离散型 20 年期逐年递增保险，另一份为离散型 20 年期逐年递减的保险。已知：$(IA)_{40}=4.1736$，${}_{20|}(IA)_{40}=1.4865$，${}_{20|}A_{40}=0.05699$，$A_{40}=0.1614$，计算递增保险的给付额小于递减保险的年数。

15. Z_1 为 10 年期死亡时立即给付保险的给付现值，Z_2 为 10 年期延期保险的给付现值，Z_3 为终身寿险的给付现值，假设死亡后立即给付。已知三种保险保额都为 1，$\mu_x(t)=0.01$，$0<t\leqslant10$，$\delta=0.04$，$E(Z_2)=0.35$，$\mathrm{Var}(Z_2)=0.23$，计算 $\mathrm{Var}(Z_3)$。

16. 某（40）岁人的 40 年期保额年度递减的定期寿险，死亡时刻给付，已知死亡服从 de Moivre 律，$\omega=100$，$\delta=0.05$，计算该保险现值随机变量的 60% 分位数。

17. Z 为某 60 年连续递增保险的精算现值随机变量，死亡发生时给付。已知 $\mu_x(t)=0.02$，$\delta=0.05$，计算 Z 的最大值。

18. 为（25）的人开具的终身寿险提供如下给付：

（1）死亡给付，在每个死亡发生年的年末给付，在 25～65 岁之间死亡给付额为 20 000，65 岁之后的死亡给付为 10 000；

（2）生存给付如果被保险人 65 岁时仍生存，则其保费会被返还，已知 $A_{25}=0.1$，$A_{65}=0.2$，${}_{40}p_{25}=0.8$，$v^{40}=0.2$。

计算该保险的净保费。

19. $(\bar{I}\bar{A})_x=15.4$，$(IA)_x=15.2$，$i=0.05$，死亡在整数年龄内服从均匀分布。计算 $\bar{A}_x$。

20. 已知：$A^1_{45:\overline{10}|}=0.15$，$q_{45}=0.01$，$v=0.95$，现对于（45）存在额外风险，使得 $q_{45}=0.02$，其他年度死亡概率不变，求新假设下的 $A^1_{45:\overline{10}|}$。

21. Z 为某 30 年保额为 1 的定期寿险的精算现值，死亡发生时给付。已知：$\mu_x(t)=\begin{cases}0.01, & t<10\\ 0.02, & t\geqslant10\end{cases}$，$\delta=0.04$，计算 $Pr(Z>0.25)$。

22. 已知如下选择—终极生命表：

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
60	0.09	0.11	0.13	0.15	63
61	0.10	0.12	0.14	0.16	64
62	0.11	0.13	0.15	0.17	65
63	0.12	0.14	0.16	0.18	66
64	0.13	0.15	0.17	0.19	67

$i=0.03$，计算${}_{2|2}A_{[60]}$。

23. 已知死亡率如下表：

概率	不吸烟	吸烟
q_{49}	0.01	0.02
q_{50}	0.02	0.03

$i=0.06$，两年期保额为 1 000 的定期保险，死亡给付在死亡年末，已知该保险承保了 100 个 49 岁的人，其中吸烟的占 20%。利用正态近似，计算为保证不亏损的概率大于 95% 的初始基金额。

24. 已知 $i=0.02$，$p_{50}=0.98$，$A_{51}-A_{50}=0.004$，${}^2A_{51}-{}^2A_{50}=0.005$，以 Z 表示给（51）岁的人的保额为 1 的终身寿险，给付发生在死亡年末，计算 $\mathrm{Var}(Z)$。

第三章　生命年金的精算现值

学习目标

- □ 掌解生命年金的概念
- □ 掌握连续给付、离散给付、年付多次生命年金精算现值的计算方法
- □ 掌握人寿保险趸缴净保费与生命年金精算现值的关系
- □ 了解完全期末年金与可分配期初年金
- □ 了解生命年金的实际意义及递推公式
- □ 熟悉利用换算函数计算生命年金的精算现值

所谓年金，指的是一系列有相同时间间隔的支付。按照其支付次数或支付期长度是否事先确定，年金可分为确定年金及不确定年金。确定年金在金融业与一般的工商业中应用广泛，同时，民间的租金、贷款等也往往应用确定年金的方式；不确定年金的支付次数或支付期不确定，实务中，这种不确定往往表现为某种与年金受领人或年金支付人有关的不确定事件，如年金受领人的生、老、病、死等。因此，不确定年金往往又特指生命年金，因为其中的不确定往往与生命的不确定有关。当然，理论上，我们可以将其他的不确定引入进来，不过实务中最重要的不确定年金就是生命年金。

前面通过不同形式的人寿保险讨论了由死亡决定的或有支付。这一章则通过不同形式的生命年金来讨论由生存决定的或有支付。生命年金是指在（年金受领人或年金支付人）生存的条件下的一系列连续的、或在相同时间间隔（如月度、季度、年度）上的支付。它可能是定期的、也可能是终身的。支付可以是立即开始的，也可以是延迟一段时期后再开始的。支付可能发生在支付区间的起点，即年金为期初付生命年金；也可以是在各个支付区间终点进行支付的期末付生命年金。

实务中两类最重要的生命年金分别是由被保险人支付的保费和支付给年金受领人的退休或养老金。保险公司在卖出寿险保单时，往往要求被保险人在一定期限内按照不同的规则支付保费。有时是一次性的支付，即所谓的趸缴保费，有时是以年金的方式，在一定期限内按期支付，当然，被保险人活着是其支付保费的最起码的条件，所以这种支付是一项生命年金；另外，对于退休（养老）金，是指年金受领人在满足一定条件的情况下，到达一定年龄后，开始从某种特殊机构里按月领取一定的金额，这种领取的一个必要条件也是受领人生存，所以也形成一项生命年金。

我们假定读者已熟悉确定年金的有关内容，生命年金以确定年金为基础，同时引入一个支付条件——（年金的支付者或受领者）生存。

这一章的一些记号和方法类似于前一章。

§3.1 连续型生命年金

在上一章，我们讨论了连续型和离散型的人寿保险模型，即在死亡时刻支付的及在死亡年度末支付的保险模型，本章对生命年金的讨论，同样按连续型和离散型分别进行。

连续型生命年金是指在年金受领人（x）生存的条件下，在一定的期限内，连续收到/进行支付的年金。

3.1.1 终身生命年金

首先考虑年支付率为常数 1，年金受领人（x）的整个未来生存期间为支付期的生命年金。这种年金为连续型终身生命年金。显然，连续型终身生命年金给年金受领人提供连续的支付直到其死亡。

记这种年金的现值随机变量为 Y，则

$$Y=\bar{a}_{\overline{T}|}$$

其中，T 为（x）的未来生命时间长度随机变量。于是

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=Pr(Y\leqslant y)\\&=Pr(\bar{a}_T\leqslant y)\\&=Pr(1-v^T\leqslant y\delta)=Pr(v^T\geqslant 1-y\delta)\\&=Pr[T\leqslant -\ln(1-y\delta)/\delta]\\&=F_T[-\ln(1-y\delta)/\delta]\qquad(0<y<1/\delta)\qquad(3-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=dF_Y(y)/dy\\&=d\,F_T[-\ln(1-y\delta)/\delta]/dy\\&=\frac{f_T([-\ln(1-y\delta)]/\delta)}{1-y\delta}\qquad(0<y<1/\delta)\qquad(3-2)\end{aligned}$$

记（x）的连续型终身生命年金的精算现值为 $\bar{a}_x$，即

$$\begin{aligned}\bar{a}_x&=E[Y]\\&=\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)dt\\&=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x dt\\&=\int_0^\infty {}_tE_x dt\qquad(3-3)\end{aligned}$$

事实上，从支付的角度看，可以有：

$$\text{生命年金的精算现值} = \int_0^\infty v^t Pr\{\text{在 } t \text{ 时进行支付}\} \times (\text{在 } t \text{ 时的支付率})dt$$

因为 (x) 的连续型终身生命年金在 t 时的支付率为 1，在 t 时进行支付的概率为${}_tp_x$，所以，

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x dt \\ &= \int_0^\infty {}_tE_x dt\end{aligned}$$

将上式积分区间划分为两部分，即

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \int_0^1 v^t\ {}_tp_x dt + \int_0^1 v^t\ {}_tp_x dt \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + vp_x \int_0^\infty v^s\ {}_sp_{x+1} ds \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + vp_x \bar{a}_{x+1} \qquad (3-4)\end{aligned}$$

其中，符号 $\bar{a}_{x:\overline{1}|}$为一年定期生命年金的精算现值，这种年金将在下文中介绍。(3－4) 为一种生命年金精算现值的递归关系式，由 $(x+1)$ 的连续型终身生命年金可以推出 (x) 的连续型终身生命年金，并且显然有初始值 $\bar{a}_\omega = 0$。

再由

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{t}|} + v^t$$

知

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T \qquad (3-5)$$

从而

$$1 = \delta\, \bar{a}_x + \bar{A}_x \qquad (3-6)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) = \frac{\mathrm{Var}(v^T)}{\delta^2} \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \qquad (3-7)\end{aligned}$$

此外，生命年金现值随机变量的方差还可以通过年金精算现值的形式表达，由式 (3－7)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) &= \frac{1 - 2\delta({}^2\bar{a}_x) - (1 - \delta\, \bar{a}_x)^2}{\delta^2} \\ &= \frac{2}{\delta}(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x) - (\bar{a}_x)^2\end{aligned}$$

另外，因为

$$1 = \delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T$$

所以

$$\mathrm{Var}\ (\delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T)\ = 0$$

这表明，一份 δ 单位的连续型终身生命年金和一份在死亡时刻支付单位保额的终身寿险的组合是没有风险的！事实上，投资单位本金，然后在活着的情况下，连续领取每年 δ 的利息，利息的领取直到死亡时刻，并在死亡时刻，将本金领回，这种安排显然是没有风险的。

【例 3-1】 假设Ⅰ：死亡力为常数 μ，利息力为常数 δ。

假设Ⅱ：$l_x = l_0 \cdot \left(\dfrac{\omega - x}{\omega}\right)$，利息力为常数 δ。

分别在以上两种假设下，求

① 终身生命年金的精算现值 $\bar{a}_x$

② 终身生命年金现值 $\bar{a}_{\overline{T}|}$的方差

③ $\bar{a}_{\overline{T}|}$超过 $\bar{a}_x$ 的概率

解：（1） 根据假设Ⅰ：

终身生命年金的精算现值 $\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} dt = \dfrac{1}{\mu + \delta}$

① $\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x = \dfrac{\mu}{\mu + \delta}$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty v^{2t} f_T(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-2\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}$$

$$\text{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{\mu}{(\mu + 2\delta)(\mu + \delta)^2}$$

② $\bar{a}_{\overline{T}|}$超过 $\bar{a}_x$ 的概率即

$$Pr\{\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x\} = Pr\{v^T < 1 - \delta \bar{a}_x\} = Pr\left\{T > \frac{\ln \dfrac{\mu}{\mu + \delta}}{-\delta}\right\}$$

令 $h = \dfrac{\ln \dfrac{\mu}{\mu + \delta}}{-\delta}$，则上式为 $\int_h^\infty \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu h} = \left(\dfrac{\mu}{\mu + \delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}}$

（2） 根据假设Ⅱ：

$$① \int_0^{w-x} e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, dt = \int_0^{w-x} e^{-\delta t} \frac{w - x - t}{w - x} dt = \int_0^{w-x} e^{-\delta t} dt - \int_0^{w-x} e^{-\delta t} \frac{t}{w - x} dt$$

$$= \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta} + \frac{e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta} - \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{(\omega - x)(\delta^2)}$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{(\omega - x)\delta^2}$$

② $\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x = \dfrac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{w-x} v^{2t} f_T(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-2\delta t} \frac{1}{w - x} dt = \frac{1 - e^{-2\delta(w - x)}}{2\delta(w - x)}$$

所以，$\text{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \dfrac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \dfrac{1 - e^{-2\delta(w - x)}}{2\delta^3(w - x)} - \dfrac{(1 - e^{-\delta(w - x)})^2}{\delta^4(w - x)^2}$

③ $Pr\{\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x\} = Pr\{v^T < 1 - \delta\bar{a}_x\} = Pr\{T > h\} = 1 - \dfrac{h}{(\omega - x)}$

其中，$h = \dfrac{\ln \dfrac{\delta(\omega - x)}{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}}{\delta}$

【例 3 - 2】 设随机变量 $T = T(x)$ 的概率密度函数为 $f(t) = 0.015e^{-0.015t}$，$\delta = 0.045$，求（1）终身生命年金的精算现值 $\bar{a}_x$。（2）终身生命年金现值 $\bar{a}_{\overline{T}|}$的方差。（3）基金 $\bar{a}_x$ 足够用于实际支付年金 $\bar{a}_{\overline{T}|}$的概率。

解：（1）$\bar{a}_x = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\delta t}e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{0.015 + 0.045} = 16.667$

（2）$\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x = \dfrac{\mu}{\mu + \delta} = \dfrac{0.015}{0.06} = 0.25$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^{2t}f_T(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t}\mu e^{-\mu t}dt = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = \frac{0.015}{0.105} = 0.142857$$

所以，$\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \dfrac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = 39.682540$

（3）$Pr\{\bar{a}_x > \bar{a}_{\overline{T}|}\} = Pr\{v^T > 1 - \delta\bar{a}_x\} = Pr\left\{T < \dfrac{\ln\dfrac{\mu}{\mu + \delta}}{-\delta}\right\}$

设 $h = \dfrac{\ln\dfrac{\mu}{\mu + \delta}}{-\delta}$，则上式为 $1 - \displaystyle\int_h^{\infty} \mu e^{-\mu t}dt = e^{-\mu h} = 1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}} = 0.370039$

3.1.2 定期生命年金

在 n 年内并且在（x）生存的前提下，每年连续支付 1 的生命年金叫做 n 年期定期生命年金，其现值随机变量为：

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & 0 \leqslant T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geqslant n \end{cases} \tag{3-8}$$

注意，这里 Y 的分布是一个混合分布，因为在 $0 \leqslant T < n$ 时，Y 值是连续变化的，而当 $T \geqslant n$ 时，$Y = \bar{a}_{\overline{n}|}$为一常数，并且，该常数为 Y 的最大值。显然，Y 取该最大值的概率为 $Pr(T \geqslant n) = {}_np_x$。

n 年期定期生命年金的精算现值为

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y]$$

$$= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_x\,\mu(x + t)dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x \tag{3-9}$$

$$= \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt \tag{3-10}$$

（3 - 10）可以由（3 - 9）通过分部积分得到，也可以通过考虑年金的支付情况得到：因为 n 年期定期生命年金的支付在 [0，n] 间，并以年率

1 连续进行，另外，在 t 时（$0\leqslant t\leqslant n$）发生支付的概率为${}_tp_x$。所以直接有式（3－10）。

同样地，可以得到类似于式（3－4）的递推关系式，

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt \\ &= \int_0^1 v^t\ {}_tp_x dt + \int_1^n v^t\ {}_tp_x dt \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + vp_x\ \bar{a}_{x+1:\overline{n-1}|}\end{aligned}$$

注意到其中的符号 $\bar{a}_{x:\overline{1}|}$的定义已经出现了，并且有初始值 $\bar{a}_{x:\overline{0}|}=0$。

回到式（3－10），注意到

$$Y=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{T}|}=\dfrac{1-Z}{\delta} & 0\leqslant T<n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}=\dfrac{1-Z}{\delta} & T\geqslant n\end{cases} \tag{3－11}$$

其中

$$Z=\begin{cases}v^T & 0\leqslant T<n \\ v^n & T\geqslant n\end{cases} \tag{3－12}$$

为 n 年期两全保险的现值随机变量。

因此

$$\begin{aligned}E[Y] &= \bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ &= E\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] \\ &= \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}\end{aligned} \tag{3－13}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) &= \operatorname{Var}(Z)/\delta^2 \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}-(\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2}\end{aligned} \tag{3－14}$$

用年金的记号表示，由式（3－14），有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) &= \frac{1-2\delta({}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|})-(1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2} \\ &= \frac{2}{\delta}(\bar{a}_{x:\overline{n}|}-{}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|})-(\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2\end{aligned}$$

3.1.3 延期生命年金

考虑（x）的延期 n 年的终身生命年金，这种年金在（x）活过 $x+n$ 岁的情况下，从 $x+n$ 岁开始，直到（x）死亡时为止一直以年率 1 进行支付。类似地，这种生命年金的现值随机变量为：

$$Y=\begin{cases}0=\bar{a}_{\overline{T}|}-\bar{a}_{\overline{T}|}, & 0\leqslant T<n\\ v^n\bar{a}_{\overline{T-n}|}=\bar{a}_{\overline{T}|}-\bar{a}_{\overline{n}|}, & T\geqslant n\end{cases}\tag{3-15}$$

由上式可以发现，该随机变量 Y 的取值不大于$\frac{1}{\delta}-\bar{a}_{\overline{n}|}=v^n/\delta$，并且 Y 有最小值 0，Y 取 0 的概率为 $Pr(T\leqslant n)={}_nq_x$。

我们用${}_{n|}\bar{a}_x$ 来记（x）的延期 n 年的终身生命年金的精算现值，于是，

$$\begin{aligned}{}_{n|}\bar{a}_x&=E[Y]\\&=\int_n^\infty v^n\bar{a}_{\overline{t-n}|}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt\\&=\int_0^\infty v^n\bar{a}_{\overline{s}|}\,{}_{n+s}p_x\,\mu(x+n+s)\,ds\\&=v^n\,{}_np_x\int_0^\infty\bar{a}_{\overline{s}|}\,{}_sp_{x+n}\,\mu(x+n+s)\,ds\\&={}_nE_x\,\bar{a}_{x+n}\end{aligned}\tag{3-16}$$

比较“延期 n 年的终身生命年金”、“终身生命年金”和“n 年期定期生命年金”，可以发现：

“终身生命年金”=“延期 n 年的终身生命年金”+“n 年期定期生命年金”

于是，$\bar{a}_x={}_{n|}\bar{a}_x+\bar{a}_{x:\overline{n}|}$　　(3－17)

另外，由延期 n 年的终身生命年金的支付情况看，有

$$\begin{aligned}{}_{n|}\bar{a}_x&=\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt\\&=\int_n^\infty {}_tE_x\,dt\end{aligned}\tag{3-18}$$

对于方差，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\int_n^\infty v^{2n}(\bar{a}_{\overline{t-n}|})^2\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt-({}_{n|}\bar{a}_x)^2\\&=v^{2n}\,{}_np_x\int_0^\infty(\bar{a}_{\overline{s}|})^2\,{}_sp_{x+n}\,\mu(x+n+s)\,ds-({}_{n|}\bar{a}_x)^2\\&=v^{2n}\,{}_np_x\int_0^\infty 2(\bar{a}_{\overline{s}|})v^s\,{}_sp_{x+n}\,ds-({}_{n|}\bar{a}_x)^2\\&=\frac{2}{\delta}v^{2n}\,{}_np_x\int_0^\infty(v^s-v^{2s})\,{}_sp_{x+n}\,ds-({}_{n|}\bar{a}_x)^2\\&=\frac{2}{\delta}v^{2n}\,{}_np_x(\bar{a}_{x+n}-{}^2\bar{a}_{x+n})-({}_{n|}\bar{a}_x)^2\end{aligned}\tag{3-19}$$

注：式（3－19）中从第二式到第三式的推导，用到分部积分。

【例 3－3】 已知死亡概率在（0，100）上均匀分布，$i=4\%$。年龄为 40 岁的人购买每年给付额为 3 000 元的连续给付型生命年金，求下列各种生命年金的精算现值。（1）终身生命年金；（2）20 年定期生命年金；（3）延期 10 年的终身生命年金；（4）延期 10 年的 10 年定期生命年金。

解：(1) $\bar{a}_{40} = \int_0^{60} v^t \frac{60-t}{60} dt = v^t\left[\frac{1}{60(\ln v)^2} + \frac{60-t}{60\ln v}\right]\Bigg|_0^{60} = 15.691959$

$3\,000\bar{a}_{40} = 47\,075.877$

(2) $\bar{a}_{40:\overline{20}|} = \int_0^{20} v^t \frac{60-t}{60} dt = v^t\left[\frac{1}{60(\ln v)^2} + \frac{60-t}{60\ln v}\right]\Bigg|_0^{20} = 11.849252$

$3\,000\bar{a}_{40:\overline{20}|} = 35\,547.756$

(3) ${}_{10|}\bar{a}_{40} = \int_{10}^{60} v^t \frac{60-t}{60} dt = v^t\left[\frac{1}{60(\ln v)^2} + \frac{60-t}{60\ln v}\right]\Bigg|_{10}^{60} = 8.064296$

$3\,000_{10|}\bar{a}_{40} = 24\,192.888$

(4) ${}_{10|}\bar{a}_{40:\overline{10}|} = \int_{10}^{20} v^t \frac{60-t}{60} dt = v^t\left[\frac{1}{60(\ln v)^2} + \frac{60-t}{60\ln v}\right]\Bigg|_{10}^{20} = 4.221589$

$3\,000_{10|}\bar{a}_{40:\overline{10}|} = 12\,644.76589$

【例 3－4】 已知 $\bar{A}_{40} = 0.4$，$\bar{A}_{40:\overline{10}|} = 0.7$，时刻 t 的利息力为 $\sigma_t = \begin{cases} 0.05 & t \leqslant 10 \\ 0.04 & t > 10 \end{cases}$，求 $\bar{a}_{40}$。

解：

$$\bar{a}_{40:\overline{10}|} = \frac{1-\bar{A}_{40:\overline{10}|}}{\delta} = \frac{0.3}{0.05} = 6$$

由 $\bar{A}_{40} = \bar{A}^1_{40:\overline{10}|} + {}_{10}E_{40}\,\bar{A}_{50} = \bar{A}_{40:\overline{10}|} - {}_{10}E_{40} + {}_{10}E_{40}\,\bar{A}_{50}$

即 $0.4 = 0.7 + {}_{10}E_{40}(\bar{A}_{50} - 1)$，得 $\bar{A}_{50} = 1 - \frac{0.3}{{}_{10}E_{40}}$，$\bar{a}_{50} = \frac{1-\bar{A}_{50}}{\delta} = \frac{7.5}{{}_{10}E_{40}}$

因此 $\bar{a}_{40} = \bar{a}_{40:\overline{10}|} + {}_{10}E_{40}\,\bar{a}_{50} = 6 + 7.5 = 13.5$

3.1.4 n 年确定期生命年金

n 年确定期生命年金是一种保证在前 n 年一定有支付的终身生命年金。该年金支付的现值随机变量为：

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & 0 \leqslant T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} & T \geqslant n \end{cases} \tag{3-20}$$

记这种年金的精算现值为 $\bar{a}_{\overline{\overline{x:n}}|}$，在精算学中，一般用符号 $\overline{xy}$ 来表示一种最大值，这里 $\overline{\overline{x:n}}|$ 表示的就是一种最大值，即 $\overline{\overline{x:n}}| = \max[T(x), n]$。显然

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{\overline{x:n}}|} &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\,dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\,dt \\ &= {}_nq_x\, \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\,dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\,dt \end{aligned} \tag{3-21}$$

另外，注意到

$$Y=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{n}|}+0 & 0\leqslant T<n\\ \bar{a}_{\overline{n}|}+(\bar{a}_{\overline{T}|}-\bar{a}_{\overline{n}|}) & T\geqslant n\end{cases}$$

表明 Y 是 n 年延期生命年金与一个常数 $\bar{a}_{\overline{n}|}$之和。因此，

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}&=\bar{a}_{\overline{n}|}+{}_{n|}\bar{a}_x\\&=\bar{a}_{\overline{n}|}+{}_nE_x\,\bar{a}_{x+n}\\&=\bar{a}_{\overline{n}|}+(\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|})\end{aligned}\tag{3-22}$$

此外，由于 $\mathrm{Var}(Y-\bar{a}_{\overline{n}|})=\mathrm{Var}(Y)$，因此 n 年确定期生命年金的方差与延期 n 年终身生命年金的方差一样，由式（3－19）给出。

类似于确定年金中的终值函数

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\int_0^n(1+i)^{n-t}dt$$

对生命年金，定义

$$\begin{aligned}\bar{s}_{x:\overline{n}|}&=\frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}\\&=\int_0^n\frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}dt\end{aligned}\tag{3-23}$$

为 n 年期定期生命年金在期末的精算累积值。

假设概率来自某综合表，下面我们试着推导$\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$和$\frac{\partial}{\partial n}{}_{n|}\bar{a}_x$

首先，$\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}=\frac{\partial}{\partial x}[\bar{a}_{\overline{n}|}+(\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|})]$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|})$$

$$=\frac{d}{dx}\bar{a}_x-\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

对（3－3）进行微分，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\bar{a}_x&=\int_0^\infty v^t\frac{\partial}{\partial x}({}_tp_x)dt\\&=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x[\mu(x)-\mu(x+t)]dt\\&=\mu(x)\bar{a}_x-\bar{A}_x\\&=\mu(x)\bar{a}_x-(1-\delta\bar{a}_x)\\&=[\mu(x)+\delta]\bar{a}_x-1\\&=\mu(x)\bar{a}_x-\bar{A}_x\end{aligned}\tag{3-24}$$

同理，$\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\int_0^n v^t\frac{\partial}{\partial x}({}_tp_x)dt$

$$= \int_0^n v^t \, {}_tp_x [\mu(x) - \mu(x+t)] dt$$

$$= \mu(x) \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) dt$$

$$= \mu(x) \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mu(x) \bar{a}_x - \bar{A}_x - [\mu(x) \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}]$$

$$= \mu(x)(\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) - (\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$$

类似的，$\frac{\partial}{\partial n} {}_{n|}\bar{a}_x = \frac{\partial}{\partial n} \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x dt = -v^n \, {}_np_x$

【例3-5】 某人 x 岁，购买了一份10年确定期生命年金，以连续方式给付，每年给付金额为1，已知死亡在（0，30）内均匀分布且 $\omega = x + 30$，$\delta = 0.05$。求该年金精算现值。

解： 10年确定性年金的精算现值为 $\bar{a}_{\overline{10}|} = \frac{1 - e^{-0.5}}{0.05} = 7.86939$

10年延期生命年金的精算现值为

$$\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{10}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{10}|} - \bar{A}_x}{\delta} = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{10}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} - \bar{A}_x}{\delta} = 2.975075$$

其中，$\bar{A}^1_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-0.05t} \frac{1}{30} dt = 0.262313$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} = \frac{2}{3} e^{-0.5} = 0.404354$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-0.05t} \frac{1}{30} dt = \int_0^{30} e^{-0.05t} \frac{1}{30} dt = 0.517913$$

该年金精算现值为 7.86939 + 2.975075 = 10.8445

3.1.5 变额年金

前面讨论的生命年金都是等额的年金，即年金支付率为常数。也可以考虑支付率随时间发生变化的年金。

考虑一般的情况，假设连续型生命年金在 t 时的支付率为 $g(t)$，年金的支付期限为时间区间 $[a, b]$，那么，由支付模式，知这种年金的精算现值为

$$E[Y] = \int_a^b v^t g(t) \, {}_tp_x dt \tag{3-25}$$

注意，

（1）如果 $g(t) \equiv 1$，$a = 0$，$b = n$ 时，上述一般年金就变成了连续型等额支付的 n 年期定期生命年金；

(2) 如果 $g(t) \equiv 1$，$a=0$，$b=\infty$ 时，上述一般年金就变成了连续型等额支付的终身生命年金；

(3) 如果 $g(t) \equiv 1$，$a=n$，$b=\infty$ 时，上述一般年金就变成了连续型等额支付的 n 年延期生命年金；

(4) 如果 $g(t)=[t+1]$，$a=0$，$b=\infty$ 时，上述一般年金就变成了年度递增的连续支付型终身生命年金。

这种年金的现值随机变量 $Y=(I\bar{a})_{\overline{T}|}$，将其精算现值记为 $(I\bar{a})_x$，于是

$$
\begin{aligned}
(I\bar{a})_x &= E[(I\bar{a})_{\overline{T}|}] \\
&= \int_0^{\infty}[t+1]v^t\,{}_tp_x dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}(k+1)v^t\,{}_tp_x dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^k\,{}_kp_x\int_0^1 v^s\,{}_sp_{x+k}ds
\end{aligned}
\tag{3-26}
$$

(5) 如果 $g(t) \equiv t$，$a=0$，$b=\infty$ 时，上述一般年金就变成了连续递增的连续支付型终身生命年金。

这种年金的现值随机变量 $Y=(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|}$，其精算现值记为 $(\bar{I}\bar{a})_x$，且

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{a})_x &= E[(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|}] \\
&= \int_0^{\infty} tv^t\,{}_tp_x dt
\end{aligned}
\tag{3-27}
$$

(6) 如果 $g(t)=n-[t]$，$a=0$，$b=n$ 时，上述一般年金就变成了年度递减的连续支付型 n 年期定期生命年金。其现值随机变量 $Y=(D\bar{a})_{\overline{n-[T]}|}$，精算现值

$$
\begin{aligned}
(D\bar{a})^1_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (n-[t])v^t\,{}_tp_x dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}(n-k)v^t\,{}_tp_x dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^k\,{}_kp_x\int_0^1 v^s\,{}_sp_{x+k}ds
\end{aligned}
\tag{3-28}
$$

读者可以尝试指定其他的 $g(t)$，a 和 b，得到别的形式的生命年金。

我们将上述的有关连续型生命年金的讨论小结如下：

1. 终身生命年金

$$\bar{a}_x=\int_0^{\infty}v^t\,{}_tp_x dt$$

2. n 年期定期生命年金

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\int_0^n v^t\,{}_tp_x dt$$

3. 延期 n 年终身生命年金

$$ {}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^{\infty} v^t \, {}_tp_x dt $$

4. n 年确定期生命年金

$$ \bar{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \bar{a}_{\overline{n|}} + \int_n^{\infty} v^t \, {}_tp_x dt $$

5. 年度递增终身生命年金

$$ (I\bar{a})_x = \int_0^{\infty} [t+1] \; v^t \, {}_tp_x dt $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k \, {}_kp_x \int_0^1 v^s \, {}_sp_{x+k} ds $$

6. n 年期年度递减定期生命年金

$$ (D\bar{a})^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (n - [t]) v^t \, {}_tp_x dt $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^k \, {}_kp_x \int_0^1 v^s \, {}_sp_{x+k} ds $$

一些重要的关系式有：

1. $\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1$

2. $\bar{A}_{x:\overline{n|}} + \delta \bar{a}_{x:\overline{n|}} = 1$

3. $\bar{a}_x = {}_{n|}\bar{a}_x + \bar{a}_{x:\overline{n|}}$

4. ${}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n|}}$

5. $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \bar{a}_{\overline{n|}} + {}_{n|}\bar{a}_x$

6. $\bar{s}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x}$

$$ = \int_0^n (1+i)^{n-t} \frac{l_{x+t}}{l_{x+n}} dt $$

§3.2 离散型生命年金

离散型生命年金与连续型生命年金的讨论类似，所不同的是要用求和取代求积分，用差分取代微分。另外，对于连续型年金来说，因为不存在期初付年金和期末付年金的差别，所以不需要分别考虑在期初付和期末付年金，而对离散型生命年金来说，期初付和期末付的差别却是很明显的，所以有必要分别讨论。

因为实务中更常见的生命年金是期初付生命年金，所以首先讨论期初付生命年金。

3.2.1 期初付生命年金

1. 期初付终身生命年金。考虑在年金受领人（x）活着的情况下，每

年初支付 1 的年金。这种年金叫做期初付终身生命年金。显然，该年金的现值随机变量 $Y=\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$，其中 $K=[T(x)]$为（x）的简略未来生命时间长度随机变量。

记该年金的精算现值为 $\ddot{a}_x$，则

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= E[Y]\\ &= E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)\\ &= 1+\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k\,{}_kp_x \end{aligned} \tag{3-29}$$

由式（3－29）还有

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= 1+\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x\\ &= 1+vp_x\sum_{k=0}^{\infty}v^k\,{}_kp_{x+1}\\ &= 1+vp_x\,\ddot{a}_{x+1}\end{aligned} \tag{3-30}$$

上式是离散型生命年金的一个递推关系式，并且初始值 $\ddot{a}_\omega=0$。

另外，由 $\ddot{a}_x=E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}]$ 有

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= E\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right]\\ &= \frac{1-A_x}{d}\end{aligned} \tag{3-31}$$

和

$$\ddot{a}_x=\ddot{a}_{\overline{\infty}|}-\ddot{a}_{\overline{\infty}|}A_x \tag{3-32}$$

$$1=d\ddot{a}_x+A_x \tag{3-33}$$

这种年金的现值随机变量的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) &= \mathrm{Var}\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right]\\ &= \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{d^2}\end{aligned} \tag{3-34}$$

【例 3－6】 已知（1）$q_{x+k-1}=\begin{cases}0.1k & k\leqslant 3\\ 0.3 & k>3\end{cases}$；（2）$d=0.05$

求 $\ddot{a}_x$ 的值。

解： $\ddot{a}_{x:\overline{2}|}=1+0.95\times 0.9=1.855$

$$\ddot{a}_{x+2}=\sum_{k=0}^{\infty}[0.7\times 0.95]^k=2.985075$$

$${}_2E_x = 0.95^2 \times 0.9 \times 0.8 = 0.6498$$

因此，$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{2}|} + {}_2E_x\,\ddot{a}_{x+2} = 1.855 + 0.6498 \times 2.985075 = 3.7947$

2. 期初付定期生命年金。每年支付 1 的 n 年期期初付定期生命年金的现值随机变量为

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \leqslant K < n \\ \ddot{a}_{n} & K \geqslant n \end{cases}$$

其精算现值为

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x \\ &= 1 + vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \end{aligned} \tag{3-35}$$

上式为定期生命年金的一种递归关系式，其中初始值 $\ddot{a}_{x:\overline{0}|} = 0$。

又因为

$$Y = (1 - Z)/d$$

其中，$Z = \begin{cases} v^{K+1} & 0 \leqslant K < n \\ v^n & K \geqslant n \end{cases}$ 为两全保险的现值随机变量，所以

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= (1 - E[Z])/d \\ &= \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \end{aligned} \tag{3-36}$$

从而

$$d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1 \tag{3-37}$$

对于方差，有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{d^2} \\ &= \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2} \end{aligned} \tag{3-38}$$

3. 期初付延期终身生命年金。期初付 n 年延期终身生命年金为：在年金受领人（x）活着的情况下，从 $x+n$ 岁开始，每年初支付 1 的年金。

其现值随机变量为

$$Y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant K < n \\ {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & K \geqslant n \end{cases}$$

其精算现值为

$$\begin{aligned} E[Y] &= {}_{n|}\ddot{a}_x \\ &= {}_nE_x\,\ddot{a}_{x+n} \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x \tag{3-39}$$

方差为

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{d} v^{2n} {}_np_x (\ddot{a}_{x+n} - {}^2\ddot{a}_{x+n}) + {}_{n|}{}^2\ddot{a}_x - ({}_{n|}\ddot{a}_x)^2 \tag{3-40}$$

4. *期初付确定期生命年金*。n 年期期初付确定期生命年金是一种保证至少有 n 年支付的生命年金。其现值随机变量为

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_n & 0 \leqslant K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & K \geqslant n \end{cases}$$

从而其精算现值为

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{\overline{x:n}|}} &= E[Y] \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_nq_x + \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{3-41}$$

n 年期期初付生命年金在期末的精算累积值为：

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}} \end{aligned} \tag{3-42}$$

3.2.2　期末付生命年金

对期末付年金的讨论可以类似于上述对期初付年金的讨论，我们只讨论期末付终身生命年金和期末付定期生命年金。其他类似情况的讨论留着练习。

1. *期末付终身生命年金*。这种年金在年金受领人（x）活着的情况下，每年末支付 1。显然，该年金的现值随机变量为 $Y = a_{\overline{K}|}$，从而其精算现值为

$$\begin{aligned} E[Y] &= a_x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kp_x \end{aligned} \tag{3-43}$$

注意到

$$\begin{aligned} Y &= (1 - v^K)/i \\ &= [1 - (1+i)v^{K+1}]/i \end{aligned}$$

从而有

$$a_x = E[Y]$$

$$=\frac{1-(1+i)A_x}{i} \tag{3-44}$$

及

$$1=ia_x+(1+i)A_x \tag{3-45}$$

且由

$$Y=[1-(1+i)v^{K+1}]/i$$

所以期末付终身生命年金的方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\mathrm{Var}\{[1-(1+i)v^{K+1}]/i\}\\&=\mathrm{Var}[v^{K+1}/d]\\&=\frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{d^2}\end{aligned}$$

【例 3-7】 已知死亡概率在未来 50 年内均匀分布，且 $w=x+50$，$i=0.05$，求 a_x。

解： $A_x=\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{50}v^k=\frac{1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^{50}}{50(0.05)}=0.365119$

$$a_x=\frac{1-(1+i)A_x}{i}=\frac{1-(1.05)(0.365119)}{0.05}=12.3325$$

或者应用

$$\ddot{a}_x=\frac{1-A_x}{d}=\frac{(1-0.365119)(1.05)}{0.05}=13.3325$$

$$a_x=\ddot{a}_x-1=12.3325$$

2. 期末付定期生命年金。每年末支付 1 的 n 年期末付定期生命年金的现值随机变量为

$$Y=\begin{cases}a_{\overline{K}|} & 0\leqslant K<n\\ a_{\overline{n}|} & K\geqslant n\end{cases}$$

其精算现值为

$$\begin{aligned}a_{x:\overline{n}|}&=E[Y]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}a_{\overline{K}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k}+a_{\overline{n}|}\,{}_np_x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(\ddot{a}_{\overline{k+1}|}-1)\,{}_kp_x\,q_{x+n}+a_{\overline{n}|}\,{}_np_x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k}-{}_nq_x+a_{\overline{n}|}\,{}_np_x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k}-1+(1+a_{\overline{n}|})\,{}_np_x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_x\,q_{x+k}-1+(\ddot{a}_{\overline{n}|}+v^n)\,{}_np_x\\&=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1+v^n\,{}_np_x\end{aligned}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x \qquad (3-46)$$

另外，上式也可以通过寻找替代随机变量的方法得到。事实上，因为对于 n 年期末付定期生命年金，其现值随机变量为

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|} = \dfrac{1-v^K}{i} & 0 \leqslant K < n \\ a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i} & K \geqslant n \end{cases}$$

$$= (1 - Z_1 - Z_2)/i$$

其中

$$Z_1 = \begin{cases} (1+i)v^{K+1} & 0 \leqslant K < n \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

和

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant K < n \\ v^n & K \geqslant n \end{cases}$$

所以

$$E[Y] = a_{x:\overline{n}|}$$

$$= \frac{1 - \ (1+i)\ A^1_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{i}$$

从而

$$1 = ia_{x:\overline{n}|} + iA^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \qquad (3-47)$$

可以证明，式（3－46）和式（3－47）是等价的。

【例 3－8】 求期末付 n 年期定期生命年金现值随机变量的方差。

解：

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|} & 0 \leqslant K < n \\ a_{\overline{n}|} & K \geqslant n \end{cases}$$

$$= (1 - Z_1 - Z_2)/i$$

其中，Z_1，Z_2 如上定义。于是

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\mathrm{Var}(Z_1 + Z_2)}{i^2}$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(Z_1) + 2\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) + \mathrm{Var}(Z_2)}{i^2}$$

因为

$$\mathrm{Var}(Z_1) = (1+i)^2[{}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2]$$

$$\mathrm{Var}(Z_2) = v^{2n}{}_np_x(1 - {}_np_x),$$

及

$$Z_1 Z_2 = 0$$

所以

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) = -(1+i)A_{x:\overline{n}|}^{1}\,v^n\,{}_np_x$$

所以有

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{(1+i)^2[{}^2A_{x:\overline{n}|}^{1}-(A_{x:\overline{n}|}^{1})^2]-2(1+i)A_{x:\overline{n}|}^{1}\,v^n{}_np_x+v^{2n}{}_np_x(1-{}_np_x)}{i^2}。$$

【例 3－9】 已知 $a_{40:\overline{10}|}=6.7$，$A_{40:\overline{10}|}^{1}=0.1$，$d=0.06$。

求${}_{10}E_{40}$

解： $\ddot{a}_{40:\overline{10}|}=6.7+1-{}_{10}E_{40}$

$$A_{40:\overline{10}|}=1-0.06\ (7.7-{}_{10}E_{40})\ \ =0.538+0.06\ {}_{10}E_{40}$$

又由 $A_{40:\overline{10}|}=0.1+{}_{10}E_{40}$得

$$0.1+{}_{10}E_{40}=0.538+0.06\ {}_{10}E_{40}$$

解得${}_{10}E_{40}=0.46596$

3.2.3 变额生命年金

也可以类似地讨论变额的离散型生命年金。

一般地，假设年金的支付期间为 $[c,\ d]$，在 k 时年金的支付金额为 $h(k)$，$k=c$，$c+1$，…，d，相应年金的现值随机变量为 Y，则

$$E[Y] = \sum_{k=c}^{d} h(k)v^k\ {}_kp_x$$

（1） 如果 $h(k)\equiv 1$，$c=0$，$d=n$ 时，上述一般年金就变成了离散型等额支付的 n 年期定期生命年金；

（2） 如果 $h(k)\equiv 1$，$c=0$，$d=\infty$ 时，上述一般年金就变成了离散型等额支付的终身生命年金；

（3） 如果 $h(k)\equiv 1$，$c=n$，$d=\infty$ 时，上述一般年金就变成了离散型等额支付的 n 年延期生命年金；

（4） 如果 $h(k)\equiv k$，$c=0$，$d=\infty$ 时，上述一般年金就变成了离散型期末付年度递增终身生命年金。

这种年金的现值随机变量 $Y=(Ia)_{\overline{K+1}|}$，相应地，我们将这种年金的精算现值记为$(Ia)_x$，于是

$$(Ia)_x = E[(Ia)_{\overline{K+1}|}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kv^k\ {}_kp_x \qquad (3-48)$$

（5） 如果 $h(k)\equiv k+1$，$c=0$，$d=\infty$ 时，上述一般年金就变成了离散型期初付年度递增终身生命年金。

这种年金的现值随机变量为 $Y=(I\ddot{a})_{\overline{K+1}|}$，其精算现值为

$$(I\ddot{a})_x = E[Y]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (I\ddot{a})_{\overline{k+1}|}\ {}_kp_x\,q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [(I\ddot{a})_{\overline{k+1}|} - (I\ddot{a})_{\overline{k}|}] {}_kp_x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_kp_x \qquad (3-49)$$

（6）如果 $h(k) \equiv n-k$，$c=0$，$d=n$ 时，上述一般年金就变成了离散型期初付 n 年期年度递减生命年金。

这种年金的现值随机变量为 $Y=(D\ddot{a})_{\overline{n-K}|}$，其精算现值为

$$(D\ddot{a})^1_{x:\overline{n}|} = E[Y]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) {}_kp_x \qquad (3-50)$$

【例 3－10】 求离散型 n 年期期末付年度递减生命年金的精算现值。

解： 记年金的现值随机变量为 Y，则

$$Y = \begin{cases} (Da)_{\overline{n}|} - v^K (Da)_{\overline{n-K}|} & T<n \\ (Da)_{\overline{n}|} & T \geqslant n \end{cases}$$

其中 $K=[T(x)]$。

记相应的精算现值为 $(Da)^1_{x:\overline{n}|}$，于是

$$(Da)^1_{x:\overline{n}|} = E[Y]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [(Da)_{\overline{n}|}] - v^k (Da)_{\overline{n-k}|}] {}_kp_x \, q_{x+k} + (Da)_{\overline{n}|} \, {}_np_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_{k+1}p_x$$

【例 3－11】 对于某针对（x）的定期期初付生命年金，有以下信息：

t	支付	p_{x+t}
0	2	0.80
1	3	0.75
2	4	0.5

假设 $v=0.9$，求该生命年金现值随机变量的均值和方差。

解： 这是一个支付不为常数的生命年金，记该年金现值随机变量为 Y，则

$$Y = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant T < 1 \\ 2+3v & 1 \leqslant T < 2 \\ 2+3v+4v^2 & T \geqslant 2 \end{cases}$$

由题设知

$$Pr(0 \leqslant T < 1) = q_x$$

$$= 1 - p_x$$

$$= 0.2$$

$$Pr(1 \leqslant T < 2) = p_x \, q_{x+1}$$

$$= p_x(1 - p_{x+1})$$
$$= 0.8 \times 0.25$$
$$= 0.2$$
$$Pr(2 \leqslant T) = {}_2p_x$$
$$= p_x p_{x+1}$$
$$= 0.8 \times 0.75$$
$$= 0.6$$

于是

(1) 现值的期望为：

$$E[Y] = 2 \times 0.2 + (2 + 3v) \times 0.2 + (2 + 3v + 4v^2) \times 0.6$$
$$= 6.104$$

(2) 因为

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$
$$E[Y^2] = 2^2 \times 0.2 + (2 + 3v)^2 \times 0.2 + (2 + 3v + 4v^2)^2 \times 0.6$$
$$= 43.04416$$

所以方差

$$\mathrm{Var}(Y) = 5.785344$$

我们将本节有关离散型生命年金的讨论小结如下：

一、期初付生命年金

1. 终身生命年金

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$$

2. n 年定期生命年金

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x$$

3. n 年延期终身生命年金

$$_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x$$

4. n 年确定及终身生命年金

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x$$

5. 年度递增终身生命年金

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_kp_x$$

6. n 年期年度递减定期生命年金

$$(D\ddot{a})^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\ {}_kp_x$$

二、期末付生命年金

1. 终身生命年金

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \ {}_kp_x$$

2. n 年定期生命年金

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \ {}_kp_x$$

3. 延期 n 年的终身生命年金

$${}_{n|}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \ {}_kp_x$$

4. n 年确定及终身生命年金

$$a_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = a_{\overline{n}|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \ {}_kp_x$$

5. 年度递增终身生命年金

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} kv^k \ {}_kp_x$$

6. n 年期年度递减定期生命年金

$$(Da)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \ {}_{k+1}p_x$$

三、一些重要的关系式：

1. $\ddot{a}_x = a_x + 1$

2. $1 = ia_x + (1+i)A_x$

3. $a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + {}_nE_x$

4. $A_x + d\ddot{a}_x = 1$

5. $A_x = v\ddot{a}_x - a_x$

6. $A_{x:\overline{n}|} + d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1$

7. $a_{x:\overline{n-1}|} + 1 = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

8. $A^{1}_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$

9. $A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$

10. ${}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

11. $\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

12. $\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k} \dfrac{l_{x+k}}{l_{x+n}}$

§3.3　每年支付 m 次的生命年金

在实务中，生命年金通常按月、季或半年支付。

以 (x) 生存为条件，每年支付总量为 1，在每 $1/m$ 年的年初支付 $1/m$ 的生命年金的精算现值记为 $\ddot{a}_x^{(m)}$。

该生命年金的现值随机变量

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{\frac{j}{m}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} = \frac{1 - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}$$

其中 $J=[(T-K)m]$，[　] 为取整函数。

$$E[Y] = \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} \tag{3-51}$$

另外，由支付模式可知

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} \;_{h/m}p_x \tag{3-52}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\mathrm{Var}(v^{K+(J+1)/m})}{(d^{(m)})^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2}{(d^{(m)})^2} \tag{3-53}$$

另外，注意到

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$$

这表明投资 1 个单位的本金，则可以在活着的时候，每年得到一次当期利息，然后在死亡年度末得到投资本金的偿还；也可以每年领取 m 次利息，每 $1/m$ 期得到一次相应的 $1/m$ 期的当期利息，然后在死亡所在的 $1/m$ 期的期末收回本金。

由上式，可以有

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}(A_x^{(m)} - A_x) = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}(A_x^{(m)} - A_x)$$

这表明：这种每年支付 m 次的生命年金等价于在 (x) 活着的条件下每年初支付的一系列的一年期确定年金，减去从死亡的那个小期的期末到大期的期末的支付。

另外

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}\ A_x^{(m)}$$

上式表明：每年支付 m 次的生命年金为每年支付 m 次的永续年金的一部分，因为 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}\ A_x^{(m)}$ 为第一次支付发生在 (x) 死亡所在的 $1/m$ 年年末的每年支付 m 次的永续年金的现值，所以上式第 2 个等号右边为支付 m 次，直

到（x）死亡前的最后一个 $1/m$ 年初的支付的现值，即为 $\ddot{a}_x^{(m)}$。

下面假设死亡在每个年龄段为均匀分布，则 S 服从（0，1）上的均匀分布。因此 J 为 {0，1，2，…，$m-1$} 上的均匀分布，我们知道

$$
\begin{aligned}
A_x^{(m)} &= \frac{i}{i^{(m)}} A_x \\
&= s_{\overline{1}|}^{(m)} A_x
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x \\
&= \frac{1 - s_{\overline{1}|}^{(m)} (1 - d\ddot{a}_x)}{d^{(m)}} \\
&= s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} \qquad (3-54A)
\end{aligned}
$$

不像其他很多的精算公式，上式不太好直接解释，不过上式的好处是，它只用标准的年金符号表示了 $\ddot{a}_x^{(m)}$，使我们可以利用标准年金表得到 $\ddot{a}_x^{(m)}$。传统上，为了得到 $\ddot{a}_x^{(m)}$ 的近似值，通常对式（3－52）右边的求和进行近似，一个常用的年金现值近似公式为：

$$
\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)
$$

实务中，上式通常粗略为

$$
\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \qquad (3-54B)
$$

为了方便起见，通常将式（3－54A）改写成

$$
\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \qquad (3-54C)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\alpha(m) &= s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \\
&= \frac{id}{i^{(m)} d^{(m)}} \qquad (3-55) \\
\beta(m) &= \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} \\
&= \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}} \qquad (3-56)
\end{aligned}
$$

于是，式（3－54A）可写成

$$
\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_x - \beta(m) A_x \qquad (3-54D)
$$

【例 3－12】 根据示例生命表，计算某 65 岁退休职工的每月 1 000 元的期初付终身生命年金的精算现值及其标准差。假设利率为 4%。

解： 首先

$$
\alpha(12) = s_{\overline{1}|}^{(12)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}
$$

$$= 1.000127$$

$$\approx 1$$

$$\beta(12) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}$$

$$= 0.464887$$

$$\approx 11/24$$

由示例生命表，有

$$\ddot{a}_{65} = 11.874954229$$

$$A_{65} = 1 - d\ddot{a}_{65}$$

$$= 0.54327099$$

因此，

$$12\,000\ddot{a}_{65}^{(12)} = 12\,000[\alpha(12)\ddot{a}_{65} - \beta(12)]$$

$$= 136\,938.9042$$

另外，

$$12\,000\ddot{a}_{65}^{(12)} \approx 12\,000[\ddot{a}_{65} - 11/24]$$

$$= 136\,999.4508$$

对于方差，因为

$$12\,000Y = 12\,000(1 - v^{K+(J+1)/12})/d^{(12)}$$

所以

$$\mathrm{Var}(12\,000Y) = \left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \mathrm{Var}[v^{K+1}(1+i)^{1-(J+1)/12}]$$

$$= \left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \{E[v^{2(K+1)}(1+i)^{2(1-(J+1)/12)}]$$

$$- (E[v^{(K+1)}(1+i)^{1-(J+1)/12}])^2\}$$

$$= \left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 \left\{{}^2A_{65}\, E[(1+i)^{2(1-(J+1)/12)}] - \left(\frac{A_{65}i}{i^{(12)}}\right)^2\right\}$$

$$= 284\,516\,170.4$$

其中

$$\left(\frac{12\,000}{d^{(12)}}\right)^2 = 93\,918\,379\,086$$

$${}^2A_{65} = 0.324321063$$

$$E[(1+i)^{2(1-(J+1)/12)}] = (1+i)^2 E[v^{(J+1)/6}]$$

$$= (1+i)^2 \sum_{j=0}^{11} v^{(j+1)/6}/12$$

$$= 1.036875$$

$$\left(\frac{A_{65}i}{i^{(12)}}\right)^2 = 0.30598642$$

因此，标准差为 16 867.60713。

接下来考虑这种生命年金的定期和延期年金。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta\ (m)\ A_{x:\overline{n}|}^{1} \tag{3-57}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ _{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\ _{n|}A_x \tag{3-58}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x) \tag{3-59}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ _{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\ _nE_x \tag{3-60}$$

此类的期末付年金可以类似讨论。

$$Y = a_{\overline{K+(J/m)}|}^{(m)}$$

$$= \frac{1 - v^{K+(J/m)}}{i^{(m)}} \tag{3-61}$$

$$1 = ia_x + (1+i)\ A_x$$

$$= i^{(m)}a_x^{(m)} + (1 + i^{(m)}/m)\ A_x^{(m)} \tag{3-62}$$

另外

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - 1/m$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - (1 - {}_nE_x)/m \tag{3-63}$$

§3.4　可分配的期初付年金和完全的期末付年金

由于离散型年金的每次支付要么是针对接下来的一期（期初付年金），要么是针对前一期（期末付年金），所以对于死亡所在的支付期，存在这样一个问题：死者所应得到前一次支付（期初付年金）或应该得到后一次支付（期末付年金）的多少才合理。例如，假设一份寿险合约通过年度支付的保费来购买，保费在每合同年年初支付，如果被保险人在一次年度支付 1 个月后死亡，那么，似乎应该将后 11 个月的保费返还给被保险人才算合理。另一个例子为，如果一份退休收入期末付生命年金提供年度支付，并且年金受领人在下一次年金支付日前一个月死亡，那么，似乎应该将年金受领人在最后一年中活过的 11 个月所应得到的年金支付给该受领人的继承人才算合理。下面考虑这种调整的支付的大小如何确定。

首先考虑上述第一个例子中的情况。被保险人在 K 时进行了最后一次支付，然后死于 T 时。假设保费以一种常数的速率积累或自增，记该常数速率为 c，则有

$$c\bar{a}_{\overline{1}|} = 1$$

如果自增到被保险人死亡时刻为止，那么，最后一年自增的保费为 $c\bar{s}_{\overline{T-K}|}$，于是

$$(1+i)^{T-K} - c\bar{s}_{\overline{T-K}|} = (1+i)^{T-K} - \bar{s}_{\overline{T-K}|}/\bar{a}_{\overline{1}|}$$

$$= \bar{a}_{\overline{K+1-T}|}/\bar{a}_{\overline{1}|}$$

为应该返还给被保险人的未实现保费。

所有保费减去应该返还的保费在0时的现值随机变量为

$$\begin{aligned} Y &= \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - v^T \bar{a}_{\overline{K+1-T}|} / \bar{a}_{\overline{1}|} \\ &= \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - (v^T - v^{K+1})/d \\ &= (1 - v^T)/d \\ &= \ddot{a}_{\overline{T}|} \end{aligned} \tag{3-64}$$

当年度支付率为1时，将该支付在0时的精算现值记为 $\ddot{a}_x^{\{1\}}$，即

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{\{1\}} &= E[\ddot{a}_{\overline{T}|}] \\ &= E[\frac{\delta}{d} a_{\overline{T}|}] \\ &= \frac{\delta}{d} \bar{a}_x \end{aligned} \tag{3-65}$$

这种将死亡时刻和死亡所在期期末之间未实现的支付返还的期初付生命年金叫做可分配期初年金。

可以将这种思想推广到一年支付多次的情况。我们知道，$J = [(T-K)m]$ 为每年支付 m 次的年金在最后一年内的支付次数，因此 $K + (J+1)/m - T$ 为应该考虑返还的时期长度，自增率由关系式

$$c\,\bar{a}_{\overline{1/m}|} = 1/m$$

确定。类似地有

$$\begin{aligned} Y &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} - v^T \bar{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m-T}|} / (m\,\bar{a}_{\overline{1/m}|}) \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} - [v^T - v^{K+(J+1)/m}]/d^{(m)} \\ &= (1 - v^T)/d^{(m)} \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|} \end{aligned} \tag{3-66}$$

当年度支付率为1时，支付减去返还的精算现值记为 $\ddot{a}_x^{\{m\}}$，并且

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{\{m\}} &= E[(1 - v^T)/d^{(m)}] \\ &= \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}x \end{aligned} \tag{3-67}$$

另外

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{\{m\}} &= E[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|} - (v^T - v^{K+(J+1)/m})/d^{(m)}] \\ &= \ddot{a}_x^{(m)} - E[(v^T - v^{K+(J+1)/m})/d^{(m)}] \end{aligned} \tag{3-68}$$

上式右边的第二项为返还的精算现值，并且

$$\begin{aligned} E[(v^T - v^{K+(J+1)/m})/d^{(m)}] &= E[(1 - v^{K+(J+1)/m})/d^{(m)}] - E[(1 - v^T)/d^{(m)}] \\ &= (\bar{A}_x - A_x^{(m)})/d^{(m)} \end{aligned} \tag{3-69}$$

在均匀分布假设下，上式变为

$$\frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}}\right)A_x$$

于是

$$\ddot{a}_x^{\{m\}}=\ddot{a}_x^{(m)}-\frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i^{(m)}}\right)A_x \tag{3-70}$$

对于每年支付 m 次的可分配的期初付年金现值随机变量的方差，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=\mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{T}|}^{(m)})\\&=\mathrm{Var}[(1-v^T)/d^{(m)}]\\&=\mathrm{Var}[(1-v^T)]/(d^{(m)})^2\\&=[{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]/(d^{(m)})^2\end{aligned} \tag{3-71}$$

接下来，对期末付年金进行类似的讨论。

考虑每 $1/m$ 期期末支付 $1/m$ 的情况。假设年金受领人在 T 时死亡，其领到的最后一次规则支付发生在 $K+J/m$ 时，于是，$T-K-J/m$ 为最后一个 $1/m$ 期上该年金受领人活过但是没有得到支付的时期的长度，也即为需要补偿的时期的长度。假设所需的支付按照常数速率 c 自增，于是

$$c\bar{s}_{\overline{1/m}|}=1/m$$

如果自增到年金受领人死亡时刻为止，那么，在死亡时刻进行的合适的支付应该是下一次支付当中自增到此时的部分，其大小为

$$c\bar{s}_{\overline{T-K-J/m}|}=\bar{s}_{\overline{T-K-J/m}|}/(m\bar{s}_{\overline{1/m}|})$$

所有支付在 0 时的现值为

$$\begin{aligned}Y&=a_{\overline{K+(J/m)}|}^{(m)}+v^T\bar{s}_{\overline{T-K-J/m}|}/(m\bar{s}_{\overline{1/m}|})\\&=a_{\overline{K+(J/m)}|}^{(m)}+[v^{K+J/m}-v^T]/i^{(m)}\\&=(1-v^T)/i^{(m)}\\&=a_{\overline{T}|}^{(m)}\end{aligned} \tag{3-72}$$

当年度支付率为 1 时，支付在 0 时的精算现值记为 $\mathring{a}_x^{(m)}$，并且

$$\begin{aligned}\mathring{a}_x^{(m)}&=E[(1-v^T)/i^{(m)}]\\&=\frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_x\end{aligned} \tag{3-73}$$

对于这种年金，当 $m=1$ 时，可以将上标（1）省略。

另外

$$\begin{aligned}\mathring{a}_x^{(m)}&=E[a_{\overline{K+(J/m)}|}^{(m)}+(v^{K+J/m}-v^T)/i^{(m)}]\\&=a_x^{(m)}+E[(v^{K+J/m}-v^T)/i^{(m)}]\end{aligned} \tag{3-74}$$

上式右边的第二项为最后部分支付的精算现值，并且

$$\begin{aligned}E[(v^{K+J/m}-v^T)/i^{(m)}]&=E[(1-v^T)/i^{(m)}]-E[(1-v^{K+J/m})/i^{(m)}]\\&=[(1+i)^{1/m}A_x^{(m)}-\bar{A}_x]/i^{(m)}\end{aligned} \tag{3-75}$$

在均匀分布假设下，上式变为

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{\delta}\right)A_x$$

于是

$$\mathring{a}_x^{(m)} = a_x^{(m)} + \frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta}\right)A_x \tag{3-76}$$

这种拥有最后一次部分支付的期末付年金叫做完全期末年金。

对于完全的期末付年金现值随机变量的方差，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a_{\overline{T|}}^{(m)}) &= \mathrm{Var}[(1-v^T)/i^{(m)}] \\ &= \mathrm{Var}(v^T)/(i^{(m)})^2 \\ &= [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]/(i^{(m)})^2\end{aligned} \tag{3-77}$$

因为 $i^{(m)} > d^{(m)}$，所以比较式（3－77）和式（3－71）知，对于具有相同支付频率的可分配的期初付年金和完全的期末付年金，前者现值随机变量的方差更大。

【例 3－13】 讨论定期可分配的期初付年金和定期完全的期末付年金。

解：首先，对于 n 年期定期、每年支付 m 次的可分配的期初付年金，记其现值随机变量为 Y，则类似于上述讨论，可以有

$$Y = \begin{cases}\ddot{a}_{\overline{T|}}^{(m)} & T \leqslant n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} & T > n\end{cases}$$

$$= (1-Z)/d^{(m)}$$

其中 Z 为在死亡即刻支付的 n 年期两全保险的现值随机变量，于是

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{\{m\}} &= E[Y] \\ &= E[(1-Z)/d^{(m)}] \\ &= (1-\bar{A}_{x:\overline{n|}})/d^{(m)} \\ &= \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n|}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}[(1-Z)/d^{(m)}] \\ &= \mathrm{Var}(Z)/(d^{(m)})^2 \\ &= [{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2]/(d^{(m)})^2\end{aligned}$$

对于 n 年期定期、每年支付 m 次的完全的期末付年金，其现值随机变量为

$$Y = \begin{cases}a_{\overline{T|}}^{(m)} & T \leqslant n \\ a_{\overline{n|}}^{(m)} & T > n\end{cases}$$

$$= (1-Z)/i^{(m)}$$

其中 Z 为在死亡即刻支付的 n 年期两全保险的现值随机变量，于是

$$\begin{aligned}\mathring{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} &= E[(1-Z)/i^{(m)}] \\ &= (1-\bar{A}_{x:\overline{n|}})/i^{(m)} \\ &= \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n|}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}[(1-Z)/i^{(m)}]\\ &= \mathrm{Var}(Z)/(i^{(m)})^2\\ &= [{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2]/(i^{(m)})^2\end{aligned}$$

§3.5　利用换算函数计算生命年金的精算现值

在第二章，为了计算保险的精算现值，我们定义了函数 $D_x = v^x l_x$，这里，我们考察它在计算生命年金精算现值时的作用。由式（2－40），知

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = {}_nE_x = D_{x+n}/D_x$$

因此

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{v^x l_x}{v^{x+n} l_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}} \tag{3-78}$$

因此，一般地，将于年龄 y 支付的 b 在年龄 $x(x<y)$ 的精算现值为

$$\frac{bD_y}{D_x} \tag{3-79}$$

同样，对于 $y<x$，式（3－79）为在年龄 y 支付的 b 在年龄 x 的精算积累值。我们可以将精算现值和精算积累值统称为精算价值。

现在考虑（x）的生命年金，其支付如下图所示：

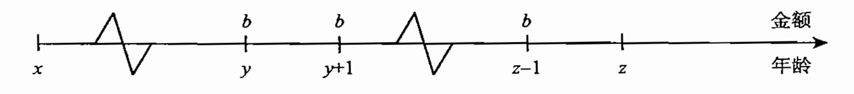


图 3－1　年金支付图

由式（3－79），生命年金在年龄 y、$y+1$、…、$z-1$ 所进行的支付在年龄 x 时的精算价值为 $\frac{b}{D_x}\sum_{t=y}^{z-1} D_t$。

由式（2－43），我们引入函数 $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$，可以发现，上述年金值可以表示为

$$\frac{b}{D_x}(N_y - N_z) \tag{3-80}$$

这里 x 为计算精算现值所在时刻的年龄，y 为年金第一次支付发生时的年龄，z 为最后一次支付一年后的年龄，b 为年度支付额。注意，这里 x、y、z 之间可以有任意的关系，即 x 可以大于、等于或小于 y 或 z。

特别地，

1. 令 $x=y$、$z=\infty$、$b=1$，我们有

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

2. 令 $x=y$、$z=x+n$、$b=1$，我们有

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$$

【例 3－14】 某人现年 55 岁，购买了以下期初付生命年金，根据示例生命表求下列年金的精算现值：

（1） 每年给付额为 1 万元的终身生命年金；

（2） 每年给付额为 1 万元的 20 年定期生命年金。

解：（1） 因为 $10\ 000\ddot{a}_x=10\ 000\dfrac{N_x}{D_x}$

所以 $10\ 000\ddot{a}_{55}=10\ 000\dfrac{N_{55}}{D_{55}}=10\ 000\dfrac{1\ 667\ 726.98}{107\ 592.32}=155\ 004.2773$

（2） 因为 $10\ 000\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=10\ 000\dfrac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$

所以

$$10\ 000\ddot{a}_{55:\overline{20}|}=10\ 000\frac{N_{55}-N_{75}}{D_{55}}=10\ 000\frac{1\ 667\ 726.98-275\ 600.01}{107\ 592.32}$$

$$=12.9389$$

为了计算每年支付 m 次的生命年金，注意到式（3－52）可以写成

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{mD_x}\sum_{h=0}^{\infty}D_{x+h/m} \tag{3－81}$$

其中

$$D_{x+h/m}=v^{x+h/m}l_{x+h/m}$$

因此，引入函数

$$N_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty}D_{x+h/m} \tag{3－82}$$

则

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{N_x^{(m)}}{D_x} \tag{3－83}$$

如果假设死亡在各年内均匀分布，则由式（3－54B），有

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)}&=\alpha(m)\ddot{a}_x-\beta(m)\\&=\frac{\alpha(m)N_x-\beta(m)D_x}{D_x}\end{aligned} \tag{3－84}$$

比较式（3－83）和式（3－84），我们有

$$N_x^{(m)}=\alpha(m)N_x-\beta(m)D_x \tag{3－85}$$

如果利用式（3－54B）的近似关系式，可以有

$$N_x^{(m)}\approx N_x-\frac{m-1}{2m}D_x \tag{3－86}$$

上式也是实务中经常使用的一个近似关系式。注意，式（3－85）成立

的条件是死亡在各年内均匀分布。

如果可以得到 $N_x^{(m)}$，那么类似于式（3－80），我们有计算每年支付 m 次的等额年金的一般公式：

$$\frac{b}{D_x}(N_y^{(m)}-N_z^{(m)}) \tag{3-87}$$

这里 b 为年度支付总额，b/m 为每次支付额。

【例 3－15】 用换算函数求下列（40）购买的生命年金精算现值：

（1）延期生命年金，第一次支付在 60 岁，每月支付 2 500 元；

（2）支付在 40 岁到 60 岁之间进行，每月初支付 2 500 元。

解： 年度支付总额为 2 500 × 12 = 30 000，

（1）$\dfrac{30\ 000N_{60}^{(12)}}{D_{40}}=168\ 082.0046$

（2）$\dfrac{b}{D_{60}}(N_{40}^{(12)}-N_{60}^{(12)})=963\ 340.7819$

其中，$N_{60}^{(12)}=\alpha(12)N_{60}-\beta(12)D_{60}=1\ 135\ 478.542$，

$$N_{40}^{(12)}=\alpha(12)N_{40}-\beta(12)D_{40}=3\ 883\ 073.201$$

现在回到式（3－81），令 $m\to\infty$，可以有

$$\bar{a}_x=\frac{1}{D_x}\int_0^\infty D_{x+t}dt \tag{3-88}$$

由此，我们定义

$$\bar{N}_x=\int_0^\infty D_{x+t}dt=\int_x^\infty D_y dy \tag{3-89}$$

此外，在每年内死亡均匀分布的假设下，由式（3－85），有

$$\bar{N}_x=\alpha(\infty)N_x-\beta(\infty)D_x \tag{3-90}$$

其中，由式（3－55）和式（3－56），有

$$\alpha(\infty)=\bar{s}_{\overline{1|}}\,\bar{a}_{\overline{1|}}=\frac{id}{\delta^2} \tag{3-91}$$

$$\beta(\infty)=\frac{i-\delta}{\delta^2} \tag{3-92}$$

由式（3－86），令 $m\to\infty$，可以有

$$\bar{N}_x\approx N_x-\frac{1}{2}D_x \tag{3-93}$$

这也是实务中常用的一个近似关系式。

利用上述换算函数，我们可以有如下的计算等额支付的连续生命年金的一般公式：

$$\frac{b}{D_x}(\bar{N}_y-\bar{N}_z) \tag{3-94}$$

接下来考虑变额年金的情况。首先考虑年金的支付按年度而变化的情

况。假设每年支付 m 次，年度支付总额分别为 b_x、b_{x+1}、…、b_y、…、b_{x+n-1}，所有的支付在各 $1/m$ 年初支付，在 $x+n$ 岁时停止支付。在年龄区间（y，$y+1$）之间所有的支付在 y 岁时的精算现值为 $b_y\ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|}$，记整个年金在 x 岁时的精算现值为 $(apv)_x$，则：

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|}\ {}_{y-x}E_x \qquad (3-95A)$$

如果假设死亡在各年内均匀分布，则由式（3－59），有

$$\begin{aligned}(apv)_x &= \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y[\alpha(m)\ddot{a}_{y:\overline{1}|} - \beta(m)(1-{}_1E_y)]\,{}_{y-x}E_x \\ &= \frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1} b_y[\alpha(m)D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1})]\end{aligned} \qquad (3-96A)$$

定义

$$D_y^{(m)} = N_y^{(m)} - N_{y+1}^{(m)}$$

则由式（3－85），有

$$D_y^{(m)} = \alpha(m)D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1}) \qquad (3-97A)$$

于是，式（3－96A）变成

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1} b_y D_y^{(m)} \qquad (3-98A)$$

对于期末付的年度变额年金，可以类似地有

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y a^{(m)}_{y:\overline{1}|}\ {}_{y-x}E_x \qquad (3-95B)$$

在各年内死亡均匀分布的假设下，

$$a^{(m)}_{y:\overline{1}|} = \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} - \frac{1}{m}(1-{}_1E_y) = \alpha(m)D_y - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right](1-{}_1E_y)$$

于是有

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1} b_y\left\{\alpha(m)D_y - \left[\beta(m)+\frac{1}{m}\right](D_y - D_{y+1})\right\} \qquad (3-96B)$$

定义

$$\tilde{D}_y^{(m)} = \alpha(m)D_y - \left[\beta(m)+\frac{1}{m}\right](D_y - D_{y+1}) \qquad (3-97B)$$

则式（3－96B）变为

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x}\sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \tilde{D}_y^{(m)} \qquad (3-98B)$$

我们将本节有关换算函数的公式归纳如下：

一、每年给付一次的生命年金

1. $\ddot{a}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$

2. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$

3. $_{n|}\ddot{a}_x = \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$

4. $_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \dfrac{N_{x+n} - N_{x+m+n}}{D_x}$

5. $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

6. $a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$

7. $_{n|}a_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$

8. $_{n|}a_{x:\overline{m}|} = \dfrac{N_{x+n+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$

二、每年给付 m 次的生命年金

1. $\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_x^{(m)}}{D_x}$，其中 $N_x^{(m)} = \alpha(m)N_x - \beta(m)D_x \approx N_x - \dfrac{m-1}{2m}D_x$

2. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \dfrac{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}{D_x}$

3. $_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+n}^{(m)}}{D_x}$

4. $a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+1/m}^{(m)}}{D_x}$，其中 $N_{x+1/m}^{(m)} = N_x^{(m)} - \dfrac{1}{m}D_x$

5. $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \dfrac{N_{x+1/m}^{(m)} - N_{x+n+1/m}^{(m)}}{D_x}$

6. $_{n|}a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+1/m}^{(m)}}{D_x}$

习　题

1. 30 岁的人购买保额为 1 的连续给付型终身寿险，趸缴净保费为 0.375。假定 $\mu = 0.03$，利息力 δ 为常数，若此人购买每年给付金额 1 元的连续型终身生命年金，试计算该年金的精算现值 $\bar{a}_x$。

2. 已知 35 岁的人有两种连续给付型年金选择，其选择如下：

（1） 年支付额为 1 的终身生命年金，其中 $\delta_1 = 0.07$，$\mu_1 = 0.06$；

（2） 年支付额为 2 的终身生命年金，其中利息力和死亡力分别为 δ_2、μ_2 且 $\mu_2 = 0.10$。

试确定 δ_2 以使得两份年金的精算现值相等。

3. 已知 $\mu_x(t) = \begin{cases} 0.01, & 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 0.02, & t \geqslant 5 \end{cases}$，$\delta = 0.06$。求 $\bar{a}_x$。

4. 已知极限年龄 $\omega=100$，死亡力服从 de Moivre 分布，即 $l_x=l_0\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$，且 $\delta=0.05$。求 $\bar{a}_{35}$。

5. 某人今年刚好 30 岁，购买一份 20 年的定期生命年金，已知 $\mu_{30}(t)=\frac{1}{80-t}$，$t<80$，$\delta=0.08$。求该年金的精算现值。

6. 某残疾保险保单，保险人从现在开始向被保险人以连续支付方式每年支付 2 万元，支付的时间长度服从 $\alpha=2$，$\theta=1$ 的 Gamma 分布，已知 $\delta=0.05$，求该给付的精算现值。

7. 已知如下条件：

k	$\ddot{a}_{\overline{k}\rvert}$	$_{k-1\mid}q_x$
1	1.00	0.33
2	1.93	0.24
3	2.80	0.16
4	3.62	0.11

计算 $\ddot{a}_{x:\overline{4}\rvert}$。

8. 某保险公司从现在开始向一被保险人每年年初给付 15 万元，直至该被保险人死亡为止。当该保险公司给付完 50 万元之后，剩余部分由另一家再保险公司代为给付（即第四年年初原保险公司只需给付 5 万元，剩余的 10 万元由再保险公司给付，以后每年给付均由再保险公司执行）。已知 $_tp_x=\begin{cases}(0.7)^t, & 0\leqslant t\leqslant 5.5\\ 0, & t>5.5\end{cases}$，$i=0.05$，求由再保险公司给付的精算现值。

9. 新生儿活到 25 岁的概率为 0.7，活到 35 岁的概率为 0.5。已知以下三种期初付年金的精算现值均为 6 万元：

（1）25 岁的人购买的每年给付 7 500 元的终身生命年金；

（2）35 岁的人购买的每年给付 12 300 元的终生生命年金；

（3）25 岁的人购买的 10 年定期生命年金，每年给付金额为 9 400 元。

求利率 i。

10. 30 岁的人购买一份保额为 18 万元的终身寿险，有以下三种缴费方式：

（1）一次性缴清保费 45 000 元；

（2）每年年初缴费 3 000 元；

（3）前十年每年年初缴费 2 000 元，十年后每年年初缴费 3 875 元。

根据以上信息，计算此人购买一份每年年初给付金额为 5 000 元的 10

年定期生命年金的精算现值。

11. 老王今年 30 岁，自今年开始每年年末将收到一笔 5 000 元的年金给付，已知 $p_x = k$，$i = 0.10$，该年金精算现值为 22 500 元，试计算 k 的值。

12. 已知 $A_x = 0.22$，$A_{x+25} = 0.46$，$A_{x:\overline{25|}}^{\ \ 1} = 0.20$，$i = 0.06$，试计算 $a_{x:\overline{25|}}$。

13. 35 岁的人购买了一份 30 年延期的期初给付终身生命年金，每年给付金额为 1。条件如下：

(1) 如果此人在 30 年内死亡，保险公司将在死亡年度末无息退还其所缴付的保费；

(2) $\ddot{a}_{65} = 9.90$，$A_{35:\overline{30|}} = 0.21$，$A_{35:\overline{30|}}^{1} = 0.07$。

计算该保险的趸缴净保费。

14. 30 岁的人购买了一份 3 年定期生命年金，第 k 年年初给付 k 元，$k = 1, 2, 3$。已知 $q_{30} = 0.01$，$q_{31} = 0.015$，$i = 0.04$，求该年金精算现值。

15. 老王今年 65 岁，看中三款定期生命年金，详情如下：

(1) 三款年金最后一次给付均在 75 岁；

(2) 第一款年金精算现值为 14 000，在 66 岁时开始给付，第一次给付 5 000 元，以后每年给付减少 500 元；

(3) 第二款年金精算现值为 21 000，在 65 岁时开始给付，第一次给付 1 000 元，以后每年给付增加 1 000 元；

(4) 第三款年金精算现值为 P，在每年年初给付 1 000 元，年给付额不变。

求 P。

16. 已知

(1) $a_{30:\overline{15|}} = 6$；

(2) 30 岁的人购买的某 16 年期初给付定期生命年金精算现值为 75 000，第一次给付 5 000 元，以后每年给付增加 1 000 元。

若该被保险人购买一份 15 年定期生命年金，年金期末给付，第一次给付 7 500 元，以后每年给付减少 500 元。计算该年金精算现值。

17. 已知 ${}_{20}P_0 = 0.06$，${}_{30}P_0 = 0.04$，$i = 0.06$。一群年龄 20 岁的人共同筹集基金，现在每人缴 P 元，以使得在第 10 年年末时（即 30 岁时）参与该基金并仍存活的人每人能得到 1 000 元。求 P。

18. x 岁的人购买一份 30 年定期生命年金，每年年初给付，给付金额为 1，Y 是代表该年金现值的随机变量。已知 $0 \leqslant x \leqslant 80$，$i = 0.05$，${}_{30}p_x = 0.7$，${}^2A_{x:\overline{30|}}^{1} = 0.0694$，$A_{x:\overline{30|}}^{1} = 0.1443$，求 $E(Y^2)$。

19. 30 岁的人购买一份期初付 3 年定期生命年金，已知

$s(x) = 1 - \dfrac{x}{80}$，$0 \leqslant x \leqslant 80$，$i = 0.05$，$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K = 0, 1, 2 \\ \ddot{a}_{\overline{3|}}, & K = 3, 4, 5, \cdots \end{cases}$，求

$\mathrm{Var}(Y)$。

20. 已知在年龄 x 岁的人群中，有 30% 是吸烟者，70% 是非吸烟者。对于吸烟者，死亡力 μ_1 为常数且 $\mu_1=0.06$。对于非吸烟者，死亡力 μ_2 为常数且 $\mu_2=0.03$。已知利息力 $\delta=0.08$，若从这群人里随机抽取一人，求此人的 Var $(\bar{a}_{\overline{T(x)}|})$。

21. 年龄 x 岁的人，其中 30% 是吸烟者，70% 是非吸烟者。已知：

(1) $\delta=0.10$;

(2) $\bar{A}_x^{smoker}=0.444$;

(3) $\bar{A}_x^{non-smoker}=0.286$;

(4) T 代表 (x) 的余命；

(5) $\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}^{smoker})=8.818$;

(6) $\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}^{non-smoker})=8.503$。

若从这群人里随机抽取一人，求此人的 Var $(\bar{a}_{\overline{T}|})$。

22. x 岁的人购买一份 3 年定期期初给付生命年金。已知 $i=0.06$，死亡率分布如下：

t	年金给付	p_{x+t}
0	15	0.95
1	20	0.90
2	25	0.85

计算该年金现值随机变量的方差。

23. 50 个相互独立的人同时购买了期初给付终身生命年金，该年金每年给付金额为 100 元。死亡力为常数 0.01，利息力为常数 0.05。使用正态分布近似计算这项基金在最初 $(t=0)$ 时的数额至少为多少时，才能以 95% 的概率保证这项基金足以支付所有的年金给付？

24. 已知 25 岁的人购买了一份终身生命年金，给付情况如下：若生存，则每年以连续方式给付其 2 元；如此人死亡，则死亡时立即给付 10 元。Z 代表该年金现值随机变量。

$$\mu_{25}(t)=0.02;\quad \delta=0.06。$$

试计算 Var (Z)。

25. 某 60 岁的人购买了一份连续给付型终身生命年金。Y 是该年金的现值随机变量。已知：

(1) 死亡力服从 de Moivre 分布，$\omega=110$;

(2) $\delta=0.06$。

求 Y 的 90% 分位数。

26. 已知如下分布：

x	l_x	q_x	d_x
50			508
51		0.006	
52	91 365		

$i=0.06$，$a_{51}=11.888$。求 a_{50}。

27. 50 岁的人购买生命年金，年金每年给付金额为 5 000 元，当利率为 4% 时，利用换算函数分别求以下年金精算现值：

（1）期初付 20 年定期生命年金；

（2）期末付 20 年定期生命年金；

（3）期初付终身生命年金；

（4）期末付终身生命年金；

（5）在 55 岁时开始支付的 10 年定期生命年金；

（6）55 岁时开始支付的终身生命年金。

第四章　均衡净保费

学习目标

□ 了解均衡净保费的概念

□ 掌握完全离散型、完全连续型、半连续型寿险的年缴净保费、年分多次缴费的年均净保费的计算方法，理解相互关系

□ 掌握可分配保费、累积型保额的计算方法

在前面两章我们讨论了不同支付情况下的人寿保险和生命年金的精算现值。保险人赔付额的精算现值可以被看成是保险公司卖出一份保单所需付出的风险成本，被保险人（投保人）要想得到保单——从而得到保险公司付出的成本，自然需要承担相应的对价。本章在前面各章的基础上，从被保险人支付对价的角度来讨论为购买保险或生命年金而需要支付的、与精算现值或保险公司付出的成本相当的对价（即保费）水平。

实务中，个人寿险的保费通常包括两部分——净保费和附加保费。附加保费反映保险公司的经营成本与利润水平，通常与被保险的生命风险无关，而净保费则与被保险人的生命风险完全对应，因此，净保费与前面讨论的精算现值是对应的。本章我们只考虑净保费。

有许多不同的保费支付方式：如，在保单开始（生效）时一次性支付，这种保费叫趸缴保费，事实上，前两章讨论的精算现值即可看作是相应保险或年金的趸缴净保费；更常见的保费支付方式是分期支付。本章主要讨论分期支付的保费的计算方法。

确定净保费可以有不同的原则。我们通过例 4 – 1 来说明几种确定净保费的不同原则。

【例 4 – 1】　(x) 购买了一份保险，已知

$$Pr(K(x)=k)=0.1, k=0,1,\cdots,9$$

其中，$K(x)$ 为 (x) 的简略未来生命时间长度随机变量，保额为常数 1，在被保险人死亡年度末支付。

假设这种保险的年度保费为 P，在被保险人活着的情况下每年年初支付。

分别根据以下原则，确定 P：

(1) 原则 Ⅰ：保险公司亏损的概率不超过 20%；

(2) 原则 Ⅱ：预期的死亡保额等于预期的保费收入；

（3）原则Ⅲ：假设保险公司的财富效用函数为 $u(x) = -\exp(-0.1x)$，保险公司是否接受风险，从财富效用方面考虑，两种选择对保险公司来说是无区别的。

假设保险公司使用的年度实际利率均为 $i=0.06$。

解： 当 $K=k$ 时，年度保费为 P 的情况下，保险公司一份保单亏损的现值为：

$$l(k) = v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$
$$= (1+P/d)v^{k+1} - P/d \qquad k=0,1,\cdots,9$$

相应的（保险人的）损失随机变量为

$$L = v^{K+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

（1）因为 $l(k)$ 关于 k 单调递减，因此，要使亏损概率不超过20%，即

$$\Pr(L = v^{K+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|} > 0) \leqslant 20\%$$

也即

$$\Pr(K < \ln(1+d/P)/\delta - 1) \leqslant 20\%$$

因为

$${}_{k|}q_x = 0.1 \qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$$

所以

$$Pr(K<2) = 20\%$$

同时，对任意的 $s \geqslant 2$，有

$$Pr(K<s) \geqslant 30\%$$

于是，满足

$$Pr(K < \ln(1+d/P)/\delta - 1) \leqslant 20\%$$

的最小的 P 应该满足：

$$\ln(1+d/P)/\delta - 1 = 2$$

即

$$P = 1/\ddot{s}_{\overline{3}|} = 0.29633$$

（2）由原则Ⅱ，有

$$E[L] = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^{9}(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|})\Pr(K=k) = 0$$

从而

$$\sum_{k=0}^{9}(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = 0$$

于是

$$P = a_{\overline{10}|}/(D\ddot{a})_{\overline{10}|} = 0.15781$$

(3) 由原则Ⅲ，有

$$\begin{aligned}\exp(-0.1\omega) &= E[\exp\{-0.1(\omega-L)\}]\\ &= \exp(-0.1\omega)E[e^{0.1L}]\end{aligned}$$

即

$$E[e^{0.1L}] = 1$$

可以解出

$$P = 0.16019$$

由原则Ⅰ确定的保费又叫百分位保费。

确定净保费的原则Ⅱ又叫等价原则，这种原则由 $E[L]=0$ 来确定净保费。

原则Ⅲ利用了一个指数效用函数，所以由这种原则确定的保费又叫指数保费。

需要说明的是，确定保费还可以有许多其他的原则，不过在人寿保险实务中最常用的还是等价原则。

§4.1 完全连续保费

所谓完全连续，是指连续支付保费、同时在死亡发生时刻支付保额，即保费和保额的支付都属于连续型。

考虑 (x) 的连续型单位保额终身寿险，其保费以等额连续的方式支付，设保费支付率为 $\bar{P}$，则

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t|}} \tag{4-1}$$

为被保险人在 t 时死亡的情况下保险人的损失（现）值。

注意，$l(t)$ 是关于 t 的减函数，$l(0)=1$ 且当 $t\to\infty$ 时 $l(t)\to-\bar{P}/\delta$。

如果 t_0 是使得 $l(t)=0$ 的时间点，那么，如果死亡在 t_0 前出现，则保险人将出现正的损失；反之，如果被保险人在 t_0 后死亡，那么保险人将出现负的损失，也就是实现正的盈利。

现在考虑损失随机变量

$$\begin{aligned}L &= l(T)\\ &= v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}\end{aligned} \tag{4-2}$$

将利用等价原则 $E[L]=0$ 得到的保费记为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$，显然

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0$$

从而

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{4-3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}) \\ &= [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\,\bar{a}_x)^2}\end{aligned} \tag{4-4}$$

又因为 $E[L]=0$，所以

$$\mathrm{Var}(L) = E[L^2] \tag{4-5}$$

【例 4－2】 假设死亡力 $\mu=0.04$ 是常值，利息力 $\delta=0.06$。试计算 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 与保险损失 L 的方差 $\mathrm{Var}(L)$。

解：$\bar{A}_x = \int_0^\infty 0.04\exp(-0.04t)\exp(-0.06t)\,dt = 0.4$

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^\infty \exp(-0.04t)\exp(-0.06t)\,dt = 10$$

$${}^2\bar{A}_x = \int_0^\infty 0.04\exp(-0.04t)(\exp(-0.06t))^2\,dt = 0.25$$

于是

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = 0.04$$

$$\mathrm{Var}(L) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{(\delta\,\bar{a}_x)^2} = 0.25$$

【例 4－3】 保额是 1 的完全连续终身寿险，已知 $\delta=0.06$，$\bar{A}_x=0.3$，${}^2\bar{A}_x=0.2$，求使 $E(L^2)$ 最小的年缴保费。

解： 令 $y=\dfrac{\bar{P}}{\delta}$，则有

$$\begin{aligned}E[L^2] &= (E[L])^2 + \mathrm{Var}(L) \\ &= ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)(1+y)^2 + [\bar{A}_x(1+y) - y]^2 \\ &= (0.2 - 0.3^2)(1+2y+y^2) + (0.3-0.7y)^2 \\ &= 0.11 + 0.22y + 0.11y^2 + 0.09 - 0.42y + 0.49y^2 \\ &= 0.6y^2 - 0.2y + 0.2\end{aligned}$$

显然，当 $y=1/6$ 时，$E(L^2)$ 最小。此时 $\bar{P}=y\delta=0.01$

利用等价原则，可以确定一般的完全连续人寿保险的年度保费。因为，一般的损失为：

$$b_Tv_T - \bar{P}Y = Z - \bar{P}Y \tag{4-6}$$

其中：b_T 和 v_T 分别为前面定义过的保额函数和贴现因子；$\bar{P}$ 为完全连续净年度保费的一般符号；Y 是如第 3 章中定义的连续型年金的现值随机变量；$Z = b_T v_T$ 为相应保险的现值随机变量。

由等价原则，有

$$E[b_T v_T - \bar{P} Y] = 0$$

或

$$\bar{P} = E[b_T v_T] / E[Y] \tag{4-7}$$

由上式，我们可以确定一般保险的年度保费，对一些主要的保险，可有如下净保费公式：

1. 终身寿险

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

2. n 年期定期保险

$$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

3. n 年期两全保险

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

4. n 年期生存保险

$$\bar{P}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

5. h 年支付，终身寿险

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$$

6. h 年支付，n 年期两全保险

$${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{h}|}}$$

7. 延期 n 年的终身生命年金

$$\bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x) = \frac{{}_nE_x\, \bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

【例 4-4】 假设死亡力 $\mu = 0.04$，利息力 $\delta = 0.06$ 均为常数。求连续型单位保额的 20 年定期死亡保险的净保费和相应的损失 L 的方差。

解：

$$\bar{A}^1_{x:\overline{20}|} = \int_0^{20} v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)\,dt = \int_0^{20} e^{-(\delta+\mu)t}\mu\,dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}[1 - e^{-20(\delta+\mu)}]$$

$$=0.4(1-e^{-2})=0.34587$$

$$^{2}\bar{A}^{1}_{x:\overline{20}|}=\int_0^{20} v^{2t}{}_tp_x\,\mu_x(t)\,dt=\int_0^{20} e^{-(2\delta+\mu)t}\mu dt=\frac{\mu}{\mu+2\delta}[1-e^{-20(2\delta+\mu)}]$$

$$=0.4(1-e^{-3.2})=0.3837$$

$$\bar{a}_{x:\overline{20}|}=\int_0^{20} v^t\,{}_tp_x dt$$

$$=\frac{1-e^{-20(\delta+\mu)}}{\delta+\mu}$$

$$=8.64665$$

于是

$$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{20}|})=\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{20}|}}{\bar{a}_{x:\overline{20}|}}$$

$$=\mu$$

$$=0.04$$

$$\mathrm{Var}(L)=[^{2}\bar{A}_{x:\overline{20}|}-(\bar{A}_{x:\overline{20}|})^2]\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2$$

$$=0.73354$$

式（4－7）表明，净保费是相应的保险与年金的精算现值的比率。因此，可以利用年金与保险之间的关系式，推导出更多的可用于不同场合的简单公式。

由

$$1=\delta\,\bar{a}x+\bar{A}_x$$

有

$$\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)=1/\bar{a}_x$$

于是有

$$\bar{P}(\bar{A}_x)=1/\bar{a}_x-\delta$$

$$=\frac{1-\delta\,\bar{a}_x}{\bar{a}_x}$$

$$=\frac{\delta\,\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$$

由

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}$$

有

$$\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}+\bar{A}_{x:\overline{n}|}=1$$

于是有

$$\delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

从而

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta$$

$$= \frac{1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{\delta\,\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}$$

【例 4-5】 对于 55 岁的被保险人的如下保险，利用示例生命表，并假设在完全连续的情况下，假设实际利率 $i=4\%$，以及死亡在各年度内均匀分布，分别求它们的第 25 个百分位点保费和净保费。

(1) 20 年期两全保险；

(2) 20 年期定期死亡保险；

(3) 10 年期定期死亡保险。

解：

(1) 20 年期两全保险的损失函数为

$$L = \begin{cases} v^T - \bar{P}\bar{a}_{T} = v^T\left(1 + \dfrac{\bar{P}}{\delta}\right) - \dfrac{\bar{P}}{\delta} & T < 20 \\ v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} & T \geqslant 20 \end{cases}$$

显然，该损失函数关于 T 是一个单调不增的函数。因此，要使 $L>0$ 概率为 25%，T 的取值就应该小于 $\xi_T^{0.25}$。

由示例生命表，可以发现，

$$l_{55} = 930\ 283$$

$$l_{73.02011} = 697\ 712.25$$

$$= 0.75 \times 930\ 283$$

因此

$$Pr\ (T < 18.02011) = 0.25$$

从而第 25 个百分位点保费为使 $T=18.02011$ 时损失为零的保费，即

$$v^{18.02011} = \bar{P}\bar{a}_{\overline{18.02011}|}$$

于是，第 25 个百分位点保费为

$$\bar{P} = 0.03817;$$

这种保险的净保费为：

$$\bar{P}(\bar{A}_{55:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{55:\overline{20}|}}{\bar{a}_{55:\overline{20}|}},$$

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{55:\overline{20}|} &= \bar{A}^{1}_{55:\overline{20}|} + \bar{A}_{55:\overline{20}|}^{\ \ \ \ 1} \\
&= \bar{A}_{55} - {}_{20}p_{55}\, v^{20} \bar{A}_{75} + \bar{A}_{55:\overline{20}|}^{\ \ \ \ 1} \\
&= \bar{A}_{55} + {}_{20}E_{55}(1 - \bar{A}_{75}) \\
&= \frac{i}{\delta} A_{55} + {}_{20}E_{55}\left(1 - \frac{i}{\delta} A_{75}\right) \\
&= 0.50605
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{55:\overline{20}|} &= \frac{1 - \bar{A}_{55:\overline{20}|}}{\delta} \\
&= 12.59409
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\bar{P}(\bar{A}_{55:\overline{20}|}) &= \frac{\bar{A}_{55:\overline{20}|}}{\bar{a}_{55:\overline{20}|}} \\
&= 0.04018
\end{aligned}
$$

（2）20 年期定期死亡保险的损失函数为

$$
L = \begin{cases} v^{T} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|} = v^{T}\left(1 + \dfrac{\bar{P}}{\delta}\right) - \dfrac{\bar{P}}{\delta} & T < 20 \\ -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} & T \geqslant 20 \end{cases}
$$

同样，该损失函数关于 T 单调，是一个不增的函数。

因为

$$
\Pr(T < 18.02011) = 0.25
$$

所以同样有第 25 个百分位点保费为

$$
\bar{P} = 0.03817
$$

很显然，这种结果有明显的不合理之处：事实上，两全保险明显比定期死亡保险提供更多的保额，但从保费的角度看，两者的保费却相等！

对于这种保险的净保费，有

$$
\begin{aligned}
\bar{P}(\bar{A}^{1}_{55:\overline{20}|}) &= \frac{\bar{A}^{1}_{55:\overline{20}|}}{\bar{a}_{55:\overline{20}|}} \\
&= 0.0144
\end{aligned}
$$

（3）10 年期定期死亡保险的损失函数为

$$
L = \begin{cases} v^{T} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|} = v^{T}\left(1 + \dfrac{\bar{P}}{\delta}\right) - \dfrac{\bar{P}}{\delta} & T < 10 \\ -\bar{P}\bar{a}_{\overline{10}|} & T \geqslant 10 \end{cases}
$$

注意到因为 $Pr(T < 18.02011) = 0.25$，所以 $Pr(T < 10) < 0.25$（事实上，根据示例生命表，有 $Pr(T < 10) = 1 - 848\ 075/930\ 283 = 0.08837$），因

此，即使是令 $\bar{P}=0$，仍然有

$$\begin{aligned} Pr(L>0) &= Pr(T<10) \\ &= 0.08837 \\ &< 0.25 \end{aligned}$$

因此，此时的第25个百分位点保费为零。

这种保险的净保费为

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{A}^{1}_{55:\overline{10|}}) &= \frac{\bar{A}^{1}_{55:\overline{10|}}}{\bar{a}_{55:\overline{10|}}} \\ &= 0.00846 \end{aligned}$$

由上例可以看出，百分点保费方法存在一些不合理的地方，也正因为如此，所以这种方法在实务中的应用范围非常有限。

对于终身寿险，我们有

$$L = v^{T} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}},\quad T \geqslant 0$$

于是 L 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{L}(u) &= Pr(L \leqslant u) \\ &= Pr\left[v^{T} - \bar{P}\left(\frac{1-v^{T}}{\delta}\right) \leqslant u\right] \\ &= Pr\left[v^{T} \leqslant \frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right] \\ &= Pr\left[T \geqslant -\frac{1}{\delta}\ln\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right] \\ &= 1 - F_{T}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right) \end{aligned} \qquad (4-8)$$

L 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} dF_{L}(u)/du &= f_{L}(u) \\ &= f_{T}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta u + \bar{P}}{\delta + \bar{P}}\right]\right)\left(\frac{1}{\delta u + \bar{P}}\right) \end{aligned} \qquad (4-9)$$

【例 4－6】 条件如例 4－5，另外假设 $T(55)$ 服从均匀分布，即 ${}_{t}p_{55}\,\mu_{55}(t) = 1/45,\ 0<t<45$。

分别对三个亏损变量，给出 L 的分布函数，并且确定使 $Pr(L>0) \leqslant 0.25$ 的最小的非负数 $\bar{P}$，同时作为对照，计算三种保险的净保费。

解：

(1) 因为20年期两全保险的损失函数为

$$L=\begin{cases} v^T-\bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}, & T<20 \\ v^{20}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}, & T\geqslant 20 \end{cases}$$

为单调不增函数，

$$F_L(u)=\begin{cases} 0, & u<v^{20}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} \\ 1+\dfrac{1}{\ln 1.04}\cdot\dfrac{\ln[(u\ln 1.04+\bar{P})/(\ln 1.04+\bar{P})]}{45}, & v^{20}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}\leqslant u\leqslant 1 \\ 1, & u>1 \end{cases}$$

因此，要使 $\Pr(L>0)\leqslant 0.25$，即 $F_L(0)\leqslant 0.75$，需要

$$1+\frac{1}{\ln 1.04}\cdot\frac{\ln[\bar{P}/(\ln 1.04+\bar{P})]}{45}=0.75,$$

从而

$$\begin{aligned}\ln[\bar{P}/(\ln 1.06+\bar{P})] &= -0.25\times 45\times\ln 1.04 \\ &= -0.44123\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \ln 1.06/[\exp(0.44123)-1] \\ &=0.07072\end{aligned}$$

相应的净保费为

$$\begin{aligned}\bar{P}(\bar{A}_{55:\overline{20}|}) &= \frac{\int_0^{20}(v^t/45)\,dt+(25/45)v^{20}}{\int_0^{20}v^t[1-(t/45)]\,dt} \\ &=0.05023\end{aligned}$$

(2) 因为 20 年期定期死亡保险的损失函数为

$$L=\begin{cases} v^T-\bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|}=v^T\left(1+\dfrac{\bar{P}}{\delta}\right)-\dfrac{\bar{P}}{\delta} & T<20 \\ -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} & T\geqslant 20 \end{cases}$$

为单调不增函数，所以，

$$F_L(u)=\begin{cases} 0 & u<-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} \\ 25/45 & -\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}\leqslant u\leqslant v^{20}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} \\ 1+\dfrac{1}{\ln 1.04}\cdot\dfrac{\ln[(u\ln 1.04+\bar{P})/(\ln 1.04+\bar{P})]}{45} & v^{20}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|}<u\leqslant 1 \\ 1 & u>1 \end{cases}$$

同样，要使 $Pr(L>0)\leqslant 0.25$，即 $F_L(0)\leqslant 0.75$，同样有

$$\overline{P} = 0.07072$$

相应的净保费为

$$\overline{P}(\overline{A}^{1}_{55:\overline{20|}}) = \frac{\int_0^{20} (v^t/45)\,dt}{\int_0^{20} v^t[1 - (t/45)]\,dt}$$

$$= 0.02755$$

（3） 因为10年期定期死亡保险的损失函数为

$$L = \begin{cases} v^T - \overline{P}\overline{a}_{\overline{T|}} = v^T\left(1 + \dfrac{\overline{P}}{\delta}\right) - \dfrac{\overline{P}}{\delta} & T < 10 \\ -\overline{P}\overline{a}_{\overline{10|}} & T \geqslant 10 \end{cases}$$

为单调不增函数，所以，

$$F_L(u) = \begin{cases} 0 & u < -\overline{P}\overline{a}_{\overline{10|}} \\ 35/45 & -\overline{P}\overline{a}_{\overline{10|}} \leqslant u \leqslant v^{10} - \overline{P}\overline{a}_{\overline{10|}} \\ 1 + \dfrac{1}{\ln 1.04} \cdot \dfrac{\ln[(u\ln 1.04 + \overline{P})/(\ln 1.04 + \overline{P})]}{45} & v^{10} - \overline{P}\overline{a}_{\overline{10|}} < u \leqslant 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

类似地，注意到 35/45 > 0.75，所以，即使 $\overline{P} = 0$，也有

$$Pr(L > 0) = 10/45$$
$$< 0.25$$

得到同上例一样的不同寻常的解！

此种保险相应的净保费为

$$\overline{P}(\overline{A}^{1}_{55:\overline{10|}}) = \frac{\int_0^{10} (v^t/45)\,dt}{\int_0^{10} v^t[1 - (t/45)]\,dt}$$

$$= 0.0248$$

§4.2　完全离散保费

上一节我们讨论保额和净保费都是连续型的情况。实务中，更常见的是，保额在死亡发生一定时间间隔后才能支付，保费则以期缴的方式支付，即相隔一期支付一次，第一次支付的时刻与保险单的发行时刻相同。与这种方式对应的模型为完全离散模型。准确地说，完全离散指的是保额在被保险人死亡年度末或相应期末支付，保费也按期支付，即保额和保费的支付都是离散型的，在这种模型下，支付的保费形成一项期

初付生命年金。

首先，我们讨论等额年度保费的情况。

设单位保额终身寿险的等额年度保费为 P_x，则保险的损失函数为：

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \qquad K = 0,1,2,\cdots \tag{4-10}$$

由等价原则 $E[L]=0$，有

$$P_x = A_x / \ddot{a}_x \tag{4-11}$$

由

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(L) &= \mathrm{Var}(v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}}) \\
&= \mathrm{Var}\left[\left(1 + \frac{P_x}{d}\right)v^{K+1} - \frac{P_x}{d}\right] \\
&= \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \mathrm{Var}(v^{K+1}) \\
&= \left(\frac{1}{d\ddot{a}_x}\right)^2 \mathrm{Var}(v^{K+1}) \\
&= \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}
\end{aligned} \tag{4-12}$$

由于 $E[L]=0$，所以

$$\mathrm{Var}(L) = E[L^2]$$

【例 4-7】 假设 ${}_{k|}q_x = c(0.96)^{k+1}$，$k=0$，1，2，…其中，$c=\dfrac{0.04}{0.96}$，$i=4\%$。计算 P_x 和 $\mathrm{Var}(L)$

解： 根据 A_x 的定义，得

$$\begin{aligned}
A_x &= E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_x \\
&= c\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(0.96)^{k+1} = c\frac{0.96v}{1-0.96v} = 0.5
\end{aligned}$$

又因

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$$

故

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1-A_x} = \frac{0.04}{1+0.04} \cdot \frac{0.5}{1-0.5} \\
&= 0.038462
\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}
{}^2A_x &= E[(v^2)^{k+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} {}_{k|}q_x \\
&= c\sum_{k=0}^{\infty} (v^2 \cdot 0.96)^{k+1} = c\frac{0.96v^2}{1-0.96v^2} = 0.328947
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Var}(L)=\frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}=\frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(1-A_x)^2}=\frac{0.328947-(0.5)^2}{(1-0.5)^2}$$

$$=0.31579$$

与完全连续的情况类似，利用等价原则，同样考虑一般的完全离散人寿保险，其损失函数为

$$b_{K+1}v_{K+1}-PY$$

其中：b_{K+1}和 v_{K+1}分别为前面定义过的保额函数和贴现因子；P 是在每个保单年度初支付的年度保费的一般记号；Y 是相应的离散型年金现值随机变量。由等价原则有

$$E[b_{K+1}v_{K+1}-PY]=0$$

或

$$P=\frac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[Y]} \tag{4-13}$$

由此，可以得出各种完全离散保险的净保费公式：

1. 终身寿险

$$P_x=A_x/\ddot{a}_x$$

2. n 年期定期保险

$$P^1_{x:\overline{n}|}=\frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

3. n 年期两全保险

$$P_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

4. h 年支付，终身寿险

$${}_hP_{x:\overline{n}|}=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

5. h 年支付，n 年期两全保险

$${}_hP_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

6. n 年期生存保险

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

7. 延期 n 年的终身生命年金

$$P({}_{n|}\ddot{a}_x)=\frac{{}_nE_x\,\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

【例 4-8】 假设死亡力 $\mu=0.04$，利息力 $\delta=0.06$ 均为常数。求离散型单位保额的 20 年定期死亡保险的净保费和相应的损失 L 的方差。

解：

$$A^1_{x:\overline{20}|} = \sum_{k=0}^{19} v^{(k+1)}{}_kp_x\, q_{x+k} = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}[1-e^{-20(\mu+\delta)}]$$

$$=0.33553$$

$${}^2A^1_{x:\overline{20}|} = \sum_{k=0}^{19} v^{2(k+1)}{}_kp_x\, q_{x+k} = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}}[1-e^{-20(\mu+2\delta)}]$$

$$=0.22562$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = \frac{1-A_{x:\overline{20}|}}{d}$$

$$=9.08604$$

于是

$$P^1_{x:\overline{20}|} = \frac{A^1_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}$$

$$=0.03693$$

$$\mathrm{Var}(L) = \frac{{}^2A^1_{x:\overline{20}|}-(A^1_{x:\overline{20}|})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{20}|})^2} = 0.40374$$

【例 4－9】 考虑保额为 1 万元的完全离散终身寿险，令 π 为年度保费，$L(\pi)$ 为一份保单在发行时的亏损随机变量。利用示例生命表，并假设利率为4%，被保险对象为（35）：

（1）由 $L(\pi_1)$ 的均值为零来确定保费 π_1，并计算 $L(\pi_1)$ 的方差；

（2）π_2 是使 $L(\pi_2)$ 为正的概率小于 0.5 的最小的非负数（保费），并计算 $L(\pi_2)$ 的方差；

（3）利用正态分布近似，确定使 100 份独立保单的总损失为正的概率为 0.05 的保费 π_3。

解：

（1）由等价原则，有

$$\pi_1 = 10\,000P_{35}$$

$$=10\,000\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}}$$

$$=99.9789$$

$$\mathrm{Var}(L(\pi_1)) = (10\,000)^2\frac{{}^2A_{35}-(A_{35})^2}{(d\ddot{a}_{35})^2}$$

$$=(10\,000)^2[0.05798-(0.20631)^2]/(20.63582\times 0.04/1.04)^2$$

$$=2\,447\,260.026$$

（2）$Pr[L(\pi_2)>0]<0.5$ 相当于

$$Pr(10\,000v^{K+1}-\pi_2\ddot{a}_{\overline{K+1}|}>0)<0.5$$

即

$$\Pr\left(v^{K+1} > \frac{\frac{\pi_2}{d}}{10\ 000 + \frac{\pi_2}{d}}\right) < 0.5$$

$$\Pr\left(K < \ln\left(1 + \frac{10\ 000d}{\pi_2}\right)/\delta - 1\right) < 0.5$$

由示例生命表知，

$$l_{79} > l_{35}/2 = 489\ 869 > l_{80}$$

即

$$Pr(K > 44) > 1/2 \text{ 且 } Pr(K > 45) < 1/2$$

也即

$$Pr(K < 44) < 1/2 \text{ 且 } Pr(K < 45) > 1/2$$

因此，π_2 应满足

$$10\ 000v^{45} - \pi_2 \ddot{a}_{\overline{45|}} = 0$$

从而

$$Pr[L(\pi_2) > 0] = Pr[K < 42 = 77 - 35] < 0.5$$

于是

$$\pi_2 = \frac{10\ 000}{\ddot{s}_{\overline{45|}}} = 79.44669$$

$$\mathrm{Var}(L(\pi_2)) = (10\ 000)^2[{}^2A_{35} - (A_{35})^2](1 + \frac{\pi_2}{10\ 000}\frac{1}{d})^2$$

$$= 2\ 244\ 273.249$$

(3) 每份保单的损失为

$$L(\pi_3) = 10\ 000v^{K+1} - \pi_3 \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$$

$$= (10\ 000 + \pi_3/d)v^{K+1} - \pi_3/d$$

该损失的期望和方差分别为

$$E[L(\pi_3)] = (10\ 000 + \pi_3/d)A_{35} - \pi_3/d$$

$$= 0.123(10\ 000 + \pi_3/d) - \pi_3/d$$

$$\mathrm{Var}(L(\pi_3)) = (10\ 000 + \pi_3/d)^2[{}^2A_{35} - (A_{35})^2]$$

$$= (10\ 000 + \pi_3/d)^2 \times 0.01498$$

因为各份保单的损失独立同分布，所以总损失随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_3)$$

的期望和方差分别为

$$E[S] = 100E[L(\pi_3)]$$

$$\mathrm{Var}(S) = 100\mathrm{Var}(L(\pi_3))$$

并且 S 近似服从正态分布，因此

由

$$Pr(S>0)=Pr\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}>-\frac{E[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right)=0.05$$

有

$$-\frac{E[S]}{\sqrt{\text{Var}(S)}}=1.645$$

即

$$\frac{-10E[L(\pi_3)]}{\sqrt{\text{Var}[L(\pi_3)]}}=1.645$$

于是

$$-10[(10\,000+\pi_3/d)A_{35}-\pi_3/d]=1.645\times(10\,000+\pi_3/d)\times[{}^2A_{35}-(A_{35})^2]^{1/2}$$

$$-10[(10\,000d+\pi_3)A_{35}-\pi_3]=1.645\times(10\,000d+\pi_3)\times[{}^2A_{35}-(A_{35})^2]^{1/2}$$

所以

$$\begin{aligned}\pi_3 &=(10\,000d)\{1.645\times[{}^2A_{35}-(A_{35})^2]^{1/2}+10A_{35}\}/\{10-10A_{35}-\\ &\quad 1.645[{}^2A_{35}-(A_{35})^2]^{1/2}\}\\ &=112.77587\end{aligned}$$

同样，利用保险和年金的关系，可以推导出许多适用于不同场合的完全离散净保费关系式。如：

由

$$d\ddot{a}_x+A_x=1$$

有

$$1/\ddot{a}_x=d+P_x \tag{4-14}$$

上式有非常明确的意义：考虑（x）的单位借款，借款人（x）可以利用其一生的时间来等额分期偿还，在其活着的条件下，每年初还款一次，直到死亡为止。显然，这种还款方式下，每次所需还款金额为 $1/\ddot{a}_x$；

另外，借款人（x）也可以在其活着的条件下，每年初还当年利息 d，直到死亡为止，然后在死亡年度末归还本金 1。本金 1 可以通过购买离散型单位保额终身寿险来筹集，而要得到这样一份终身寿险，只需在活着的情况下，每年初向保险公司缴纳当期保费 P_x 即可。

比较两种还款支付，可以发现，式（4－14）成立。

由式（4－14），有

$$\begin{aligned}P_x &=1/\ddot{a}_x-d\\ &=(1-d\ddot{a}_x)/\ddot{a}_x\\ &=dA_x/(1-A_x)\end{aligned} \tag{4-15}$$

上式也可以有直观的解释：考虑被保险人（x）向第三方借了一笔钱用于购买一份离散型单位保额终身寿险，借款金额为该保险的趸缴净保费，即 A_x，该被保险人的还款安排是：在其活着的情况下，每年初支付当年应

付利息 dA_x，到死亡年度末将本金偿还。由于该被保险人利用趸缴保费的方式购得一份终身寿险，所以该被保险人可以利用保险公司在其死亡年度末向其支付的保险金的一部分用于偿还所借的本金，显然，还掉本金后，得到的保额还剩余 $1-A_x$。考察（x）借款和购买保险的净现金流，可以发现，（x）其实通过在其活着的情况下，每年支付 dA_x，这些支付给（x）带来的回报是，在其死亡年度末支付的 $1-A_x$，比照保险的思想，相当于每年支付 dA_x 的保费，可以购得 $1-A_x$ 单位的终身寿险，从而，要购得 1 单位保额的终身寿险，年缴保费应该是 $dA_x/(1-A_x)$。于是，式（4－15）成立。

类似地，由

$$d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}=1$$

有

$$1/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=d+P_{x:\overline{n}|} \tag{4-16}$$

从而

$$\begin{aligned}P_{x:\overline{n}|}&=1/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-d\\&=[1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}]/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\\&=dA_{x:\overline{n}|}/(1-A_{x:\overline{n}|})\end{aligned} \tag{4-17}$$

式（4－16）和式（4－17）可以有类似于式（4－14）和式（4－15）的解释。

【例 4－10】 证明并且解释

$$P_{x:\overline{n}|}={}_nP_x+P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1-A_{x+n}) \tag{4-18}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}&=A_{x:\overline{n}|}\\&=A_{x:\overline{n}|}^{1}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_nP_x\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}&=A_x\\&=A_{x:\overline{n}|}^{1}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}A_{x+n}\end{aligned}$$

所以

$$(P_{x:\overline{n}|}-{}_nP_x)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1-A_{x+n})$$

从而

$$P_{x:\overline{n}|}={}_nP_x+P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1-A_{x+n})$$

解释：$P_{x:\overline{n}|}$和${}_nP_x$ 都是在（x）生存的前提下的最多支付 n 年的年缴保费，在这 n 年间，两份保险提供的保障是一样的，即在（x）的死亡年度末支付 1，所不同的是，如果（x）生存到 $x+n$，$P_{x:\overline{n}|}$对应的保险给被保险人在 n 时支付生存给付金 1，而${}_nP_x$ 对应的保险留给被保险人的则是一份单位保额的（$x+n$）的终身寿险，并且被保险人无须再缴任何保费，显然，A_{x+n}就是这份保险在 $x+n$ 时的精算现值。在 $x+n$ 时两种保险的待遇差相当于是一份（$1-A_{x+n}$）单位的 n 年期生存保险，而这份生存保险是由 n 年缴

费、年缴保费为 $P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x$ 对应的。

实务中，人寿保险一般在死亡后不久支付，而不是在死亡年度末，因此，需要有年度支付的半连续净保费。这种保费，对照表 4－1 和表 4－2，记为 $P(\bar{A}_x)$，$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$，$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$，${}_hP(\bar{A}_x)$ 和${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$。利用等价原则可以得到类似于表 4－2 中的公式，只需要将 $\bar{A}_x$ 取代 A。例如：

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} \tag{4-19}$$

及

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{4-20}$$

在均匀分布假设下，上两式可以分别变为

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_x) &= \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \\ &= P(\bar{A}_x)P_x \end{aligned}$$

及

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

§4.3 分缴保费

本节我们考虑年缴保费 m 次的情况，按照死亡保额是否按照所实现的保费进行调整划分，我们将本节的内容分为两部分：真实分缴保费和可分配的保费。

4.3.1 真实分缴保费

真实分缴保费是指年缴保费 m 次，且死亡保额不作调整时的保费。我们用 $P_x^{(m)}$ 记离散型单位保额终身寿险的年缴 m 次、在每 $1/m$ 年初缴纳的等额年度净保费。$P^{(m)}(\bar{A}_x)$表示相应的连续型终身寿险的年缴 m 次的等额年度净保费。m 一般为 2，4 或 12。

例如，对于连续型保险，由等价原则可以得到如下的保费公式：

1. 终身寿险

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

2. n 年期定期保险

$$P^{1(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$$

3. n 年期生存保险

$$P^{(m)}{}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}}$$

4. n 年期两全保险

$$P_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}}$$

5. h 年支付，终身寿险

$${}_hP_x^m = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{(m)}}$$

6. h 年支付，n 年期两全保险

$$P_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{(m)}}$$

类似地，对于连续型保险，由等价原则可以得到如下的保费公式：

1. 终身寿险

$$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

2. n 年期定期保险

$$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{1}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}}$$

3. h 年支付，n 年期定期生存保险

$${}_hP^m(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}) = \frac{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{(m)}}$$

4. n 年期两全保险

$$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}}$$

5. h 年支付，终身寿险

$${}_hP^m(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{(m)}}$$

6. h 年支付，n 年期两全保险

$${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}^{(m)}}$$

有时也可以利用年度保费来表示真实分缴保费，如

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

$$= \frac{P_x\,\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

和

$$ {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} $$

$$ = \frac{{}_hP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}} \tag{4-21} $$

【例 4-11】 (1) 对于 (50) 的 20 年期、保额为 1 万的保额在死亡年度末 (离散) 支付的两全保险，计算其按半年度缴纳的年均衡净保费。应用示例生命表和实际利率为 4%。

(2) 若死亡时刻立即支付保险金，计算相应的 (半连续) 保费。

对上述两种情况，均假设死亡在每个年龄区间服从均匀分布。

解：(1) 因为

$$ P_{50:\overline{20}|}^{(2)} = \frac{A_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)}}, $$

$$ \begin{aligned} A_{50:\overline{20}|} &= A_{50:\overline{20}|}^{1} + A_{50:\overline{20}|}^{\ \ \ 1} \\ &= A_{50} - {}_{20}p_{50}v^{20}A_{70} + {}_{20}p_{50}v^{20} \\ &= A_{50} + {}_{20}E_{50}(1 - A_{70}) \\ &= 0.48446 \end{aligned} $$

$$ \ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(2)(1 - {}_{20}E_{50}) $$

$$ \ddot{a}_{50:\overline{20}|} = \frac{1 - A_{50:\overline{20}|}}{d} = 13.40404 $$

$$ d = 0.03846 $$

$$ i^{(2)} = 0.03961 $$

$$ d^{(2)} = 0.03884, $$

$$ \alpha^{(2)} = \frac{id}{i^{(2)}d^{(2)}} = 0.99997 $$

$$ \beta^{(2)} = \frac{i - i^{(2)}}{i^{(2)}d^{(2)}} = 0.2523 $$

所以

$$ \ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)} = 13.24421 $$

$$ 1\ 000P_{50:\overline{20}|}^{(2)} = 365.79003 $$

(2)
$$ P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)}} $$

因为

$$\bar{A}_{50:\overline{20|}} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{50:\overline{20|}} + A_{50:\overline{20|}}^{\ \ \ \ 1}$$
$$= 0.48678$$

所以

$$10\,000 P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 10\,000 \times 0.48678/13.24421 = 367.54174$$

4.3.2 可分配保费

可分配保费是另外一种分缴保费，它针对的是在死亡时刻除了按照合同约定的保额外，还需要将相对于死亡时间点和下次计划支付保费的时间点之间的时间长度所对应的部分保费——未实现的保费——返还给被保险人的情况。在实务中，可能按照一种不考虑利息的按比例方式来确定返还的金额。我们这里考虑利息，并将这种保费看成一种可分配的期初付年金。等额的年度净保费情况下的可分配保费的有关记号与半连续情况下的真实分缴保费的记号类似。所不同之处在于上标 m 两边的括号，一个为小括号，另一个则为大括号。因为考虑到保费返还的特征，所以我们自然假设死亡保额在死亡即刻支付。

考虑 h 年支付的年缴保费 m 次的 n 年期两全保险的情况。由等价原则，我们有

$$_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}}$$

于是

$$
\begin{aligned}
_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) &= \bar{A}_{x:\overline{n|}}/\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h|}} \\
&= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta\,\bar{a}_{x:\overline{h|}}/d^{(m)}} \\
&= \frac{d^{(m)}}{\delta}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})
\end{aligned}
\tag{4-22}
$$

这表明，每次支付的 $1/m$ 份的保费为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\,{}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) &= \frac{1-(1-d)^{1/m}}{\delta}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) \\
&= \bar{a}_{\overline{1/m|}}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})
\end{aligned}
\tag{4-23}
$$

特别地，对于 $m=1$ 的情况，我们有

$$_{h}P^{\{1\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{a}_{\overline{1|}}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) \tag{4-24}$$

式（4-23）和式（4-24）表明，可分配的保费等价于完全连续保费按照利息贴现到相应支付期期初的值。对于其他的保险类型，存在类似的公式。例如，令 h 和 $n\to\infty$，式（4-24）就变为

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_{x}) = \bar{a}_{\overline{1|}}\,\bar{P}(\bar{A}_{x}) \tag{4-25}$$

可分配净保费 $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$ 和半连续净保费 $P(\bar{A}_x)$ 一样，都是在每年初支付，当然前提都是（x）生存。相应的保额都是在死亡时刻支付单位保额。所不同的仅仅在于 $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$ 对应的保险提供未实现保费的返还，因此，每年初支付的等额的保费差 $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)-P(\bar{A}_x)$ 正好是提供未实现保费返还的保险的这一特征的价值表现。

事实上，由式（3－64），可以发现返还的保费的现值随机变量为

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x)v^T\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}/\bar{a}_{\overline{1}|}$$

于是，相应的精算现值为

$$\begin{aligned}\bar{A}_x^{PR} &= P^{\{1\}}(\bar{A}_x)E[v^T\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}]/\bar{a}_{\overline{1}|}\\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{A}_x-A_x)/\delta \qquad (4-26)\end{aligned}$$

上式表明，这种提供未实现保费返还的保单特征的精算现值等于自（x）死亡时刻开始的年支付率为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 的永续年金的精算现值减去自（x）死亡年度末开始的年支付率为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 的永续年金的精算现值。

根据式（4－26），由等价原则知，要得到精算现值为 $\bar{A}_x^{PR}$ 的保险，等额的年度保费为

$$\begin{aligned}P(\bar{A}_x^{PR}) &= \bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{A}_x-A_x)/\delta\ddot{a}_x\\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)(d\ddot{a}_x-\delta\bar{a}_x)/(\delta\ddot{a}_x)\\ &= \left(\frac{d}{\delta}-\bar{a}_x/\ddot{a}_x\right)\bar{P}(\bar{A}_x)\\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)(d\ddot{a}_x-\delta\bar{a}_x)/(\delta\ddot{a}_x)\\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d}{\delta}-\bar{A}_x/\ddot{a}_x\\ &= P^{\{1\}}(\bar{A}_x)-P(\bar{A}_x) \qquad (4-27)\end{aligned}$$

上述分析可以推广到每年支付 m 次保费的情况和其他的保险中。

【例 4－12】 假设例 4－11（2）中保单有可分配的保费，求相应的年度净保费。

解： 利用例 4－11 中相关计算结果，有

$$\begin{aligned}10\,000P^{\{2\}}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) &= 10\,000\frac{d^{(2)}}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\\ &= 10\,000\frac{d^{(2)}}{\delta}\frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\bar{a}_{50:\overline{20}|}}\\ &= 10\,000\frac{d^{(2)}}{\delta}\frac{\delta\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{1-\bar{A}_{50:\overline{20}|}}\end{aligned}$$

$$= 10\ 000 \frac{d^{(2)} \bar{A}_{50:\overline{20}|}}{1 - \bar{A}_{50:\overline{20}|}}$$

$$= 368.39046$$

与例 4－11（2）中结果比较，有

$$10\ 000 P^{\{2\}}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) - 10\ 000 P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 0.84872$$

即，如果要求未实现的保费返还，每年需要多缴保费 0.84872 元。

§4.4 累积型保额

本节考虑离散型保险，保费按年度支付。对于完全连续的保费，可以有类似的讨论，对于半连续的保费，经过某些调整后，也可以有类似的讨论。

首先考虑（x）的在第 $k+1$ 年的死亡保额为 $\ddot{s}_{\overline{K+1}|}$ 的 n 年定期保险的精算现值，保额在保单发行时的现值随机变量为

$$W = \begin{cases} v^{K+1}\ddot{s}_{\overline{K+1}|} = \dfrac{v^{K+1}[(1+j)^{K+1} - 1]}{d_{(j)}} & 0 \leqslant K < n \\ 0 & K \geqslant n \end{cases}$$

其中保险人的现值以利率 i 计算，$d_{(j)}$ 是与利率 j 等价的贴现率。于是精算现值为

$$E[W] = \frac{A'^{1}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d_{(j)}} \qquad (4-28)$$

其中计算 $A'^{1}_{x:\overline{n}|}$ 的利率为 $i' = (i-j)/(1+j)$。

如果 $i = j$，则 $i' = 0$，于是精算现值为

$$\frac{{}_nq_x - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{1 - {}_np_x - A_{x:\overline{n}|} + v^n\ {}_np_x}{d}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\ \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\ \ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad (4-29)$$

上式表明，当 $i = j$ 时，这种特殊的定期保险等价于 n 年期定期生命年金去掉（x）生存到 n 的情况。因为定期保险在（x）生存到 n 时没有保额支付，而在（x）生存到 n 的条件下，生命年金在 n 时的价值为 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$。

考虑（x）的如下两种选择：

（1）以年度保费 $P_{x:\overline{n}|}$ 购买 n 年期单位两全保险

（2）在 n 年内，每年初存款 $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 并购买一份特殊的单减的定期保险，该特殊保险在第 $k+1$ 年的保额为

$$1 - \ddot{s}_{\overline{K+1}|}/\ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

假设所有交易使用的利率均为 i，那么，如果（x）在 n 年内死亡，那

么，第二种保险的保额与存款的累积值之和正好与第一种的两全保险的保额 1 相等。因此，我们可以说

（两全保险的年度净保费 $P_{x:\overline{n}|}$）=（特殊的定期保险的年度净保费）+

（年度存款额 $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$）

事实上，考虑该特殊递减的定期保险的现值随机变量

$$\tilde{W}=\begin{cases} v^{K+1}\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)=v^{K+1}-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} & 0\leqslant K<n \\ 0 & K\geqslant n \end{cases}$$

记 $\tilde{W}$ 的精算现值为 $\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$，于是

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}&=E\ [\tilde{W}]\\ &=A^{1}_{x:\overline{n}|}-\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_{n}p_{x}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\\ &=A^{1}_{x:\overline{n}|}-\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_{n}E_{x}\ \ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\end{aligned}\qquad(4-30)$$

于是，这种特殊保险的年度净保费为

$$\begin{aligned}\tilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|}&=\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\\ &=P^{1}_{x:\overline{n}|}-\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}+P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\\ &=P_{x:\overline{n}|}-\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\end{aligned}\qquad(4-31)$$

从而

$$P_{x:\overline{n}|}=\tilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\qquad(4-32)$$

【例 4-13】 考虑（x）的保险金额为 1 万元的 20 年定期寿险，当（x）在 20 年内死亡时，除保险金 1 万元以外，同时还加上退还年缴净保费积累值，受益在死亡年末支付，按以下两种情况分别导出年缴净保费公式：

（1）退还的年缴净保费不计利息；

（2）退还的年缴净保费按计算保费时相同的利率累积。

解：（1）设 π_a 为所求保费，则

$$\pi_a\ddot{a}_{x:\overline{20}|}=10\ 000A^{1}_{x:\overline{20}|}+\pi_a(IA)^{1}_{x:\overline{20}|}$$

$$\pi_a=10\ 000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{20}|}}$$

（2）设 π_b 为所求保费，则

$$\pi_b \ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 10\ 000 A^{1}_{x:\overline{20}|} + \pi_b (\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - {}_{20}E_x \ddot{s}_{\overline{20}|})$$

$$\pi_b = 10\ 000 \frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}E_x \ddot{s}_{\overline{20}|}} = 10\ 000 \frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}p_x \ddot{a}_{\overline{20}|}}$$

【例 4－14】 考虑（x）的一份从 $x+n$ 岁开始领取年金为 1 元的延期生存年金。其通过在延迟期内的等额年度保费来购买。在保费支付期内的死亡保额为年度保费在计算保费时所使用的利率下的积累值。假设死亡保额在死亡年度末支付，求年度保费。

解： 记年度保费为 π，则由等价原则及（4－29），有

$$\pi \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{n}E_x \ddot{a}_{x+n} + \pi (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_{n}E_x \ddot{s}_{\overline{n}|})$$

于是

$$\pi = \ddot{a}_{x+n} / \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

习 题

1. 一个年龄为 25 岁的被保险人购买了一份保额为 1 的完全连续型终身寿险，保费连续 10 年缴纳。已知 $\mu = 0.025$，$\delta = 0.075$，计算年缴净保费。

2. 已知当 $0 \leqslant t \leqslant 10$ 时，$\mu = 0.01$，当 $t > 10$ 时，$\mu = 0.02$，$\delta = 0.05$。计算连续终身寿险的年缴净保费。

3. 已知 $\mu_x = 1/(100 - x)$，$\delta = 0.05$。死亡服从 de Moivre，$\omega = 100$。计算年龄为 55 岁、延期 10 年且为 10 年缴费的连续终身生存年金的净保费。

4. x 岁的人投保的保额为 1 000 元的 20 年期定期连续型寿险，趸缴净保费为 150，年缴净保费为 15.15。$\delta = 0.06$，计算 ${}_{20}P_x$。

5. 已知：$\bar{A}^{1}_{45:\overline{20}|} = 0.22$；${}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{45}) = 1/60$；$\bar{P}(\bar{A}_{45}) = 0.01$；$\bar{S}_{45:\overline{20}|} = 40$。求 δ。

6. 一份特殊的三年期完全离散型定期寿险给付额 b_k，已知

k	q_{x+k-1}	b_k
1	0.05	1 000
2	0.10	2 000
3	0.15	3 000

$i = 7\%$，计算该保单的年缴净保费。

7. 一个年龄为 30 岁的人购买了一份特殊的 15 年定期寿险，前 10 年死亡给付为 2 000，后 5 年死亡给付为 1 000，死亡率服从 de Moivre 律，$\omega = 100$，$v = 0.95$。计算该保单的年缴净保费。

8. 已知 ${}_{k}p_x = 0.9^k$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，$i = 8\%$，死亡率为 μ。计算 1 000 $(\bar{P}(\bar{A}_x) - P_x)$。

9. 年龄为 30 岁的人购买了一份限期 10 年缴费的完全离散终身保险。

死亡给付为 1 000 再加上不计利息的年缴保费。由附表 CL1，计算该保单的年缴保费。

10. 已知${}_{15}P_{30}=0.03$，$P_{30:\overline{15}|}=0.046$，$P^{1}_{30:\overline{15}|}=0.006$。计算 A_{45}。

11. 已知 $A_x=0.6$，${}_{n|}A_x=0.4$，$P_x=0.1$，$P_{x+n}=0.2$。计算 $P^{1}_{x:\overline{n}|}$。

12. 已知 $i=6\%$，${}_{10}E_{40}=0.54$，$1\ 000A_{40}=168$，$1\ 000A_{50}=264$。计算 $1\ 000{}_{10}P(A_{40})$。

13. 已知 $P_{x:\overline{n}|}=0.06$，$P^{1}_{x:\overline{n}|}=0.01$，$P_{x+n}=0.02$，$d=0.03$。计算${}_{n}P_x$。

14. 已知 $\mu_{x+t}=0.04$，$\bar{A}_x=0.4$，计算 Var (L)。

15. 连续型终身寿险 $\mu=0.04$，$\delta=0.08$。计算 $\mathrm{Var}(L)$。

16. 已知${}^{2}\bar{A}_{x:\overline{20}|}=0.35$，$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{20}|})=0.055$，$\delta=0.045$。计算 $\mathrm{Var}({}_{0}L)$。

17. 对于完全连续型单位保额的终身寿险，记 π 为年度保费，${}_{0}L$ 为签单时的损失变量。已知 $\mathrm{Var}({}_{0}L)=0.1073$，${}^{2}\bar{A}_x=0.1$，$E({}_{0}L)=-0.1$，计算 π/δ。

18. 已知完全连续终身寿险 $\bar{A}_x=0.3$，${}^{2}\bar{A}_x=0.2$，$\delta=0.06$。计算使 $E[L^2]$ 最小的年缴净保费。

19. 对于一个完全连续的 20 年定期寿险，已知 $\mu=0.01$，$\delta=0.04$。求第 10% 分位数保费。

20. 年龄为 40 岁的人购买了一份完全连续型终身寿险，保额为 1 000，保费缴付期为 20 年且年缴净保费为 25，死亡率服从 de Moivre 律，$\omega=100$，$\delta=0.03$。求 $P(L>0)$。

21. 年龄为 35 岁的人购买了一份保额为 1 000 元的延期 20 年的 40 年定期寿险，保费缴付期为 60 年。已知 $\mu_{35}(t)=0.02$，$\delta=0.05$，求 $\Pr(L>-10)$。

22. 40 岁的人购买的保额为 1 000 的完全连续型终身寿险，死亡率服从 de Moivre 律，$\delta=0.025$，该保单的 10% 分位数保费为 130.72，求 20% 分位数保费。

23. 完全离散的终身寿险当 $i=0.055$ 时年缴净保费为 0.08，假设死亡均匀分布，若保费为季缴，求该终身寿险的季缴净保费。

24. 已知 $A^{(2)}_{50}=0.3$，${}_{15}p_{35}=0.9$，$i=0.08$，${}_{15}p^{(2)}_{35}=0.06$，$d^{(2)}=0.075499$，$i/i^{(2)}=1.019615$，假设死亡均匀分布，计算 $P_{35:\overline{15}|}$。

第五章　责任准备金

学习目标

- □ 了解责任准备金的概念
- □ 掌握责任准备金的计算原理
- □ 掌握完全离散型、完全连续型、半连续型寿险的责任准备金，年分多次缴费的责任准备金的计算方法
- □ 了解可分配责任准备金、亏损按各保险年度分摊的原理和方法

在第四章我们介绍了确定责任保费的几个原则，其中等价原则是最主要的原则。利用等价原则，可以建立一系列价值相等的关系式。事实上，对于一般的金融业务，也是利用业务双方的等价关系来确定相应的付款（时间和金额）的。例如，在分期偿还贷款计划中，比较的是借贷双方所支付金额的时间价值（或当前价值），而在保险和年金里，比较的则是精算现值。

一般来说，等价关系是进行交易的双方在交易开始时（或合约签定/生效日），根据未来约定的支付在开始时价值（精算现值）相等的原则建立的。这种价值相等的状态将随着时间的推移而发生变化，也就是说，在建立等价关系一段时期后，关系双方未来的权利和责任可能不再等价。对一般的借贷关系来说，借方可能还有支付的义务，而贷方却已经完成了其责任。对于保险关系来说，双方可能均还有一定的义务：如，被保险人有继续支付保费的义务，保险人则有在到期日或被保险人死亡之日支付保险金的义务。对于延迟年金来说，则可能是年金受领人已经完成了支付，余下的只是按月领取年金收益的权利。

本章，我们考察在交易开始一段时期后的情况。因为从交易双方未来权利和责任看，等价关系已经不成立了，所以这时涉及一个“平衡项”，平衡项是交易双方未来的支付的精算现值之差；平衡项是一方的资产，同时是另一方的负债；加入平衡项后，交易双方未来责任和权利就可以达到平衡的状态。对贷款来说，平衡项就是未偿还的本金，是贷方的资产，是借方的负债。对于保险或年金来说，如果购买保险或年金的人还活着，则该平衡项就是所谓的准备金。它是保险公司或年金组织的负债，也是被保险人或年金受领人的资产。

我们通过对例 5 – 1 的进一步讨论来说明如何确定上述的平衡项。

【例 5－1】　一个保险公司计划对 (x) 发行保单，已知

$$Pr\{K(x)=k\}=0.1,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$$

其中 $K(x)$ 为 (x) 的简略未来生命时间长度随机变量，保险保额为常数 1，在被保险人死亡年度末支付。年度保费为 P，在被保险人活着的情况下每年年初支付。假设被保险人在购买保单 1 年后还活着，分别利用下列原则确定准备金 ${}_1V$：

(1) 原则Ⅱ：已知根据等价原则确定的保费为 0.15781（例4－1），现继续根据该原则将风险转移给再保险公司，保费为 ${}_1V$；

(2) 原则Ⅲ：已知保险公司继续保留风险的保费为 0.16019（例 4－1），转移给再保险公司需要支付的金额为 ${}_1V$，在保险公司的效用函数为 $u(x)=-\exp(-0.1z)$ 的情况下，两种选择对保险公司来说是无区别的。

假设保险公司使用的年度实际利率均为 $i=0.06$。

解：如果将该损失转移给再保险公司，即此时与再保险公司签订再保险合约。那么，以再保险合约签定日为 0 时，有再保险在 0 时的损失为

$$\tilde{L}=v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}-{}_1V$$

其中 P 为例 4－1 中保费，上标 ~ 用来显示与例 4－1 中相应记号的区别。从被保险人的角度看，$\tilde{L}$ 是原被保险人签定保险合同 1 年后，再保险人在接受原保险合同的责任和未来保费以及原保险人转移出来的准备金后的前瞻损失随机变量，$\tilde{K}$ 则是 (x) 经过一年变为 $(x+1)$ 后的简略未来生命时间长度随机变量。由等价原则，

$$\begin{aligned}E[\tilde{L}]&=E[v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}-{}_1V]\\&=E[v^{\tilde{K}+1}]-PE[\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}]-{}_1V\\&=0\end{aligned}$$

注意到，在综合生命表下，在 $K(x)\geqslant 1$ 的条件下，

$$\tilde{K}=K(x+1)=K(x)-1$$

所以有

$$A_{x+1}-P\ddot{a}_{x+1}-{}_1V=0$$

或

$${}_1V=A_{x+1}-P\ddot{a}_{x+1}$$

由题设知，在 $K\geqslant 1$ 的条件下，条件概率

$$\begin{aligned}\Pr(\tilde{K}=k)&=Pr(K(x+1)=k)\\&=\Pr(K=k+1\mid K\geqslant 1)\\&=\Pr(K=k+1)/Pr(K\geqslant 1)\\&=0.1/0.9\\&=1/9\qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 8\end{aligned}$$

于是

$$A_{x+1}=\sum_{k=0}^{8}\Pr\left(\tilde{K}=k\right)v^{k+1}$$
$$=a_{\overline{9}|}/9$$
$$=0.755744$$
$$\ddot{a}_{x+1}=\left(1-A_{x+1}\right)/d$$
$$=4.3152$$
$${}_1V=0.0747558$$

（2）利用原则Ⅲ的效用函数，假设再保险公司的初始财富为 ω，则

$$-\exp[-0.1(\omega)]=E[-\exp(-0.1(\omega-\tilde{L}))]$$

于是

$$1=E[\exp\{0.1(v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}-{}_1V)\}]$$

解得

$${}_1V=\ln1.007422/0.1=0.073948。$$

责任准备金是基于责任保费、在原则Ⅱ下的准备金。因此，t 时的责任准备金是在 t 时的未来保额和未来责任保费现值差的条件期望，条件是被保险人在 t 时生存。

在原则Ⅲ下的准备金又叫指数准备金。

注意到，在上例（1）中，

$$E[\tilde{L}]=E[v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}-{}_1V]$$
$$=0$$

或

$${}_1V=E[v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}]$$

而 $v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}$ 实际上为在原保险人签定保险1年后，在被保险人仍然活着的前提下，原保险人的未来损失现值随机变量，通常记其为

$${}_1L=v^{\tilde{K}+1}-P\ddot{a}_{\overline{\tilde{K}+1}|}=v^{(K-1)+1}-P\ddot{a}_{\overline{(K-1)+1}|}$$

于是，由上例（1）的解知，等价原则下1时的责任准备金为此时保险人的未来损失现值随机变量 ${}_1L$ 的（条件）数学期望。

本章各节平行于第4章。并且本章假设，在保单发行时所使用的生命表和利率同样适用于对准备金的计算。

§5.1 完全连续责任准备金

5.1.1 准备金的前瞻公式

考虑（x）的单位保额终身寿险保单的准备金，在完全连续的情况

下，年度责任保费率为 $\bar{P}(\bar{A}_x)$，对于 t 年后还生存的被保险人，由等价原则知，责任准备金为在 t 时前瞻损失的条件期望值，条件是（x）在 t 时还生存。

在条件 $T(x)>t$ 下，前瞻损失为：

$$_tL=v^{T(x)-t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \tag{5-1}$$

所以，准备金为

$$\begin{aligned}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)&=E[{}_tL\mid T(x)>t]\\&=E[v^{T(x)-t}\mid T(x)>t]-\bar{P}(\bar{A}_x)E[\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}\mid T(x)>t]\\&=\bar{A}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}\\&=\frac{\bar{M}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}}\end{aligned} \tag{5-2}$$

因此

（责任准备金）=（年龄 $x+t$ 岁的终身寿险的精算现值）-（以年保费支付率 $\bar{P}(\bar{A}_x)$ 在未来支付的保费的现值）

注意到准备金为未来保额和未来责任保费的精算现值之差，为前瞻损失随机变量的条件期望，所以称这种准备金公式为前瞻公式。

另外，$t=0$ 时，前瞻损失的数学期望为 0，所以

$$_0\bar{V}(\bar{A}_x)=0$$

由式（5-1），有，

$$_tL=v^{T(x)-t}\left[1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]-\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta} \tag{5-3}$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}({}_tL\mid T(x)>t)&=\left[1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2\mathrm{Var}(v^{T(x)-t}\mid T(x)>t)\\&=\left[1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2[{}^2\bar{A}_{x+t}-(\bar{A}_{x+t})^2]\end{aligned} \tag{5-4}$$

【例 5-2】 25 岁的人购买了一份保额为 1 的完全连续终身寿险保单，已知投保人的死亡分布服从 $\omega=115$ 的 de Moivre 定律，$i=0.05$。求 $\mathrm{Var}({}_{25}L\mid T(25)>25)$。

解： $\delta=\ln 1.05=0.048790$

由 T（25）服从（0，90）上的均匀分布知，

$$\bar{A}_{25}=\frac{\bar{a}_{\overline{90|}}}{90}=\frac{1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^{90}}{90\delta}=0.224912$$

$$\bar{A}_{50}=\frac{\bar{a}_{\overline{65|}}}{65}=\frac{1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^{65}}{65\delta}=0.302095$$

$$^{2}\bar{A}_{50}=\frac{1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^{130}}{130\delta}=0.157384$$

所以

$$\mathrm{Var}({}_{25}L \mid T(25)>25)=\frac{^{2}\bar{A}_{50}-\bar{A}_{50}^{2}}{(1-\bar{A}_{25})^{2}}=\frac{0.157384-0.302095^{2}}{(1-0.224912)^{2}}=0.110064$$

【例 5-3】 40 岁的人购买了一份完全连续终身寿险保单，已知 $\mu_{40}(t)=1/(60-t)$；$\delta=0.05$，计算 $\bar{P}(\bar{A}_{40})$ 和 ${}_{20}\bar{V}(\bar{A}_{40})$。

解：（1）由题意得 $\bar{A}_{40}=\frac{\bar{a}_{\overline{60|}}}{60}=\frac{1-e^{-3}}{3}=0.316738$

$$\bar{A}_{60}=\frac{\bar{a}_{\overline{40|}}}{40}=\frac{1-e^{-2}}{2}=0.432332$$

所以 $\bar{P}(\bar{A}_{40})=\frac{\delta\bar{A}_{40}}{1-\bar{A}_{40}}=\frac{0.05\times0.316738}{1-0.316738}=0.023178$

（2）又因为 $\bar{a}_{60}=\frac{1-\bar{A}_{60}}{\delta}=\frac{1-0.432332}{0.05}=11.35335$

所以 ${}_{20}\bar{V}(\bar{A}_{40})=\bar{A}_{60}-\bar{P}(\bar{A}_{40})\bar{a}_{60}=0.43233-0.023178\times11.35335=0.16918$

接下来考虑 ${}_{t}L$ 的分布。

对 $t>0$，有

$$\begin{aligned}{}_{t}L&=v^{T(x)-t}-\bar{P}(\bar{A}_{x})\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}\\&=v^{T(x)-t}\left[\frac{\delta+\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta}\right]-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta}\end{aligned}\tag{5-5}$$

如果 $\delta>0$，则 ${}_{t}L$ 为 $T(x)-t$ 的减函数，且

$$-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta}<{}_{t}L\leqslant1\tag{5-6}$$

因此，对于此区间内任意的 y，有

$$\begin{aligned}F_{{}_{t}L}(y)&=\Pr({}_{t}L\leqslant y \mid T(x)>t)\\&=\Pr\left(v^{T(x)-t}\left[\frac{\delta+\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta}\right]-\frac{\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta}\leqslant y \mid T(x)>t\right)\\&=\Pr\left(v^{T(x)-t}\leqslant\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_{x})} \mid T(x)>t\right)\\&=\Pr\left(T(x)\geqslant t-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_{x})}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_{x})}\right] \mid T(x)>t\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{\Pr\left(T(x)\geqslant t-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right)}{\Pr(T(x)>t)}$$

$$=\frac{1-F_{T(x)}\left(t-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right)}{1-F_{T(x)}(t)} \tag{5-7}$$

对上式进行微分，有：

$$f_{_tL}(y)=\frac{1}{[\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)][1-F_{T(x)}(t)]}f_{T(x)}\left(t-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right) \tag{5-8}$$

因为在综合生命表下，$T(x)-t$ 在条件 $T(x)>t$ 下的条件分布与 $T(x+t)$ 的分布是一样的，所以，

$$F_{_tL}(y)=Pr\left(T(x+t)\geqslant-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right)$$

$$=1-F_{T(x+t)}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right) \tag{5-9}$$

及

$$f_{_tL}(y)=\frac{1}{[\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)]}f_{T(x+t)}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left[\frac{\delta y+\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)}\right]\right) \tag{5-10}$$

【例 5-4】 x 岁的人购买一份完全连续终身寿险保单，已知死亡力为常数 μ，利息力为 δ，试求 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$。

解： $\bar{A}_{x+t}=\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt=\frac{\mu}{\mu+\delta}$

$\bar{a}_{x+t}=\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}e^{-\mu t}dt=\frac{1}{\mu+\delta}$

$\bar{P}(\bar{A}_x)=\mu$

所以 ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)=\bar{A}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}=0$

上面我们对终身寿险讨论了准备金的前瞻公式，对于其他的保险，可以类似讨论，并得到类似的前瞻公式。

几种主要保险的前瞻公式如下：

1. 终身寿险：

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)=\bar{A}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$$

2. n 年定期保险：

$${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}})=\begin{cases}\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t|}}-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} & t<n\\ 0 & t=n\end{cases}$$

3. n 年期两全保险：

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ 1 & t=n \end{cases} $$

4. h 年支付，终身寿险：

$$ {}_t^h\bar{V}(\bar{A}_x) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & t<h \\ \bar{A}_{x+t} & t\geqslant h \end{cases} $$

5. h 年支付，n 年期两全保险：

$$ {}_t^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & t\leqslant h<n \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} & h<t<n \\ 1 & t=n \end{cases} $$

6. n 年期生存保险：

$$ {}_t\bar{V}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ \ 1} - \bar{P}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ 1 & t=n \end{cases} $$

7. n 年延期终身生命年金：

$$ {}_t\bar{V}({}_{n|}\bar{a}_x) = \begin{cases} {}_{n-t|}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t<n \\ \bar{a}_{x+t} & t\geqslant n \end{cases} $$

5.1.2　完全连续责任准备金的其他公式

由前瞻公式，可以得到保险保额和保费支付率均为常数情况下的三个其他的准备金计算公式。下面以 n 年期定期死亡保险为例进行说明。

1. 保费差公式：

由前瞻公式

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

$$ = \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^1}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

有：

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1) = [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^1) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (5-11) $$

从准备金作为（保险公司）未来责任（负债）和权利（资产）的平衡项的角度看，未来责任是一份（$x+t$）的 $n-t$ 年期定期死亡保险，与这份保险等价的保费支付率为 $\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^1)$，而保险公司实际未来可以得到的来自享有这份保险的被保险人的年度支付率却只有 $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1)$，两者之差为

$[\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|})-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$，因此有式（5－11）。

2. 缴清保险公式：

由

$$_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=\left[1-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|}$$

有：

$$_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\left[1-\frac{\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|})}\right]\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (5-12)$$

上式表明，责任准备金为被保险人未来保额（保险公司的未来负债）的精算现值的一部分。我们将保险公司未来负债分为两部分：一部分为与未来保费等价的部分，剩余的部分则为准备金部分，因为一份（$x+t$）的$n-t$年期定期死亡保险的年缴保费率为$\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|})$，所以年缴$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$的保费能够买到的（$x+t$）的$n-t$年期定期死亡保险的份数为$\frac{\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|})}$，这样，剩余的$\left[1-\frac{\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|})}\right]$份保险就不能为未来保费所涵盖，此即为准备金部分。之所以有这么一部分不为未来保费所涵盖，是因为这部分保险已经在此之前由前期的保费所缴清，因此，称之为缴清（保险）公式。

3. 回溯公式：

把

$$\bar{A}^1_{x+s:\overline{n-s}|}=\bar{A}^1_{x+s:\overline{t}|}+{}_tE_{x+s}\,\bar{A}^1_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

和

$$\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|}=\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}+{}_tE_{x+s}\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}$$

代入$_s\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})$的前瞻公式，有：

$$_s\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\bar{A}^1_{x+s:\overline{t}|}-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}+{}_tE_{x+s}[\bar{A}^1_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}]$$

$$=\bar{A}^1_{x+s:\overline{t}|}+{}_tE_{x+s}\,{}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \qquad (5-13)$$

上式实际上给出了在任何一个t年区间内，两个端点间责任准备金的关系：

（在区间起点的责任准备金）=（区间内的保险责任在区间起点的精算现值）+（在区间终点给付的、金额相当于该终点责任准备金的生存给付金在区间起点的精算现值）-（在区间内支付的责任保费的精算现值）。

整理得，

$$_s\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})+\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}=\bar{A}^1_{x+s:\overline{t}|}+{}_tE_{x+s}\,{}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}) \qquad (5-14)$$

上式左边为保险人所拥有的、相对于这份保险的资源：“在s时的责任

准备金和未来的保费收入”；右边则为被保险人相对于这份保险的资源：“在 s 时的 t 期定期死亡保险的保障和在 $s+t$ 时的生存保障”。上式表明：来自保险人的资源的精算现值等于来自被保险人的资源的精算现值。

在上式中令 $s=0$，注意到，

$$ {}_0\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=0 $$

因此有，

$$ \bar{A}^1_{x:\overline{t}|}+{}_tE_x\,{}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:\overline{t}|}=0 $$

于是：

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\frac{1}{{}_tE_x}[\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x:\overline{t}|}-\bar{A}^1_{x:\overline{t}|}] $$

此外，注意到，

$$ \bar{s}_{x:\overline{t}|}=\frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} $$

所以有，

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})=\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})\bar{s}_{x:\overline{t}|}-{}_t\bar{k}_x \tag{5-15} $$

其中 ${}_t\bar{k}_x=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}$ 为保险的累积成本。

于是，准备金可以看成是过去所得到的责任保费的精算累积值与过去这段时间区间内所付出的保险累积成本之差。

利用保险、年金、保费和准备金之间的关系，还可以得到许多适合不同场合的准备金公式。以 n 年期两全保险为例，由前瞻公式，有：

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1-\delta\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}-\delta\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1-\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \end{aligned} \tag{5-16} $$

由保费差公式，

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \frac{[\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})-\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})]}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})+\delta} \end{aligned} \tag{5-17} $$

把

$$ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=(1-\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})/\delta $$

代入式（5－16），得：

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=1-\frac{1-\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}=\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}} \tag{5-18} $$

对于其他的保险的讨论，可以类似进行。

§5.2 完全离散责任准备金

5.2.1 前瞻公式

这一节与4－2讨论的保险对应，讨论与上一节平行。假设保费年度支付，保险保额在被保险人死亡年度末支付。

考虑（x）的终身寿险，其责任保费为P_x，记k年末的责任准备金为${}_kV_x$，它为前瞻损失${}_kL$在k时的条件数学期望，即

$$ {}_kL = v^{[K(x)-k]+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{(K(x)-k)+1}|} \tag{5－19}$$

$$ {}_kV_x = E[{}_kL \mid K(x) \geqslant k] \tag{5－20}$$

于是，责任准备金的前瞻公式为：

$$ \begin{aligned} {}_kV_x &= A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k} \\ &= \frac{M_{x+k} - P_x N_{x+k}}{D_{x+k}} \end{aligned} \tag{5－21}$$

得到同样的结果：责任准备金等于未来保额的精算现值减去未来保费的精算现值。

类似地，有：

$$ \begin{aligned} \mathrm{Var}({}_kL \mid K(x) \geqslant k) &= \mathrm{Var}(v^{[K(x)-k]+1}[1+P_x/d] \mid K(x) \geqslant k) \\ &= [1+P_x/d]^2 \mathrm{Var}(v^{[K(x)-k]+1} \mid K(x) \geqslant k) \\ &= [1+P_x/d]^2[{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2] \end{aligned} \tag{5－22}$$

【例5－5】 40岁的人购买了一份完全离散型保额为1 000的20年缴费终身寿险，已知$i=0.04$，根据示例生命表计算

（1） 第20年的期末责任准备金${}_{20}V$。

（2） 第15年的期末责任准备金${}_{15}V$。

解：（1） 因为在第20年年末未来保费收入的现值为0，所以根据责任准备金的前瞻公式可得${}_{20}V = 1\ 000A_{60} = 471.7857$

（2） 根据示例生命表可得：

$\ddot{a}_{40} = 19.62244$，$\ddot{a}_{60} = 13.73357$，$1\ 000A_{40} = 245.2906$，$1\ 000A_{55} = 403.8297$，

所以：$\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \ddot{a}_{40} - {}_{20}E_{40}\, \ddot{a}_{60} = 19.62244 - 0.422197 \times 13.73357 = 13.8242$

$$1\ 000\,{}_{20}P_{40} = \frac{1\ 000A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} = \frac{245.2906}{13.8242} = 17.7436$$

$\ddot{a}_{55:\overline{5}|} = \ddot{a}_{55} - {}_5E_{55}\, \ddot{a}_{60} = 15.50042 - 0.795266 \times 13.73357 = 4.57857$

${}_{15}V = 1\ 000A_{55} - 1\ 000\,{}_{20}P_{40}\, \ddot{a}_{55:\overline{5}|} = 322.5862$

对于其他的保险，可以类似得到相应的前瞻公式，几种主要的完全离

散型保险的责任准备金前瞻公式如下：

1. 终身寿险：

$$_kV_x = A_{x+k} - P_x\,\ddot{a}_{x+k}$$

2. n 年定期保险：

$$_kV^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ 0 & k = n \end{cases}$$

3. n 年期两全保险：

$$_kV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

4. h 年支付，终身寿险：

$$^h_kV_x = \begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ A_{x+k} & k \geqslant h \end{cases}$$

5. h 年支付，n 年期两全保险：

$$^h_kV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h < n \\ A_{x+k:\overline{n-k}|} & h \leqslant k < n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

6. n 年期生存保险：

$$_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \begin{cases} A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

7. n 年延期终身生命年金：

$$_kV({}_{n|}\ddot{a}_x) = \begin{cases} {}_{n-k|}\ddot{a}_{x+k} - P_{n|}\ddot{a}_x\;\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & k < n \\ \ddot{a}_{x+k} & k \geqslant n \end{cases}$$

【例 5－6】 45 岁的人购买了一份特殊的完全离散型终身寿险，在前 20 年的死亡给付为 1 000，保费为 P，20 年之后的死亡给付为 2 000，保费为 $2P$。已知 $A_{45}=0.3$，$A^1_{45:\overline{20}|}=0.05$，$A_{45:\overset{1}{\overline{20}|}}=0.5$，$i=0.04$，求 $_{20}V$。

解： 首先计算保费，

$$1\,000A_{45} + 1\,000\,{}_{20|}A_{45} = P\ddot{a}_{45:\overline{20}|} + 2P(\ddot{a}_{45} - \ddot{a}_{45:\overline{20}|}) = 0.05$$

因为延期保险等于一份终身寿险减去一份定期寿险，所以，

$$_{20|}A_{45} = A_{45} - A^1_{45:\overline{20}|} = 0.3 - 0.05 = 0.25$$

$$\ddot{a}_{45} = \frac{1 - A_{45}}{d} = 18.2$$

$$\ddot{a}_{45:\overline{20}|} = \frac{1 - A_{45:\overline{20}|}}{d} = 11.7$$

$$P = 22.26721$$

下面计算 A_{45} 和 $\ddot{a}_{65}$：

$$A_{45}=A^1_{45:\overline{20}|}+A_{45:\overline{20}|}^{\ \ 1}A_{65}$$

$$A_{65}=0.5\ \ddot{a}_{65}=13$$

$$_{20}V=2\ 000A_{65}-2P\ddot{a}_{65}=421.0562$$

5.2.2　其他公式

对于完全离散责任准备金，类似于完全连续的情况，由前瞻公式可以得到一些其他的公式，有关的推导及解释都是类似的，因此我们只给出相应的公式，而不作过多重复的推导和解释。

1. 保费差公式：

$$_kV^1_{x:\overline{n}|}=(P^1_{x+k:\overline{n-k}|}-P^1_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{5-23}$$

2. 缴清保险公式：

$$_kV^1_{x:\overline{n}|}=\left(1-\frac{P^1_{x:\overline{n}|}}{P^1_{x+k:\overline{n-k}|}}\right)A^1_{x+k:\overline{n-k}|} \tag{5-24}$$

3. 回溯公式：

类似地，对 $h<n-j$，

$$_jV^1_{x:\overline{n}|}=A^1_{x+j:\overline{h}|}-P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|}+{}_hE_{x+j\,j+h}V^1_{x:\overline{n}|} \tag{5-25}$$

如果 $j=0$，因为$_0V^1_{x:\overline{n}|}=0$，所以，

$$_kV^1_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{_kE_x}(P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{k}|}-A^1_{x:\overline{k}|})$$

$$=P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{s}_{x:\overline{k}|}-{}_kk_x \tag{5-26}$$

其中保险的累积成本为$_kk_x=\dfrac{A^1_{x:\overline{k}|}}{_kE_x}$。

由回溯公式，可以得到一些有趣的结果。

考虑两份发行给（x）的满足下述条件的保单：在头 h 年，这两份保单都给（x）提供单位保额的保险保障，并且两份保险的保费支付期都不小于 h。于是，根据回溯公式，第一份保险在 h 时的责任准备金为：

$$_hV_{(1)}=P_{(1)}\ddot{s}_{x:\overline{h}|}-{}_hk_x$$

第二份保险在 h 时的责任准备金为：

$$_hV_{(2)}=P_{(2)}\ddot{s}_{x:\overline{h}|}-{}_hk_x$$

于是

$$_hV_{(1)}-{}_hV_{(2)}=[P_{(1)}-P_{(2)}]\ddot{s}_{x:\overline{h}|} \tag{5-27}$$

这表明两份保险的责任准备金之差等于责任保费差 $P_{(1)}-P_{(2)}$ 的精算累积值。

又因为$\dfrac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{h}|}}=P_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1}$，所以有：

$$P_{(1)}-P_{(2)}=P_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1}[{}_hV_{(1)}-{}_hV_{(2)}] \tag{5-28}$$

即：两份保险的责任保费之差相当于保险金额为责任准备金之差的 h 年纯生存保险的责任保费。

如果式（5－28）中两份保险分别为 n 年期两全保险和 n 年缴费终身寿险，同时令 $h=n$，则有：

$$P_{(1)}=P_{x:\overline{n|}}$$

$$P_{(2)}={}_{n}P_{x}$$

$${}_{h}V_{(1)}={}_{n}V_{x:\overline{n|}}=1$$

$${}_{h}V_{(2)}={}_{n}^{n}V_{x}=A_{x+n}$$

从而

$$P_{x:\overline{n|}}-{}_{n}P_{x}=P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}(1-A_{x+n})$$

如果令式（5－28）中两份保险分别为终身寿险和 n 年期定期死亡保险，同时令 $h=n$，那么由：

$$P_{(1)}=P_{x}$$

$$P_{(2)}=P_{x:\overline{n|}}^{1}$$

$${}_{h}V_{(1)}={}_{n}V_{x}$$

$${}_{h}V_{(2)}={}_{n}V_{x:\overline{n|}}^{1}=0$$

有

$$P_{x}=P_{x:\overline{n|}}^{1}+P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\,{}_{n}V_{x}$$

类似于完全连续的情况，也可以推导完全离散型两全保险和终身寿险其他的责任准备金公式，我们有

$$\begin{aligned}{}_{k}V_{x:\overline{n|}}&=1-d\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}-(1/\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-d)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}\\&=1-\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}}/\ddot{a}_{x:\overline{n|}}\end{aligned}\tag{5-29}$$

$$\begin{aligned}{}_{k}V_{x:\overline{n|}}&=1-(P_{x:\overline{n|}}+d)/(P_{x+k:\overline{n-k|}}+d)\\&=(P_{x+k:\overline{n-k|}}-P_{x:\overline{n|}})/(P_{x+k:\overline{n-k|}}+d)\end{aligned}\tag{5-30}$$

$$\begin{aligned}{}_{k}V_{x:\overline{n|}}&=1-(1-A_{x+k:\overline{n-k|}})/(1-A_{x:\overline{n|}})\\&=(A_{x+k:\overline{n-k|}}-A_{x:\overline{n|}})/(1-A_{x:\overline{n|}})\end{aligned}\tag{5-31}$$

将上面各式中的 $\overline{n|}$ 和 $\overline{n-k|}$ 去掉，就可以得到终身寿险相应的责任准备金公式。不过需要特别注意的是，这些关系式一般不能直接用于除它们之外的保险。

【例 5－7】 运用准备金的回溯公式重新计算例 5－6。

解：由题意得

$${}_{20}k_{45}=\frac{A_{45:\overline{20|}}^{1}}{A_{45:\overline{20|}}^{\ \ 1}}=\frac{0.05}{0.5}=0.1$$

根据例 5 - 6 我们算得保费 $P=22.2672065$；$\ddot{a}_{45:\overline{20|}}=11.7$

所以 $\ddot{s}_{45:\overline{20|}}=\dfrac{\ddot{a}_{45:\overline{20|}}}{A_{45:\overline{20|}}^{\ \ 1}}=\dfrac{11.7}{0.5}=23.4$

因此根据准备金的回溯公式得：

$${}_{20}V=22.2672065\times 23.4-1\ 000\times 0.1=421.0526$$

从例 5 - 6 和例 5 - 7 我们可以看出在特定的情况下，运用准备金的回溯公式可以使准备金的计算变得简单。

【例 5 - 8】 25 岁的人购买了一份缴费至 65 岁的保额为 1 的完全离散终身寿险保单，在前 10 年每年的缴费额为 P_{25}，剩余的 30 年按照另外一种保费水平缴费，已知 $A_{35}=0.3$，$P_{25}=0.01$，$d=0.06$，求该保单在第 10 年末的期末责任准备金。

解： 根据准备金的回溯公式，我们可知该保单在第 10 年末的期末责任准备金和 25 岁的人购买的终身缴费的完全离散型终身寿险在第 10 年末的期末责任准备相同为 ${}_{10}V_{25}$。

因为 $P_{35}=\dfrac{dA_{35}}{1-A_{35}}=\dfrac{0.06\times 0.3}{1-0.3}=\dfrac{9}{350}$

所以 ${}_{10}V_{25}=\dfrac{P_{35}-P_{25}}{P_{35}+d}=\dfrac{9/350-0.01}{9/350+0.06}=0.183333$

【例 5 - 9】 根据示例生命表和利率为 4% 的假设，计算下列情况下保险公司期望的现金流并求出相应的责任准备金。

（1）假设保险公司按照完全离散型的模式向 l_{50} 的每一个成员各发行一份保险保额为 1 000 元的 5 年期定期寿险。

（2）假设 1 000 元的 5 年期两全保险按照完全离散型的方式发行给一组 l_{50} 的每一个成员。

解：（1）算出年度责任保费

$$\begin{aligned}\pi_1&=1\ 000P_{50:\overline{5|}}^{1}\\&=1\ 000A_{50:\overline{5|}}^{1}/\ddot{a}_{50:\overline{5|}}\\&=1\ 000[A_{50}-{}_5E_{50}A_{55}]/[\ddot{a}_{50}-{}_5E_{50}\ddot{a}_{55}]\\&=3.96759\end{aligned}$$

于是，保险公司从这一团体收集到的保费的期望积累值和预期的索赔支付（见表 5 - 1）。

（2）算出年度责任保费

$$\begin{aligned}\pi_2&=1\ 000P_{50:\overline{5|}}\\&=1\ 000A_{50:\overline{5|}}/\ddot{a}_{50:\overline{5|}}\\&=1\ 000[A_{50}+{}_5E_{50}(1-A_{55})]/[\ddot{a}_{50}-{}_5E_{50}\ddot{a}_{55}]\\&=179.128\end{aligned}$$

表 5-1

时间点	收集到的责任保费	期望的死亡索赔	基金的余额	预期生存人数	$1\,000{}_tV^1_{50:\overline{5}\vert}$
t	$l_{50+t}\cdot\pi$	$1\,000d_{50+t}$	B_t	l_{50+t}	
0	3 768 571		0.00	949 840	0.00
1	3 755 117	3 390 928	528 386.43	946 449	0.558283
2	3 740 671	3 640 988	813 855.68	942 808	0.863225
3	3 725 215	3 895 682	841 026.6	938 912	0.895746
4	3 708 697	4 163 136	585 755.16	934 749	0.626644
5		4 466 230	0.00	930 283	0.00

注：表中基金余额不包括同时新收集到的保费，即全部为上一期余留金额，因此，准备金就等于该余额除以预期生存人数。

于是，预期的现金流如表 5-2：

表 5-2

时间点	收集到的责任保费	期望的死亡索赔	基金的余额	预期生存人数	$1\,000{}_tV_{50:\overline{5}\vert}$
t	$l_{50+t}\cdot\pi$	$1\,000d_{50+t}$	B_t	l_{50+t}	
0	170 142 878.5		0	949 840	0.00
1	169 535 468.4	3 390 928	173 557 666	946 449	183.3778
2	168 883 265.5	3 640 988	353 175 872	942 808	374.6001
3	168 185 439.8	3 895 682	539 045 821	938 912	574.1175
4	167 439 705.6	4 163 136	731 357 375	934 749	782.4105
5		4 466 230	930 282 733	930 283	1 000

注：最后的准备金为 1 000，表示还没有进行生存给付，在生存给付后，全部保险结束。

类似于上一章的讨论，我们也可以简要地讨论半连续的情况。事实上，在半连续年度责任保费 $P(\bar{A}_x)$，$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert})$，$P(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$，${}_hP(\bar{A}_x)$ 和 ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})$ 的情况下，只要将责任准备金公式中的 A 改为 $\bar{A}$，P 改为 $P(\bar{A})$，就可以得到相应的半连续责任准备金。此外，责任准备金的基本符号变为 $V(\bar{A})$，其中 $\bar{A}$ 表示保险的类型。例如：对 h 年支付的 n 年期两全保险，有

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})=\begin{cases}\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert} & k<h<n\\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert} & h\leqslant k<n\\ 1 & k=n\end{cases} \tag{5-32}
$$

在均匀分布假设下，

$$ {}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\, {}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{1} + {}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{5-33}$$

所以，这种情况下的半连续责任准备金可以通过相应的完全离散责任准备金来计算。

§5.3 分缴保费情况下的责任准备金

5.3.1 真实分缴保费情况下的责任准备金

现在考虑在真实分缴保费情况下的责任准备金。由前瞻公式，可以直接写出${}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{(m)}$的公式：

$$ {}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{(m)} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}^{(m)} \qquad k<h \tag{5-34}$$

考虑${}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{(m)}$和${}_k^hV_{x:\overline{n}|}$之差。对 $k<h$，有

$$ {}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{(m)} - {}_k^hV_{x:\overline{n}|} = {}_hP_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}^{(m)}$$

$$ = {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} \frac{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}^{(m)} \tag{5-35}$$

在均匀分布假设下，上式变为

$$ {}_k^hV_{x:\overline{n}|}^{(m)} - {}_k^hV_{x:\overline{n}|}$$

$$ = {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} \left\{ \frac{\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\, \ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \beta(m) A_{x:\overline{h}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - \left[\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - \beta(m) A_{x+k:\overline{h-k}|}^{1} \right] \right\}$$

$$ = \beta(m)\, {}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}\, {}_kV_{x:\overline{h}|}^{1} \tag{5-36}$$

因此：（真实分缴保费情况下的责任准备金）=（相应的完全离散责任准备金）+（在缴费期上的定期保险的完全离散责任准备金和 $\beta(m)$ 倍真实分缴保费的乘积）

对于半连续的情况，在均匀分布假设下，类似地，由前瞻公式，对 $k<h$，有

$$ {}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}^{(m)} \tag{5-37}$$

类似地有：

$$ {}_k^hV^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(m)\, {}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, {}_kV_{x:\overline{h}|}^{1} \tag{5-38}$$

进一步，令 $m \to \infty$，有：

$$ {}_k^h\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_k^hV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(\infty)\, {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, {}_kV_{x:\overline{h}|}^{1} \tag{5-39}$$

【例 5-10】 在示例生命表和均匀分布假设下，同时假设 $i=4\%$。对发行给（50）的 20 年期、年缴两次责任保费、单位保险金的两全保险。

（1） 如果保险金在死亡年度末支付，计算在第 15 年末的责任准备金；

（2） 如果保险金在死亡时刻支付，计算在第 15 年末的责任准备金；

解：（1）$_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20|}} - {}_{10}V_{50:\overline{20|}} = \beta$（2）$P^{(2)}_{50:\overline{20|}}\,{}_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}}$

$$_{10}V_{50:\overline{20|}} = A_{60:\overline{10|}} - P_{50:\overline{20|}}\ddot{a}_{60:\overline{10|}}$$

$$_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}} = A^{1}_{60:\overline{10|}} - P^{1}_{50:\overline{20|}}\ddot{a}_{60:\overline{10|}}$$

$$A^{1}_{60:\overline{10|}} = A_{60} - {}_{10}E_{60}A_{70} = 0.117265$$

$$A_{60:\overline{10|}} = A^{1}_{60:\overline{10|}} + {}_{10}E_{60} = 0.692256$$

$$\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = (1 - A_{60:\overline{10|}})/d = 8.001334$$

$$P^{1}_{50:\overline{20|}} = A^{1}_{50:\overline{20|}}/\ddot{a}_{50:\overline{20|}} = 0.008681$$

$$P_{50:\overline{20|}} = A_{50:\overline{20|}}/\ddot{a}_{50:\overline{20|}} = 0.036143$$

$$\alpha(2) = \frac{id}{i^{(2)}d^{(2)}} = 1.0000961$$

$$\beta(2) = \frac{i - i^{(2)}}{i^{(2)}d^{(2)}} = 0.254951$$

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}} = 13.566368$$

$$P^{(2)}_{50:\overline{20|}} = 0.0357105$$

因此，

$$_{10}V_{50:\overline{20|}} = 0.4030627$$

$$_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}} = 0.0478069$$

$$_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20|}} = 0.4034979$$

（2）$_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = {}_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) + \beta(2)P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\,{}_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}}$

$$_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \bar{A}_{60:\overline{10|}} - P(\bar{A}_{50:\overline{20|}})\ddot{a}_{60:\overline{10|}}$$

$$\bar{A}_{60:\overline{10|}} = \frac{i}{\delta}A^{1}_{60:\overline{10|}} + A_{60:\overset{1}{\overline{10|}}} = 0.598676$$

$$P(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{50:\overline{20|}}} = 0.035231$$

所以$_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 0.316783$

$$P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20|}}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20|}}} = 0.034809$$

$$_{10}V^{1}_{50:\overline{20|}} = A^{1}_{60:\overline{10|}} - P^{1}_{50:\overline{20|}}\ddot{a}_{60:\overline{10|}} = 0.047807$$

从而$_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20|}}) = 0.317208$

5.3.2 在可分配或连续贴现基础上的责任准备金

在第四章，我们讨论了可分配或连续贴现责任保费，现在考虑相应的责任准备金。对整数 k，由前瞻方法，有

$$^{h}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k|}} - {}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\ddot{a}^{\{m\}}_{x+k:\overline{n-k|}} \qquad k < h \qquad (5-40)$$

由（4－22），有

$${}_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=\frac{d^{(m)}}{\delta}{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$$

由例3－10，有

$$\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{n-k}|}=\frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

代入（5－82），于是，对整数 $k<h$，有

$$\begin{aligned}{}_{k}^{h}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})&=\bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}-{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+k:\overline{n-k}|}\\&={}_{k}^{h}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\end{aligned}\tag{5－41}$$

这表明，在整数点，完全连续责任准备金能够被用于可分配的情况中，而与保费支付模式无关。k 为整数的条件在每年支付 m 次保费的情况下可以放松到每 $1/m$ 期的期末。

在第四章中，我们发现可分配责任保费可以被分解为

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x)=P(\bar{A}_x^{PR})+P(\bar{A}_x)$$

其中上标 PR 用来表示具有责任保费返还特征的保险，利用前瞻公式和（4－26）可以得到可分配责任准备金的类似的分解式，我们有

$$\begin{aligned}{}_{k}V(\bar{A}_x^{PR})&=\bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_{x+k}-A_{x+k}}{\delta}-P(\bar{A}_x^{PR})\ddot{a}_{x+k}\\&=\bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\ddot{a}_{x+k}-\delta\bar{a}_{x+k}}{\delta}-[P^{\{1\}}(\bar{A}_x)-P(\bar{A}_x)]\ddot{a}_{x+k}\end{aligned}$$

因为

$$\frac{d}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x)=P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$$

所以

$$\begin{aligned}{}_{k}V(\bar{A}_x^{PR})&=-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k}+P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}\\&=\bar{A}_{x+k}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k}-[\bar{A}_{x+k}-P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}]\\&={}_{k}\bar{V}(\bar{A}_x)-{}_{k}V(\bar{A}_x)\\&={}_{k}V^{\{1\}}(\bar{A}_x)-{}_{k}V(\bar{A}_x)\end{aligned}$$

因此

$${}_{k}V^{\{1\}}(\bar{A}_x)={}_{k}V(\bar{A}_x^{PR})+{}_{k}V(\bar{A}_x)$$

§5.4 一般情况下的责任准备金

前面几节我们针对等额保费和定额保险保额的情况，讨论了在不同时期的责任准备金。等额分期支付保费和定额保险保额的情况在寿险实务中

非常普遍，因此，对等额保费和定额保险保额情况的讨论非常重要，也是非常有实用价值的。

不过，无论从理论还是实务的角度看，对更一般情况的讨论也是必要的。首先，实务中也可能出现非均衡保费或保险保额不为常数的情况；其次，对更一般情况的讨论可能更具理论价值，毕竟，等额保费和定额保险保额都是一般保险的特殊情况，因此，对一般情况的讨论能够囊括上述特定的讨论，但是反之则不能。

5.4.1 一般完全离散保险的责任准备金

考虑（x）的一般完全离散保险：

（1）保险保额在死亡年度末支付

（2）保费按年度在各年初支付

（3）在第 j 年的保险保额为 b_j，$j=1$，2，……

（4）第 j 次支付的责任保费为 π_{j-1}，$j=1$，2，……

注意：b 和 π 的下标都是支付的时间。

对于非负整数 k，其前瞻损失 ${}_kL$ 为未来保额减去未来责任保费在 k 时的现值。将其表示成 $K(x)$ 的函数，为：

$$ {}_kL = \begin{cases} 0 & K(x) \leqslant k-1 \\ b_{K(x)+1}v^{K(x)+1-k} - \sum_{j=k}^{K(x)} \pi_j v^{j-k} & K(x) \geqslant k \end{cases} \tag{5-42} $$

注意：这里对前瞻损失的定义进行了推广，它包括了 $K(x)$ 小于 k 的值（此时 ${}_kL$ 为 0）。显然，这种推广不会改变责任准备金的值，因为它是在条件 $K(x)\geqslant k$ 下的条件期望。

记在 k 时的责任准备金为 ${}_kV$，我们有

$$ \begin{aligned} {}_kV &= E[{}_kL \mid K(x) \geqslant k] \\ &= E[b_{K(x)+1}v^{[K(x)-k]+1} - \sum_{j=k}^{K(x)} \pi_j v^{j-k} \mid K(x) \geqslant k] \\ &= E[b_{(K(x)-k)+k+1}v^{[K(x)-k]+1} - \sum_{j=0}^{K(x)-k} \pi_{k+j} v^{j} \mid K(x) \geqslant k] \end{aligned} \tag{5-43} $$

在不考虑选择生命表时，假设 $K(x)-k$ 在条件 $K(x)\geqslant k$ 下的条件分布等于 $K(x+k)$ 的分布，则

$$ \begin{aligned} {}_kV &= E[b_{K(x+k)+k+1}v^{K(x+k)+1} - \sum_{j=0}^{K(x+k)} \pi_{k+j} v^{j}] \\ &= \sum_{h=0}^{\infty}\left(b_{k+h+1}v^{h+1} - \sum_{j=0}^{h} \pi_{k+j} v^{j}\right){}_hp_{x+k}\, q_{x+k+h} \end{aligned} \tag{5-44} $$

注意：如果使用选择生命表，则上述假设不成立。

利用分部求和或交换求和顺序，上式可变为：

$$
\begin{aligned}
{}_kV &= \sum_{h=0}^{\infty} b_{k+h+1} v^{h+1}\ {}_hp_{x+k}\ q_{x+k+h} - \sum_{j=0}^{\infty}\left(\pi_{k+j}\ v^j \sum_{h=j}^{\infty} {}_hp_{x+k}\ q_{x+k+h}\right) \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} b_{k+h+1} v^{h+1} - {}_hp_{x+k}\ q_{x+k+h} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{k+j}\ v^j\ {}_jp_{x+k} \qquad (5-45)
\end{aligned}
$$

因此，由（5－43）定义的准备金公式变成了准备金的前瞻公式，即：准备金等于未来保额的精算现值减去未来责任保费的精算现值。

前面我们讨论了责任准备金的四种公式：前瞻公式、保费差公式、缴清保险公式和回溯公式。需要指出的是，这些公式适用于均衡保费和定额保险保额的情况，只有前瞻公式和回溯公式能自然地推广到一般的完全离散型保险中。

【例 5－11】 发行给（x）的完全离散型终身寿险，其第一年的保险保额为 1 000 元，以后每年的保险保额比上一年增加 1 000 元，某投保人在购买保险时缴纳首期保费 300 元，余下的责任保费以均衡的方式在以后各年缴纳。假设死亡力 $\mu=0.04$，利息力 $\delta=0.06$，求：

（1）以后各年的责任保费；

（2）第一年末的责任准备金；

解：

（1）该保险保额的精算现值为

$$
\begin{aligned}
1\ 000(IA)_x &= 1\ 000 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \\
&= 1\ 000(1-e^{-\mu})e^{-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-(\mu+\delta)k} \\
&= 1\ 000\frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{[1-e^{-(\mu+\delta)}]^2} \\
&= 4\ 077.68
\end{aligned}
$$

记以后各年的责任保费为 π，则由等价原则，有

$$300+\pi a_x=4\ 077.68$$

$$a_x=\sum_{k=1}^{\infty} v^k\ {}_kp_x=\frac{e^{-(\mu+\delta)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}=9.50833$$

所以，

$$\pi=3\ 777.68/a_x=397.30$$

（2）由前瞻公式，在第一年末，未来的保险保额精算现值为 $1\ 000[(IA)_{x+1}+A_{x+1}]$，注意到死亡力为常数，所以有

$$
\begin{aligned}
1\ 000(IA)_{x+1} &= 1\ 000(IA)_x \\
&= 4\ 077.68
\end{aligned}
$$

$$A_{x+1}=A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}=\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}=0.38842$$

$$\ddot{a}_{x+1}=(1-A_{x+1})/d=10.50833$$

因此，

$$ {}_1V=1\,000[(IA)_{x+1}+A_{x+1}]-\pi\ddot{a}_{x+1}=290.74 $$

对于非均衡保费的情况，有时可以引入系数集 ω_j，$j=1$，2，…，并令 $\pi_j=\pi\omega_j$，$j=1$，2，…，来描述保费的变化情况。由等价原则，有

$$ \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1}v^{j+1}\ {}_jp_x\ q_{x+j} = \pi\sum_{j=0}^{\infty}\omega_j\ v^j\ {}_jp_x \tag{5-46} $$

及

$$ \pi = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+1}v^{j+1}\ {}_jp_x\ q_{x+j}}{\sum_{j=0}^{\infty}\omega_j\ v^j\ {}_jp_x} \tag{5-47} $$

因此，通过选择不同的系列 $\{b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots\}$ 和 $\{\omega_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots\}$，可得不同的责任保费公式。这里，出于实务的考虑，我们要求对所有的 j，均有 b_j，$\omega_j\geqslant 0$。

【例 5－12】 对于例 5－11 中的保险，如果年度责任保费为 $\pi_j=\pi\omega_j$，其中 $\omega_j=\exp(rj)$，$r=0.03$。分别求：

（1）π

（2）${}_1V$

解：

（1）由例 5－11 及式（5－45）知

$$ \pi = \frac{1\,000(IA)_x}{\sum_{j=0}^{\infty}\omega_j\ v^j\ {}_jp_x} = \frac{1\,000(1-e^{-\mu})e^{-\delta}[1-e^{r-(\mu+\delta)}]}{[1-e^{-(\mu+\delta)}]^2} = 275.68 $$

（2）由例 5－11 及式（5－43）知

$$ \begin{aligned} {}_1V &= 1\,000[(IA)_{x+1}+A_{x+1}] - \pi\sum_{j=0}^{\infty}\omega_{j+1}v^j\ {}_jp_{x+1} \\ &= 4\,465.72-\pi\frac{e^r}{1-e^{r-(\mu+\delta)}} \\ &= 263.86 \end{aligned} $$

现在，考虑面向（x）的一般的完全连续保险：记保险保额在死亡时刻支付 b_t，责任保费在 t 时的年率为 π_t，在 t 时的前瞻损失为未来保额减去未来责任保费的现值，即

$$ {}_tL = \begin{cases} 0 & T(x)\leqslant t \\ b_{T(x)}v^{T(x)-t}-\int_t^{T(x)}\pi_u v^{u-t}du & T(x)>t \end{cases} \tag{5-48} $$

将这种情况下的责任准备金记为 ${}_t\bar{V}$，于是

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V} &= E[{}_tL \mid T(x)>t] \\ &= E[b_{T(x)}v^{T(x)-t}-\int_t^{T(x)}\pi_u v^{u-t}du \mid T(x)>t] \end{aligned} $$

$$= E\left[b_{(T(x)-t)+t} v^{T(x)-t} - \int_0^{T(x)-t} \pi_{t+r} v^r dr \mid T(x) > t \right] \qquad (5-49)$$

类似地，假设在 $T(x) > t$ 的条件下，$T(x) - t$ 的分布与 $T(x+t)$ 的分布相同，因此

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} &= E\left[b_{T(x+t)+t} v^{T(x+t)} - \int_0^{T(x+t)} \pi_{t+r} v^r dr \right] \\
&= \int_0^{\infty} \left(b_{t+u} v^u - \int_0^u \pi_{t+r} v^r dr \right) {}_u p_{x+t}\, \mu_x(t+u)\, du \\
&= \int_0^{\infty} b_{t+u} v^u\, {}_u p_{x+t}\, \mu_x(t+u)\, du - \int_0^{\infty} \pi_{t+r} v^r\, {}_r p_{x+t} dr \qquad (5-50)
\end{aligned}
$$

上式第二个积分是通过分部积分或交换积分顺序得到的。

上式为一般情况下责任准备金的前瞻公式：${}_t\bar{V}$ 等于未来保额的精算现值减去未来责任保费的精算现值。

如果有关条件分布的假设不成立，则需要使用选择生命模式。

【例 5-13】 40 岁的人购买了一份保额为 1 000 的完全连续终身寿险，已知

$$\mu_x(t) = \begin{cases} 0.005 & t < 30 \\ 0.005 e^{0.25(t-30)} & t \geqslant 30 \end{cases}, \quad \delta = 0.04,$$

前 30 年的保费为 P_1，30 年之后的保费为 P_2，$1\,000\ {}_{30}\bar{V}_{40} = 325$，求 $1\,000\ {}_{20}\bar{V}_{40}$。

解： 首先利用 $1\,000\ {}_{30}\bar{V}_{40} = 325$ 和准备金的回溯公式计算 P_1。

$$\bar{A}^{1}_{40:\overline{30|}} = \frac{0.005}{0.045}\left(1 - e^{-0.045 \times 30}\right) = 0.082307$$

$$\bar{a}_{40:\overline{30|}} = \frac{1 - e^{-0.045 \times 30}}{30} = 16.46133$$

$${}_{30}\bar{V}_{40} = P_1 \left(\frac{\bar{a}_{40:\overline{30|}}}{{}_{30}E_{40}} \right) - \frac{\bar{A}^{1}_{40:\overline{30|}}}{{}_{30}E_{40}}$$

$$0.325 = 16.46133 e^{-0.045 \times 30} P_1 - 0.82307 e^{-0.045 \times 30} = 63.49835 P_1 - 0.317492$$

$$P_1 = 0.010118$$

又因为 $\bar{A}^{1}_{40:\overline{20|}} = \dfrac{0.005}{0.045}\left(1 - e^{-0.045 \times 20}\right) = 0.065937$

$$\bar{a}_{40:\overline{20|}} = \frac{1 - e^{-0.045 \times 20}}{30} = 13.18734$$

所以 $1\,000\ {}_{20}\bar{V}_{40} = 1\,000\ \dfrac{0.010188 \times 13.18734 - 0.065937}{e^{-0.045 \times 20}} = 166.01$

5.4.2　完全离散责任准备金的递推关系

下面考虑完全离散模型下损失随机变量及其均值、方差之间的关系。首先，考察保险人在每一个保险年度的现金流，如图 5-1 所示：

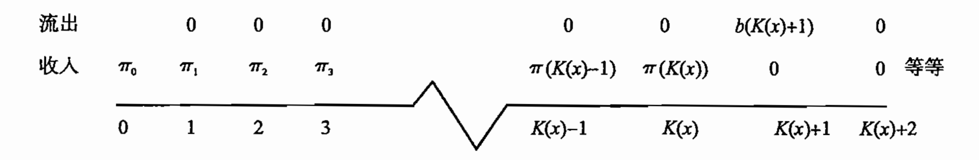


图 5-1　一般的完全离散型保险的现金流

记 C_h 为 $(h, h+1)$ 间的净损失在 h 时的现值，显然：

如果 $(h, h+1)$ 是在死亡出现之前的年份，即 $[h < K(x)]$，则 $C_h = -\pi_h$；

如果 $(h, h+1)$ 是死亡出现所在的年份，即 $[h = K(x)]$，则 $C_h = vb_{h+1} - \pi_h$；

如果 $(h, h+1)$ 是在死亡出现之后的年份，即 $[h > K(x)]$，则 $C_h = 0$。

用数学表达式可以表示为：

$$C_h = \begin{cases} 0 & K(x) \leqslant h-1 \\ vb_{h+1} - \pi_h & K(x) = h \\ -\pi_h & K(x) \geqslant h+1 \end{cases}$$

$$= (vb_{h+1}I - \pi_h)J \tag{5-51}$$

其中

$$I = \begin{cases} 1 & K(x) = h \\ 0 & K(x) \neq h \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} 1 & K(x) \geqslant h \\ 0 & K(x) < h \end{cases}$$

于是，

$$\begin{aligned} E[C_h \mid J=1] &= E[vb_{h+1}I - \pi_h \mid K(x) \geqslant h] \\ &= vb_{h+1}q_{x+h} - \pi_h \\ \mathrm{Var}[C_h \mid J=1] &= \mathrm{Var}[vb_{h+1}I - \pi_h \mid K(x) \geqslant h] \\ &= (vb_{h+1})^2 q_{x+h} p_{x+h} \end{aligned}$$

并且，

$$\begin{aligned} E[C_h] &= E[E[C_h \mid J]] \\ &= E[(vb_{h+1}q_{x+h} - \pi_h)J] \\ &= (vb_{h+1}q_{x+h} - \pi_h)\,{}_hp_x \end{aligned} \tag{5-52}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[C_h] &= E[\mathrm{Var}[C_h \mid J]] + \mathrm{Var}[E[C_h \mid J]] \\ &= (vb_{h+1}q_{x+h} - \pi_h)^2\,{}_hp_x\,{}_hq_x + (vb_{h+1})^2 q_{x+h}\,p_{x+h}\,{}_hp_x \end{aligned} \tag{5-53}$$

注意，对 $j > h$，C_j 和 C_h 是相关的，对它们之间协方差的讨论留作练习。

因为${}_hL$为保险人未来现金流出与保险人未来现金收入之差在 h 时的现值，所以

$$ {}_hL = \sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h} C_j \tag{5-54} $$

对 $h < K(x)$，由式（5－51），

$$ \begin{aligned} {}_hL &= \sum_{j=h}^{K(x)} v^{j-h} C_j \\ &= v^{K(x)-h}[vb_{K(x)+1} - \pi_{K(x)}] - \sum_{j=h}^{K(x)-1} v^{j-h}\pi_j \\ &= v^{K(x)+1-h} b_{K(x)+1} - \sum_{j=h}^{K(x)} v^{j-h}\pi_j \end{aligned} $$

对 $K(x) = h$，

$$ {}_hL = C_{K(x)} = vb_{K(x)+1} - \pi_{K(x)} $$

对 $h > K(x)$，

$$ {}_hL = 0 $$

由式（5－54），有：

$$ \begin{aligned} {}_hL &= C_h + v\sum_{j=h+1}^{\infty} v^{j-(h+1)} C_j \\ &= C_h + v_{h+1}L \end{aligned} \tag{5-55} $$

从而有

$$ \begin{aligned} {}_hV &= E[{}_hL \mid K(x) \geqslant h] \\ &= E[C_h + v_{h+1}L \mid K(x) \geqslant h] \\ &= b_{h+1}vq_{x+h} - \pi_h + vE[{}_{h+1}L \mid K(x) \geqslant h] \end{aligned} \tag{5-56} $$

因为当 $K(x) = h$ 时，${}_{h+1}L = 0$，所以有

$$ \begin{aligned} {}_hV &= b_{h+1}vq_{x+h} - \pi_h + vE[{}_{h+1}L \mid K(x) \geqslant h+1]p_{x+h} \\ &= b_{h+1}vq_{x+h} - \pi_h + {}_{h+1}Vv\,p_{x+h} \end{aligned} \tag{5-57} $$

从而

$$ {}_hV + \pi_h = b_{h+1}vq_{x+h} + {}_{h+1}Vvp_{x+h} \tag{5-58} $$

上式表明：在第 $h+1$ 个保单年度初所有的资源等于年度末所需资源的精算现值。我们称${}_hV + \pi_h$为第 $h+1$ 个保单年度的期初责任准备金，${}_hV$和${}_{h+1}V$分别为第 h 和 $h+1$ 个保单年度末的期末责任准备金。

将式（5－58）左边的${}_hV$移到右边，有

$$ \pi_h = b_{h+1}vq_{x+h} + ({}_{h+1}Vvp_{x+h} - {}_hV) \tag{5-59} $$

上式右边第一项可以看作是保险保额为 b_{h+1}的一年期定期保险的责任保费，第二项${}_{h+1}Vvp_{x+h} - {}_hV$则相应地表示这样的一个量：如果在年初加入${}_hV$，将在利息和死亡力的作用下在年末累积到${}_{h+1}V$。

在式（5－59）两边同乘以 $1+i$，并作一些移项，可得：

$$ \pi_h + ({}_hV + \pi_h)i + {}_{h+1}Vq_{x+h} = b_{h+1}q_{x+h} + ({}_{h+1}V - {}_hV) \tag{5-60} $$

上式左边为第 $h+1$ 个保单年度的资源，即责任保费、期初责任准备金在这一年的利息、由于预期死亡而释放的期末责任准备金；右边为死亡的支付和责任准备金的增量。

用 $1-q_{x+h}$ 来替代式（5－60）中的 p_{x+h}，有：

$$_{h+1}V=({}_hV+\pi_h)(1+i)-(b_{h+1}-{}_{h+1}V)q_{x+h} \tag{5-61}$$

上式右边第一项为第 $h+1$ 个保单年度的期初责任准备金在期末的积累值，第二项则为在期末需要支付的死亡保额和由于出现死亡而释放的期末责任准备金之差的预期值。自然地，第一项和第二项之差就是在第 $h+1$ 个保单年度末的期末责任准备金。我们也将对死亡的支付 b_{h+1} 与由于死亡而释放的准备金 $_{h+1}V$ 之差 $b_{h+1}-{}_{h+1}V$ 称作风险净额。

由式（5－59），有

$$\pi_h=(b_{h+1}-{}_{h+1}V)vq_{x+h}+({}_{h+1}Vv-{}_hV) \tag{5-62}$$

上式右边第一项为保险金等于风险净额的一年期定期保险的责任保费，第二项 $_{h+1}Vv-{}_hV$，代表这样的一个量，如果在年初加入 $_hV$，将在利息的作用下在年末累积到 $_{h+1}V$。

由式（5－60），有：

$$\pi_h+({}_hV+\pi_h)i=(b_{h+1}-{}_{h+1}V)q_{x+h}+({}_{h+1}V-{}_hV) \tag{5-63}$$

上式左边为在第 $h+1$ 个保单年度新增的资源（新收取的保费和期初责任准备金在这一年赚得的利息），右边第一项为需要支出的风险净额的预期值和准备金的增量。

【例 5－14】 60 岁的人购买了一份保额为 1 的完全离散 10 年定期寿险保单，年缴均衡净保费为 16，已知 $q_{68}=0.02$，$q_{69}=0.025$，$_8V=9$，求利率 i。

解： 已知 10 年定期寿险保单在第 10 年末的期末责任准备金为 0。运用准备金的递推公式，我们得到

$$_9V=\frac{(9+16)(1+i)-1\ 000\times0.02}{1-0.02}=\frac{25(1+i)-20}{0.98}$$

和 $\dfrac{({}_9V+16)(1+i)-1\ 000\times0.025}{1-0.025}=0$

因此有 $\left(\dfrac{25(1+i)-20}{0.98}+16\right)(1+i)-25=0$

令 $x=1+i$ 得

$$\frac{25}{0.98}x^2+\left(16-\frac{20}{0.98}\right)x-25=0$$

$$25.5102x^2+4.4082x-25=0$$

所以

$$x=1.0801$$

$$i=0.0801$$

【例 5－15】 x 岁的人购买了一份保额为 1 000 的完全离散终身寿险保单，已知 ${}_1V=1.499$，${}_2V=3.086$，$q_x=q_{x+1}=q_{x+2}$，求 ${}_3V$。

解： 由准备金的递推公式得

$$1.499={}_1V=\frac{P(1+i)-1\ 000q}{1-q}$$

及

$$3.086=\frac{{}_1V(1+i)}{1-q}+\frac{P(1+i)-1\ 000q}{1-q}$$
$$=\frac{1.499(1+i)}{1-q}+1.499$$

所以 $\frac{1+i}{1-q}=\frac{3.086-1.499}{1.499}=1.058706$

因此 ${}_3V=3.06\times\frac{1+i}{1-q}+1.499=3.06\times1.058706+1.499=4.76617$

由式（5－59）还可以有

$$\pi_h-b_{h+1}vq_{x+h}={}_{h+1}Vvp_{x+h}-{}_hV$$

两边同乘以 $v^h\ {}_hp_x$，有

$$\pi_hv^h\ {}_hp_x-b_{h+1}v^{h+1}{}_hp_x\ q_{x+h}={}_{h+1}Vv^{h+1}{}_{h+1}p_x-{}_hVv^h\ {}_hp_x \tag{5－64}$$

上式对任意非负整数 h 都成立，所以，有

$$\sum_{h=0}^{k-1}(\pi_hv^h\ {}_hp_x-b_{h+1}v^{h+1}\ {}_hp_x\ q_{x+h})={}_kVv^k\ {}_kp_x-{}_0V$$
$$={}_kVv^k\ {}_kp_x$$

从而

$${}_kV=\sum_{h=0}^{k-1}\frac{\pi_hv^h\ {}_hp_x-b_{h+1}v^{h+1}\ {}_hp_x\ q_{x+h}}{v^k\ {}_kp_x}$$

于是

$${}_kV=\sum_{h=0}^{k-1}(\pi_h-vb_{h+1}q_{x+h})\frac{(1+i)^{k-h}}{{}_{k-h}p_{x+h}} \tag{5－65}$$

上式表明：责任准备金等于之前各年的保费与当年死亡保额之差在利率和死亡率之下的积累值。这就是一般情况下的回溯公式。事实上，如果保费和保险保额均为常数 1，上式就变成了式（5－26）。

5.4.3 在分数区间的责任准备金

再回到一般的完全离散保险，在第 $j+1$ 个保单年度末的死亡保额为 b_{j+1}，年度责任保费 π_j，$j=0$，1，2，…，在每个保单年度初支付。考虑期间责任准备金（记为 ${}_{h+s}V$，$h=0$，1，2，…及 $0<s<1$），定义

$$
{}_{h+s}L=\begin{cases}0 & K(x)\leqslant h-1\\ v^{1-s}b_{K(x)+1} & K(x)=h\\ v^{K(x)+1-(h+s)}b_{K(x)+1}-\sum_{j=h+1}^{K(x)}v^{j-(h+s)}\pi_j & K(x)\geqslant h+1\end{cases} \tag{5-66}
$$

及

$$
{}_{h+s}V=E[{}_{h+s}L \mid T(x)>h+s] \tag{5-67}
$$

于是

$$
{}_{h+s}V=v^{1-s}b_{h+1\,1-s}q_{x+h+s}+v^{1-s}{}_{h+1}V_{\,1-s}p_{x+h+s} \tag{5-68}
$$

上式两边同乘以 $v^s\,{}_sp_{x+h}$，有

$$
\begin{aligned}
v^s\,{}_sp_{x+h\,h+s}V &= vb_{h+1}({}_{s|1-s}q_{x+h})+v({}_{h+1}V)p_{x+h}\\
&=({}_hV+\pi_h-{}_{h+1}Vvp_{x+h})\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}+{}_{h+1}Vvp_{x+h}
\end{aligned} \tag{5-69}
$$

于是

$$
v^s\,{}_sp_{x+h\,h+s}V=({}_hV+\pi_h)\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}+{}_{h+1}Vvp_{x+h}\left(1-\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right) \tag{5-70}
$$

这表明，$h+s$ 时的期间责任准备金在 h 时的精算现值，等于 h 时的期初责任准备金与在 $h+1$ 时的期末责任准备金在 h 时的精算现值的一个插值。

注意，这个插值一般不是线性的。然而，在均匀分布假设下，插值变成线性的，即

$$
v^s\,{}_sp_{x+h\,h+s}V=({}_hV+\pi_h)(1-s)+{}_{h+1}Vvp_{x+h}(s) \tag{5-71}
$$

作为近似，取 i 和 q_{x+h} 为零，有

$$
{}_{h+s}V=({}_hV+\pi_h)(1-s)+{}_{h+1}V(s) \tag{5-72}
$$

或

$$
{}_{h+s}V=(1-s)\,{}_hV+(s)\,{}_{h+1}V+(1-s)\pi_h \tag{5-73}
$$

这表明，期间责任准备金（近似）等于两个端点处的期末责任准备金的线性插值 $(1-s)\,{}_hV+(s)\,{}_{h+1}V$ 和未实现的责任保费（$(1-s)\pi_h$）之和。

接下来考虑半年度保费的情况。

对 $0<s\leqslant 1/2$，由前瞻公式：

$$
{}_{h+s}V^{(2)}=v^{1-s}b_{h+1}({}_{1-s}q_{x+h+s})+v^{1-s}({}_{h+1}V^{(2)})\,{}_{1-s}p_{x+h+s}-\frac{\pi_h}{2}(v^{0.5-s})({}_{0.5-s}p_{x+h+s}) \tag{5-74}
$$

上式右边第一项为当年保险保额的精算现值，第二项为年末责任准备金的精算现值，第三项则为年中（$h+1/2$ 时）支付的保费的精算现值。两边同时乘以 $v^s\,{}_sp_{x+h}$，有

$$
v^s\,{}_sp_{x+h\,h+s}V^{(2)}=b_{h+1}v({}_{s|1-s}q_{x+h+s})+v({}_{h+1}V^{(2)})p_{x+h}-\frac{\pi_h}{2}(v^{0.5})({}_{0.5}p_{x+h}) \tag{5-75}
$$

类似于式（5－56），可以有半年度保费保单的前瞻责任准备金公式：

$$ {}_{h}V^{(2)} = b_{h+1}vq_{x+h} + {}_{h+1}V^{(2)}vp_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}(1 + v^{0.5}{}_{0.5}p_{x+h}) $$

于是

$$ b_{h+1}v = [{}_{h}V^{(2)} - {}_{h+1}V^{(2)}vp_{x+h} + \frac{\pi_h}{2}(1 + v^{0.5}{}_{0.5}p_{x+h})]/q_{x+h} $$

将上式代入到式（5－75）中，可得

$$ v^{s}{}_{s}p_{x+h}{}_{h+s}V^{(2)} = \left({}_{h}V^{(2)} + \frac{\pi_h}{2}\right)\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} + \left[v_{h+1}V^{(2)}p_{x+h} - \frac{\pi_h}{2}v^{0.5}{}_{0.5}p_{x+h}\right] \times \left(1 - \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right) \quad (5-76) $$

上式表明：$h+s$ 时的期间责任准备金在 h 时的精算现值，等于在 h 时的期初责任准备金与在 $h+1$ 时的期末责任准备金的现值的一个非线性插值。注意，对于半年度保费的情况，因为在期中（$h+1/2$ 时）有一次保费支付，所以期末责任准备金在 h 时的精算现值为${}_{h+1}V^{(2)}p_{x+h}v - {}_{0.5}p_{x+h}v^{0.5}\pi_h/2$，而不是${}_{h+1}V^{(2)}p_{x+h}v$。

在均匀分布假设下，式（5－76）右边变成线性插值的形式：

$$ v^{s}{}_{s}p_{x+h}{}_{h+s}V^{(2)} = [{}_{h}V^{(2)} + \pi_h/2](1-s) + [{}_{h+1}V^{(2)}p_{x+h}v - {}_{0.5}p_{x+h}v^{0.5}\pi_h/2](s) \quad (5-77) $$

再次令 i 和 q_{x+h}为零，可以得到一个简单的在期初责任准备金和期末责任准备金之间的线性插值：

$$ {}_{h+s}V^{(2)} = [{}_{h}V^{(2)} + \pi_h/2](1-s) + [{}_{h+1}V^{(2)} - \pi_h/2](s) $$

这个公式可以整理为期末责任准备金之间的插值加上未实现的责任保费 $\pi_h(1/2-s)$：

$$ {}_{h+s}V^{(2)} = [(1-s){}_{h}V^{(2)} + (s){}_{h+1}V^{(2)}] + (1/2-s)\pi_h \quad (5-78) $$

对于后半年，即 $1/2 < s \leqslant 1$，类似地，有

$$ v^{s}{}_{s}p_{x+h}{}_{h+s}V^{(2)} = [{}_{h}V^{(2)} + (1 + v^{0.5}{}_{0.5}p_{x+h})\pi_h/2]\frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}} + [v({}_{h+1}V^{(2)}p_{x+h})]\left(1 - \frac{{}_{s|1-s}q_{x+h}}{q_{x+h}}\right) \quad (5-79) $$

在均匀分布假设下，有

$$ v^{s}{}_{s}p_{x+h}{}_{h+s}V^{(2)} = (1-s)[{}_{h}V^{(2)} + (1 + v^{0.5}{}_{0.5}p_{x+h})\pi_h/2] + s[v({}_{h+1}V^{(2)}p_{x+h}] \quad (5-80) $$

令 i 和 q_{x+h}为零，有

$$ {}_{h+s}V^{(2)} = {}_{h}V^{(2)}(1-s) + s[{}_{h+1}V^{(2)} + \pi_h(1-s)] \quad (5-81) $$

【例 5－16】 x 岁的人购买了一份保额为 1 000 的保单，已知死亡在每年内均匀分布，${}_{9}V=100$，$q_{x+9}=0.05$，$i=0.25$，均衡保费为 20。

求（1）${}_{9.5}V$ 的精确值

（2）在均匀分布假设下，用插值法对${}_{9.5}V$ 的近似。

解：（1）由题意得

$$ {}_{9.5}V=\frac{({}_{9}V+\pi_{9})(1+i)^{0.5}-0.5b_{k+1}q_{x+9}(1+i)^{-0.5}}{1-0.5q_{x+9}} $$

$$ =\frac{120\times1.25^{0.5}-25\times1.25^{-0.05}}{0.975}=114.67 $$

（2）首先计算${}_{10}V$，

$$ {}_{10}V=\frac{({}_{9}V+\pi_{k})(1+i)-1\ 000q_{x+9}}{1-q_{x+9}}=105.2632 $$

所以${}_{9.5}V=0.5\times(100+20+105.2632)=112.63$

5.4.4　完全连续责任准备金的微分方程

前面我们讨论了一般的完全离散保险和一般的完全连续保险模型，并且得出了一系列完全离散模型的递归关系，对于完全连续模型，可以发展平行的结果。

由（5－48），我们知道在 t 时的责任准备金${}_{t}\overline{V}$ 为

$$ {}_{t}\overline{V}=\int_{0}^{\infty}b_{t+u}v^{u}\ {}_{u}p_{x+t}\mu_{x}(t+u)du-\int_{0}^{\infty}\pi_{t+r}v^{r}\ {}_{r}p_{x+t}dr $$

$$ =\int_{t}^{\infty}[b_{s}\mu_{x}(s)-\pi_{s}]v^{s-t}\ {}_{s-t}p_{x+t}ds $$

$$ =\frac{\int_{t}^{\infty}[b_{s}\mu_{x}(s)-\pi_{s}]v^{s}\ {}_{s}p_{x}ds}{{}_{t}p_{x}v^{t}} \tag{5-82} $$

于是

$$ \frac{d}{dt}{}_{t}\overline{V}=\frac{-[b_{t}\mu_{x}(t)-\pi_{t}]v^{t}\ {}_{t}p_{x}({}_{t}p_{x}v^{t})-({}_{t}p_{x}v^{t})'\int_{t}^{\infty}[b_{s}\mu_{x}(s)-\pi_{s}]v^{s}\ {}_{s}p_{x}ds}{({}_{t}p_{x}v^{t})^{2}} $$

$$ =-[b_{t}\mu_{x}(t)-\pi_{t}]+\frac{[\mu_{x}(t)+\delta]\int_{t}^{\infty}[b_{s}\mu_{x}(s)-\pi_{s}]v^{s}\ {}_{s}p_{x}ds}{{}_{t}p_{x}v^{t}} $$

$$ =\pi_{t}+[\mu_{x}(t)+\delta]{}_{t}\overline{V}-b_{t}\mu_{x}(t) \tag{5-83} $$

可以看出，责任准备金的变化率由三部分组成：净保险费率、在利率与死亡率下的责任准备金的增长率和保险保额的支出率。重新整理（5－83），可得对应于（5－58）的公式：

$$ \pi_{t}+\delta\ {}_{t}\overline{V}+{}_{t}\overline{V}\mu_{x}(t)=b_{t}\mu_{x}(t)+\frac{d}{dt}{}_{t}\overline{V} \tag{5-84} $$

上式左边为总的收入率，右边为保险保额的支出率和责任准备金的改变率之和。根据收支平衡的原则，上式两边自然相等。

如果将责任准备金看成是可用于抵消死亡保额的一个储蓄基金，那么，我们有

$$\pi_t + \delta\, {}_t\bar{V} = (b_t - {}_t\bar{V})\mu_x(t) + \frac{d}{dt}{}_t\bar{V} \qquad (5-85)$$

这里，收入率相对于责任保费和责任准备金上的利息，支出率 $(b_t - {}_t\bar{V})\mu_x(t)$ 则基于风险净额，其与责任准备金的变化率之和应该与这种意义下的收入率达成平衡。(5－85) 对应于 (5－61)，类似地，左边表示可利用的资源，责任保费和投资收入；右边表示将它们分配到保险保额和累积资源中。

【例 5－17】 利用 (5－83)，推导一般的完全连续保险的回溯公式。

解： 由 (5－83)

$$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V} - [\mu_x(t) + \delta]\,{}_t\bar{V} = \pi_t - b_t\mu_x(t)$$

有

$$\left\{\frac{d}{dt}{}_t\bar{V} - [\mu_x(t) + \delta]\,{}_t\bar{V}\right\}v^t\,{}_tp_x = [\pi_t - b_t\mu_x(t)]v^t\,{}_tp_x$$

于是

$$\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x\,{}_t\bar{V}) = [\pi_t - b_t\mu_x(t)]v^t\,{}_tp_x$$

从而

$$v^r\,{}_rp_x\,{}_r\bar{V} - {}_0\bar{V} = \int_0^r [\pi_t - b_t\mu_x(t)]v^t\,{}_tp_x dt$$

由于在责任保费下，${}_0\bar{V} = 0$，所以

$${}_r\bar{V} = \int_0^r [\pi_t - b_t\mu_x(t)]v^t\,{}_tp_x dt / (v^r\,{}_rp_x) \qquad (5-86)$$

习　题

1. 对 (45) 签发的一份特殊的完全离散型终身寿险，提供如下保障：

(1) 死亡保险金在死亡发生的年末支付，并且前 20 年的死亡给付为 1 000，在其后为 2 000；

(2) 前 20 年的年缴均衡保费是 P，在其后为 $2P$。

给定如下条件：①$A_{45} = 0.3$；②$A^{1}_{45:\overline{20}|} = 0.05$；③$A_{45:\overline{20}|}^{\ \ 1} = 0.5$；④$i = 0.04$。求 ${}_{20}V$。

2. 对 (x) 签发一份两年期的完全离散型两全保险，每年初缴纳均衡保费，第 1 年的死亡给付为 1 000，第 2 年的死亡给付为 2 000，生存给付为 3 000。

给定如下条件：(1) $q_x = 0.1$；(2) $q_{x+1} = 0.1$；(3) $i = 0.06$。计算第 1 年的期末责任准备金。

3. 对于 (x) 的一份完全离散型 10 年期定期寿险，保额为 1 000，每年初缴纳均衡保费，第 9 年的期末责任准备金为 40。给定如下条件：$P^{1}_{x:\overline{10}|}=0.06$，$i=0.05$，$q_{x+9}=0.05$。如果购买一份保额为 1 000 的两全保险，求 $1\,000\,{}_9V_{x:\overline{10}|}$。

4. (30) 购买了一份 20 年缴费的 35 年期完全离散型两全保险，保额为 1 000。给定如下条件：

(1) $d=0.06$

(2) 已知下表

n	$\ddot{a}_{30:\overline{n}|}$	$\ddot{a}_{40:\overline{n}|}$
10	7.75	7.70
20	11.96	11.76
25	13.25	12.95

计算第 10 年末的责任准备金。

5. 给定如下条件：(1) $\mu_{35}(t)=0.03$；(2) $\delta=0.05$；(3) $\bar{a}_{35:\overline{15}|}=8.7351$。求 $1\,000\,{}^{15}_{5}\bar{V}(\bar{A}_{35:\overline{25}|})$。

6. 对 (52) 签发了一份完全离散型终身寿险，$i=0.04$。根据 2000—2003 年生命表 CL1 表，计算 ${}_{23}V_{52}$。

7. 对于 (x) 的一份 3 年期完全离散型寿险，给定如下条件：

(1) 在每年初缴纳均衡保费

(2) 已知下表

k	b_{k+1}	q_{x+k}
0	200 000	0.03
1	150 000	0.06
2	100 000	0.09

(3) $i=0.06$

计算第 2 年初责任准备金。

8. 给定如下条件：(1) $\mu_{x+k+t}=\mu$；(2) $\delta_t=\delta$；(3) $\mu-\bar{P}(\bar{A}_x)=0.03$；(4) $\delta+\bar{P}(\bar{A}_x)=0.07$。求 ${}_k\bar{V}(\bar{A}_x)$。

9. 对于 (45) 的一份保额为 1 000 的完全离散型终身寿险，每年初缴纳均衡保费，其前 5 年的期末责任准备金如下表所示：

时刻	1	2	3	4	5
准备金	13.30	27.00	41.50	56.70	71.00

求 47 岁的人购买的保额为 1 000 的终身寿险，在第 3 年的期末责任准

备金。

10. (45) 购买了一份保额为 1 000 的 20 年期两全保险，每年初缴纳均衡保费。设时期 k 的风险保额，为该期的死亡给付额减去期末责任准备金。风险保额数据如下表所示：

保单年度	风险保额
2	923.80
3	884.30
17	201.00
18	112.60

设 (47) 购买了一份保额为 5 万元的 18 年期两全保险，求在第 15 年的期末责任准备金。

11. 已知 $\sum_{x=41}^{50}\ln(1-{}_1V_x)=-\ln\frac{6}{5}$，求 ${}_{10}V_{41}$。

12. 一个投保人在自己 30 岁生日的时候购买了一份保额为 1 万元的 15 年期的完全离散型可转换保单，五年之后，当他正想缴纳第 6 年保费的时候，他决定把该保单转换成一份终身寿险保单，但是他需要向保险公司缴纳一部分钱 V，以弥补保险公司为两个险种所提取的准备金的差额。给定下列条件：$i=0.025$

$$A^1_{30:\overline{15}|}=0.0351,\ A_{30}=0.3162,\ \ddot{a}_{30:\overline{15}|}=12.0957,\ \ddot{a}_{30}=23.4776$$

$$A^1_{35:\overline{10}|}=0.0291,\ A_{35}=0.3587,\ \ddot{a}_{35:\overline{10}|}=8.6745,\ \ddot{a}_{35}=22.0193$$

$$A^1_{40:\overline{5}|}=0.0190,\ A_{40}=0.4066,\ \ddot{a}_{40:\overline{5}|}=4.6820,\ \ddot{a}_{40}=20.3739$$

求 V。

13. 给定如下条件：(1) $\ddot{a}_{30}=20$；(2) ${}_3V_{30}=0.1$；(3) ${}_1V_{32}=0.05$。求 $1-\frac{\ddot{a}_{30:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{32}}$。

14. 关于 (x) 的一份特殊的完全离散型终身寿险，给定如下条件：

(1) 在第一年死亡给付为 0，在以后给付额为 5 000；

(2) 采取终身均衡缴纳保费；

(3) $q_x=0.05$；$v=0.9$；$\ddot{a}_x=5.00$；${}_{10}V_x=0.2$。

求该保单在第 10 年末的期末责任准备金 ${}_{10}V$。

15. 对 (36) 签发的一份保额为 5 万元的完全离散型终身寿险，该保单的年缴保费为 900，在第 10 年的期末责任准备金为 8 000，$i=0.06$。求 (46) 的投保人购买保额为 5 万元的完全离散型终身寿险的年缴保费。

16. 已知 $\delta=0.04$，$\bar{P}(\bar{A}_{30})=0.05$，$\bar{P}(\bar{A}_{45})=0.06$。求 $1\,000\,{}_{15}\bar{V}(\bar{A}_{30})$。

17. 对 (40) 签发的一份保额为 1 的完全连续型终身寿险，给定如下

条件：

（1）死亡服从 de Moivre 规则，$\omega=100$；（2）$i=0.05$。求${}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40})$。

18. 对（65）签发的一份保额为 1 的完全连续终身寿险。死亡服从 de Moivre 律，$\omega=100$，$\delta=0.1$。求 $\mathrm{Var}({}_{20}L \mid T(x)\geqslant 20)$。

19. 已知 $v^2=0.75$，$q_{x+k}=0.2$，$A_{x+k+1}=0.5$，${}^2A_{x+k+1}=0.3$，x 岁的人购买了一份完全离散型终身寿险，${}_kL$ 表示时刻 k 保险人未来损失现值。求 $\dfrac{\mathrm{Var}({}_kL)}{\mathrm{Var}({}_{k+1}L)}$。

20. 对（25）签发一份保额为 1 的完全连续型终身寿险，${}_tL$ 表示时刻 t 保险人未来损失现值，$\mathrm{Var}({}_3L \mid T(x)>3)=0.0230$，$\bar{A}_{25}=0.041$，$\delta=0.05$。求使 $\mathrm{Var}({}_3L \mid T(x)>3)=0.0220$ 成立的保费水平。

21.（50）购买了一份 20 年缴费的完全离散型终身寿险，保额为1 000，年缴均衡保费为 35。给定如下条件：（1）$q_{69}=0.02$；（2）$A_{70}=0.6$；（3）$i=0.05$。求该保单第 19 年的期末责任准备金。

22.（x）购买了一份保额为 1 的完全离散型 3 年期两全保险。给定如下条件：$i=0.06$；$1\,000P_{x:\overline{3}|}=332.51$。

y	l_y
x	1 000
$x+1$	900
$x+2$	810

求 1 000（${}_2V_{x:\overline{3}|}-{}_1V_{x:\overline{3}|}$）。

23. 对（35）签发一份完全离散型终身寿险，在第 11 年的死亡给付为 1 000，已知${}_{10}V=105$，${}_{11}V=115$，$i=0.04$。根据2000～2003 年 CL1 生命表，计算第 11 年初需要缴纳的保费。

24. 险种 A 是对（x）签发的保额为 1 000 的 10 年缴费的完全离散型终身寿险，险种 B 是对（x）签发的保额为 1 000 全期缴费的完全离散型终身寿险；险种 B 年缴均衡净保费为 8.36，${}_kV^A$ 是险种 A 在第 k 年末的期末责任准备金，${}_kV^B$ 是险种 B 在第 k 年末的期末责任准备金。给出如下条件：（1）$i=0.06$；（2）$q_{x+10}=0.004$；（3）${}_{10}V^A-{}_{10}V^B=101.35$。求${}_{11}V^A-{}_{11}V^B$。

25. 30 岁的人购买了一份保额为 10 万元的完全离散型终身寿险，年缴均衡净保费为 2 738，该保单在第 9 年的期末责任准备金为 8 931，在第 10 年的期末责任准备金为10 059，已知 $l_x=\begin{cases}112-1.4x, & 20<x<80\\ 0, & x\geqslant 80\end{cases}$，求利率 i。

26. 选择年龄为 41 岁的人购买了一份保额为 10 万元的完全离散型终身寿险，年缴均衡保费为 900，$i=0.08$。给出两年选择期的选择—终极生

命表：

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}
40	93 738	93 477	93 193
41	93 383	93 100	92 794
42	93 007	92 710	92 371
43	92 608	92 279	91 923
44	92 186	92 831	91 448

求该保单在第 3 年末的期末责任准备金。

第六章　毛保费与修正准备金

学习目标

□ 了解保单中的各项附加费用以及公司经营的合理利润等基本概念

□ 熟悉厘定毛保费的分级费率法和保单费附加法，掌握毛保费准备金的计算方法

□ 熟悉不考虑费用和考虑费用两种情况下预期盈余的计算

□ 了解修正准备金的一般方法，进一步熟悉一年定期修正制和保单分类修正制两种常用的具体方法

§6.1　毛保费厘定原理

在第二章到第四章中，净保费是通过精算等价原理来确定的。由于净保费只用于未来的保险给付，所以在计算过程中只需要考虑死亡率与利率两个因素。毛保费是保险人向投保人实际收取的保费，其中不但包含保险给付的成本，也包含保险经营的费用以及合理的利润。平衡保险经营费用并为保险人带来合理利润的保费称为附加保费。在厘定毛保费的过程中必须考虑附加保费，为此需要研究各种费用的性质及其分配方法。

6.1.1　费用的分类与分配

保险公司在经营过程中所发生的费用可分为两大类：一类是因运用保险资金而发生的费用。例如，设立一个投资部所需开支的员工工资、租赁场地的租金、以及购买设备的费用；购买和出售有价证券或不动产所需支付的服务费、以及缴纳的税金等。这一类费用称为投资费用，通常在投资收入中扣除，最后计算净投资收益率。以净投资收益率为基础的预定利率已将这类费用反映在保费中，因此通常不再考虑投资费用。另一类是因保险业务而发生的费用，称为保险费用。下面对保险费用进行分析。

在毛保费的厘定中，保险费用的分类和分配是一项很复杂的工作，各寿险公司的做法也不尽相同，但大体上都按费用开支目的，进行如表 6－1 所示的分类：

表 6－1　　寿险公司可能采用的费用分类

费用类别	费用明细
1. 业务获得费用	(1) 销售费用，包括代理人佣金和广告费 (2) 风险分类，包括体检 (3) 新保单制作与记录
2. 保单维护费用	(1) 保费收取与记账 (2) 受益人更换和保单选择权准备 (3) 与保单持有人通讯联系
3. 一般费用	(1) 调查与研究费用 (2) 精算和一般法律服务 (3) 一般会计费用，包括工资、佣金、水电费等 (4) 保费税
4. 理赔费用	(1) 索赔调查和法律辩护 (2) 保险金支付费

费用的分类确定以后，就可以根据费用项目与相应的业务活动相对应这一原则对费用进行分配。一些费用项目及数额与业务活动的性质及数量有直接的联系。例如，代理人佣金直接根据所收保费数额来确定，因此可以表示为保费的一个百分比。通常保单初年度佣金较高，续年度较低。保费税也表示为保费的一个百分比，通常续年度税率与初年度相同。核保的费用只发生在初年度，与保额的大小有关。一般对于每张保单，一部分按固定数额分配，另一部分可按每 1 000 元保额来分配。签单与记录的费用也只发生在初年度，与保费的多少没有多大关系，每份保单上的花费大致相同。

另一些费用项目与业务活动的联系并不直接，表 6－1 所列一般费用中的（1）、（2）、（3）三项即是。例如，办公场所的租金和水电费，就很难直接与某笔业务联系起来。对于这些费用，常常需要结合统计分析和经验来进行分配。在实务中，各寿险公司的做法可能不尽相同。

费用的分类与分配是控制一个保险系统运营的重要管理工具。在保费的确定中，考虑费用采用前瞻的观点，而不采用回溯的观点，其目的是用未来的附加保费来平衡未来将要发生的费用。因此，预期的费用膨胀趋势也包含在附加保费中。

表 6－2 是根据表 6－1 的费用分类，以某份保单为例所作的一个保险费用分配表。作为费用分配的一个例子，该表使读者对保险费用有一个更清晰的认识。

表 6－2　　　　保险费用分配表

<table>
<tr><th rowspan="3">费用类型</th><th colspan="3">初年度</th><th colspan="4">续年度</th></tr>
<tr><th rowspan="2">每张保单</th><th rowspan="2">每 1 000 元保额</th><th rowspan="2">保费百分比</th><th rowspan="2">每张保单</th><th rowspan="2">每 1 000 元保额</th><th colspan="2">各年度的费用百分比（%）</th></tr>
<tr><th>2～9</th><th>10 以上</th></tr>
<tr><td>1. 获得费用</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>（1）销售费用</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>佣金</td><td>—</td><td>—</td><td>60</td><td>—</td><td>—</td><td>7.0</td><td>4.0</td></tr>
<tr><td>销售部的费用</td><td>—</td><td>—</td><td>25</td><td>—</td><td>—</td><td>2.5</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>其他销售费用</td><td>12.50</td><td>4.00</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>（2）分类费用</td><td>18.00</td><td>0.50</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>（3）签单和记录</td><td>4.00</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>2. 维持费用</td><td>2.00</td><td>0.25</td><td>—</td><td>2.00</td><td>0.25</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>3. 一般费用</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>（1），（2），（3）</td><td>4.00</td><td>0.25</td><td>—</td><td>4.00</td><td>0.25</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>（4）保费税</td><td>—</td><td>—</td><td>2</td><td>—</td><td>—</td><td>2.0</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>总计（1，2，3 项）</td><td>40.5</td><td>5.00</td><td>87</td><td>6.00</td><td>0.50</td><td>11.5</td><td>7.0</td></tr>
<tr><td>4. 理赔费用</td><td colspan="7">每张保单 20.00 元加上每 1 000 元保额 0.10 元</td></tr>
</table>

6.1.2　毛保费的计算

与净保费类似，毛保费的计算也基于精算等价原理，即

毛保费的精算现值＝保险给付的精算现值＋保险费用的精算现值

在计算保险费用的精算现值时，假设各期保险费用都在期初支付，在实务中，通常还需考虑退保的影响以及一定的利润率。这时需在等式的右边加上“退保给付的精算现值”，并在保险费用中加进一个“利润边际”。当然这样计算会复杂一些，加上退保给付后，保险人要考虑的是被保险人的死亡风险与退保风险的交互影响，而不是被保险人的死亡风险的单独作用。有关两种以上风险的交互作用将在第七章多元风险模型中讨论。

在实际问题中，需要考虑的因素也许很复杂，但精算等价原理却很简单，即未来的收入和支出应当在精算现值上平衡。下面通过一个例子来说明毛保费的计算。

【例 6－1】 年龄为 x 岁的人购买一份保额为 5 万元的终身寿险保单，保费与保险金的支付方式均为半连续式。如果费用的分配如表 6－2 所示，试用精算等价原理推导其年缴毛保费公式。

解： 因为理赔费用的发生与否及发生时间与保险给付基本相同，两者的精算现值可以一并计算，得到

$$[50\ 000+(20+0.1\times 50)]\bar{A}_x=50\ 025\bar{A}_x$$

设年缴毛保费为 G，各年的费用均假设在年初发生，则初年度费用的精算现值为

$$40.50+250+0.87G$$

续年度费用的精算现值为

$$6a_x+25a_x+(0.115Ga_{x:\overline{8}|}+0.07G\,{}_{8|}a_x)$$

根据精算等价原理，可得

$$G\ddot{a}_x=50\,025\bar{A}_x+(40.50+250+0.87G)$$
$$+[6a_x+25a_x+(0.115G\,a_{x:\overline{8}|}+0.07G\,{}_{8|}a_x)]$$

求解 G，得到

$$G=\frac{50\,025\bar{A}_x+290.50+31a_x}{0.13+0.93a_x-0.045a_{x:\overline{8}|}}$$

如果每份保单都用这种方法来计算保费，操作起来会很不方便。实际上，寿险公司是先将保费率计算出来列成表，即费率表（通常根据被保险人性别、吸烟与否分类），再根据被保险人的年龄，也许还要根据保额来查找相应的费率，保额乘上这个费率就是应缴的保费。下面讨论保险费率的计算问题。

6.1.3 保单费用与保险费率

在人寿保险中，保险费率一般用 1 000 元死亡给付额应缴的保费来表示。在费用分配中，有些费用项目的全部或一部分是不随保额及保费变化的，这部分费用称为保单费用。由于存在保单费用，对不同保额的保单，其费率将有所不同。保额大的保单分配到每单位保额上的保单费用少，因此费率较低；反之，保额小的保单费率较高。下面用数学式来说明这一点。对于保额为 b 的保单的毛保费，记为 $G(b)$，令

$$G(b)=ab+c+fG(b) \tag{6-1}$$

这里 a，c 和 f 为非负数且 $f<1$。a 包含了直接随保额变化的保费组成部分，每单位保额的净保费是其中最大的部分；c 即为保单费用；f 是随保费变化的用于支付费用的保费比例。

（6－1）式可以写成

$$G(b)=b\frac{a+c/b}{1-f}=bR(b)$$

这里

$$R(b)=\frac{a+c/b}{1-f} \tag{6-2}$$

$R(b)$就是保额为 b 的保单的费率。由此可以看出，费率随保额的增加而变小。

如果对于不同的保额，都要计算出相应的费率列入表中，有些不太方

便。无论是精算人员制作费率表，还是代理人给客户试算保费，可能都会因太多的费率而感到麻烦。为解决这个问题，通常有两种方法。

1. 分级费率法

将保单根据保额分成若干等级，在每一等级内根据保额的分布求出保额均值，这个平均保额通过（6－2）式算出的费率作为该等级内所有保单的费率。

【例6－2】 一种趸缴保费人寿保险保单，其保费的组成如表6－3。

表6－3

净保费	$\bar{A}_x=0.20$
费用	
销售佣金	保费的7.5%
保费税	保费的3.0%
保单费用	
初年度	50.00元
续年度	5.00元
理赔费用	每张保单15.00元加每千元保额0.30元

保单的分级和各等级内的平均保额如表6－4。

表6－4

保额等级	平均保额
25 000元～99 999元	78 500元
100 000元～249 999元	366 500元
250 000元～499 999元	187 500元
500 000元以上	648 500元

如预定利率 $i=0.06$，求这类保单的分级费率。

解： 设保额 b 以千元为单位，将第一个表中的数据代入（6－1）式中得

$$\begin{aligned}G(b)&=(1\,000b+0.30b)(0.2)+[15(0.2)+50+5.00a_x]+(0.075+0.030)G(b)\\&=200.06b+(53.00+5.00a_x)+0.105G(b)\end{aligned}$$

将 $a=200.06$，$c=53.00+5.00a_x$ 及 $f=0.105$ 代入（6－2）式，得

$$R(b)=\frac{200.06+(53.00+5.00a_x)/b}{1-0.105}$$

由 $a_x=\dfrac{1-(1+i)A_x}{i}=\dfrac{1-(1+i)(\delta/i)\bar{A}_x}{i}$ 及 $i=0.06$ 可算出 $a_x=13.2353$。再

将第二个表中的平均保额代入上式（注意 b 以千元为单位）可求得分级费率如表 6 – 5：

表 6 – 5

保额等级	分级保费（每千元保额之保费）
25 000 元 ~ 99 999 元	225.23 元
100 000 元 ~ 249 999 元	224.24 元
250 000 元 ~ 499 999 元	223.89 元
500 000 元以上	223.74 元

2. 保单费附加法

将（6 – 2）式改写成

$$R(b) = a' + \frac{c'}{b}$$

这里，$a' = \frac{a}{1-f}$, $c' = \frac{c}{1-f}$, 而毛保费可由下式计算

$$G(b) = bR(b) = ba' + c' \tag{6-3}$$

这里，a'是没有考虑保单费用时的费率，c'称为保单费。所以，可先算出不包含保单费用的费率（这个费率对不同保额的保单都相同），将保额乘上这个费率，再加上不变的保单费便得到应缴毛保费。这种方法称为保单费附加法，算出的保费比分级费率法更精确。

注意保单费与保单费用的区别。当加进保单费用而使保费增加时，代理人佣金、保费税等这些按保费百分比计算的支出也相应增加，这时保费的增加额即保单费 $c/(1-f)$ 自然应大于加进的保单费用 c。

【例 6 – 3】 一种年缴保费的终身寿险保单的费用分配如下表所示。

表 6 – 6

	保费百分数%	每 1 000 元保额（元）	保单费用（元）
初年度	30%	3.00	10.00
续年度	5%	0.50	2.50

试用精算等价原理和保单费附加法推导年缴毛保费公式。

解：（1）利用精算等价原理：记 $G(b)$为考虑保单费用的毛保费（这里 b 以 1 000 元为单位），则有

$$G(b)\ddot{a}_x = b(1\,000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + (0.30 + 0.50a_x)G(b) + 10 + 2.5a_x$$

整理得到：

$$G(b) = \frac{b \times (1\,000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + 10 + 2.5a_x}{[\ddot{a}_x - (0.30 + 0.05a_x)]}$$

（2）利用保单费附加法：以 $k(b)$ 记不考虑保单费用的保费，则有

$$k(b)\ddot{a}_x = b(1\,000\bar{A}_x + 3 + 0.50a_x) + 0.30k(b) + 0.05k(b)a_x$$

$$k(b) = b \times \left(\frac{1\,000\bar{A}_x + 0.50\ddot{a}_x + 2.50}{0.95\ddot{a}_x - 0.25}\right) = b\,a'$$

保单费 c' 应当平衡保单费用支出及由于加上这个保单费而增加的支出，因此由精算等价原理

$$c'\ddot{a}_x = 10 + 2.50a_x + 0.30c' + 0.05c'a_x$$

$$c' = \frac{10 + 2.50a_x}{0.7 + 0.95a_x}$$

从而由（6－3）式得

$$G(b) = b \times \left(\frac{1\,000\bar{A}_x + 0.50\ddot{a}_x + 2.50}{0.95\ddot{a}_x - 0.25}\right) + \frac{10 + 2.50a_x}{0.7 + 0.95a_x}$$

可以验证，由以上两种方法得到的年缴毛保费的结果是一致的。

§6.2 毛保费准备金

第五章讨论了均衡净保费准备金。在均衡净保费下，一般来说，由于死亡率随着年龄增大，保险前期的净保费支付死亡成本应有余，而保险后期净保费将不足，前期的余额应当积累起来以弥补后期的不足，这些余额的精算积累值就是净保费准备金。它在法律上是保险人对被保险人的负债。但是，保险人实际收取的是毛保费而不是净保费，支出的既有保险给付，也有各种费用。因此，在会计上需用包含费用的准备金作为负债，评估公司的经营状况。

中国保险监督管理委员会在2005年1月发布的《精算报告》中规定：保险公司须将所有业务划分为分红业务和非分红业务，分别计算毛保费责任准备金，并判断实际提取准备金的充足性。而毛保费责任准备金评估运用的假设，原则上应以本公司的实际经验为基础。对于缺乏经验数据的假设，可以参考行业一般经验结果或同等规模其他保险公司的经验。如果毛保费责任准备金评估运用的假设同时考虑了公司实际经验分析和对未来趋势的预期，应做出具体说明。此外，对于长期业务中所占比例不大的非主要险种，可以不进行毛保费责任准备金的具体计算，而采用比例近似的方法代替。比例近似方法应基于精算责任人的合理判断，即所采用的近似方法不会对最终的结果造成实质性的偏差，并且此部分业务实际提取保单责任准备金数额占比不得超过5％。

6.2.1 毛保费准备金的计算

将包含费用的准备金称为毛保费准备金，其计算原理与净保费准备金

相同。根据过去法，可表示如下

毛保费准备金 = 过去毛保费收入的精算积累值 − 过去保险给付与费用支出的精算积累值

根据未来法，可表示如下

毛保费准备金 = 未来保险给付与费用支出的精算现值 − 未来毛保费收入的精算现值

同样，定义包含费用的损失变量为

包含费用的损失变量 = 未来保险给付与费用支出的现值 − 未来毛保费收入的现值

这个损失变量的期望值即毛保费准备金。

【例 6−4】 一份保额为 100 000 元的 30 岁签订的两全保险，保险期限为 30 年，缴费期为 20 年。设年缴保费为 G，续年度费用为 e，求第 10 个保单年度末的毛保费准备金表达式。

解： 因为初年度费用未知，所以只能用未来法计算。未来保险给付的精算现值为

$$100\ 000\bar{A}_{40:\overline{20|}}$$

未来费用支出的精算现值为

$$e\ddot{a}_{40:\overline{20|}}$$

未来保费收入的精算现值为

$$G\ddot{a}_{40:\overline{10|}}$$

于是毛保费准备金为

$$(100\ 000\bar{A}_{40:\overline{20|}} + G\ddot{a}_{40:\overline{20|}}) - G\ddot{a}_{40:\overline{10|}}$$

在例 6−4 中，也可以先列出包含费用的损失变量，设为 ${}_{10}L_e$，设 U 为死亡时间，那么

$$ {}_{10}L_e = \begin{cases} 100\ 000v^U + e\ddot{a}_{\overline{J|}} - G\ddot{a}_{\overline{J|}} & (0 \leqslant U < 10) \\ 100\ 000v^U + e\ddot{a}_{\overline{J|}} - G\ddot{a}_{10} & (10 \leqslant U < 20) \\ 100\ 000v^U + e\ddot{a}_{\overline{20|}} - G\ddot{a}_{\overline{10|}} & (0 \geqslant 20) \end{cases} $$

这里 $J = [U]$，表示不超过 U 的最大整数。然后求 ${}_{10}L_e$ 的期望，得到

$$E[{}_{10}L_e] = 100\ 000\bar{A}_{40:\overline{20|}} + e\ddot{a}_{40:\overline{20|}} - G\ddot{a}_{40:\overline{10|}}$$

这就是所求的毛保费准备金。

6.2.2　毛保费准备金对会计报表的影响

为了了解以毛保费准备金作为负债对会计报表的影响，下面给出一个数值例子。

考虑一个年缴保费的 3 年期两全保险，有关情况如表 6−7 所示。

表 6－7　　保　单　说　明

险　种	在 x 岁签订的年缴保费 3 年期两全保险
保费与保险支付方式	全离散式
死亡率	$q_x=1/10$，$q_{x+1}=1/9$，$q_{x+2}=1/8$
利率	预定年实际利率 $i=15\%$
保险金额	1 000 元
费用支付时间	每个保单年度初

由此计算年缴均衡净保费

$$
\begin{aligned}
1\ 000P_{x:\overline{3}|} &= \frac{1\ 000A_{x:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}} \\
&= \frac{1\ 000(vq_x+v^2\ {}_{1|}q_x+v^3\ {}_2p_x)}{1+vp_x+v^2\ {}_2p_x} \\
&= \frac{1\ 000(0.1v+0.1v^2+0.8v^3)}{1+0.9v+0.8v^2} \\
&= 288.41(\text{元})
\end{aligned}
$$

各期末净保费准备金为

$$
\begin{aligned}
1\ 000\ {}_0V_{x:\overline{3}|} &= 1\ 000A_{x:\overline{3}|}-1\ 000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x:\overline{3}|} \\
&= 0(\text{元})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1\ 000\ {}_1V_{x:\overline{3}|} &= 1\ 000A_{x+1:\overline{2}|}-1\ 000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|} \\
&= 1\ 000(vq_{x+1}+v^2p_{x+1})-1\ 000p_{x:\overline{3}|}(1+vp_{x+1}) \\
&= 257.41(\text{元})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1\ 000\ {}_2V_{x:\overline{3}|} &= 1\ 000A_{x+2:\overline{1}|}-1\ 000P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} \\
&= 1\ 000v-1\ 000P_{x:\overline{3}|} \\
&= 581.16(\text{元})
\end{aligned}
$$

下面考虑包含费用情况。各种费用及其分配如表 6－8 所示。

表 6－8　　费 用 附 加 表

费用类型	初年度		续年度	
	百分比数	固定数	百分比数	固定数
销售佣金	10%	—	2%	—
一般费用	4%	3	—	1
保费税	2%	—	2%	—
保单维持费	2%	1	2%	1
签单与分类费	2%	4	—	—
合计	20%	8	6%	2

注：这里“百分比数”指费用按保费的百分比支付的部分。

由此可以计算年缴保费

$$G\ddot{a}_{x:\overline{3}|}=1\ 000A_{x:\overline{3}|}+(0.2G+8)+(0.06G+2)a_{x:\overline{2}|}$$

$$G=\frac{1\ 000A_{x:\overline{3}|}+8+2a_{x:\overline{2}|}}{0.8+0.94a_{x:\overline{2}|}}$$

$$=\frac{1\ 000(vq_x+v^2\ _{1|}q_x+v^3\ _2p_x)+8+2(vp_x+v^2\ _2p_x)}{0.8+0.94(vp_x+v^2\ _2p_x)}$$

$$=332.35(\text{元})$$

各期末毛保费准备金为

$$E[_0L_e]=[1\ 000A_{x:\overline{3}|}+(0.2G+8)+(0.06G+2)a_{x:\overline{3}|}]-G\ddot{a}_{x:\overline{3}|}$$

$$=0(\text{元})$$

$$E[_1L_e]=[1\ 000A_{1:\overline{2}|}+(0.06G+2)\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}]-G\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}$$

$$=1\ 000(vq_x+v^2p_{x+1})+(0.06G+2)(1+vp_{x+1})-G(1+vp_{x+1})$$

$$=218.41(\text{元})$$

$$E[_2L_e]=[1\ 000A_{x+2:\overline{1}|}+(0.06G+2)\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}]-G\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}$$

$$=1\ 000v+(0.06G+2)-G$$

$$=559.16(\text{元})$$

下面比较各期末净保费准备金与毛保费准备金。

第一个保单年度初，在未收取保费之前，保险人对被保险人没有负债，这时净保费准备金与毛保费准备金都为零。

在第一个保单年度末和第二个保单年度末，毛保费准备金都小于净保费准备金。这是因为在第一个保单年度，附加保费 $G-1\ 000P_{x:\overline{3}|}=43.94$ 元不足以抵付费用 $0.2G+8=74.47$ 元。保单初始年度在附加保费上的亏损将在后续年度逐年摊回，这等价于续年度的毛保费收入的现值相对较大，因此续年度的毛保费准备金将小于净保费准备金。

在最后一个保单年度末，当保险人履行生存给付后，保险人对被保险人不再有负债，此时净保费准备金与毛保费准备金都等于零。

现在对上述保单，把有关数据列入会计报表进行比较。假设每份保单的年缴毛保费在原来 332.35 元的基础上，为使保险人获得利润和防范意外风险，再加上 10 元附加保费。保险人有 1 000 元初始基金。最初有 10 个被保险人。下面的会计报表 6－9 是由这 10 个被保险人组成的确定生存群体构造的，表中的各数据除以 10 就是相应于每个最初被保险人的期望值。第一种会计报表以净保费准备金作为负债，第二种会计报表则以毛保费准备金作为负债。

表 6－9　　　　　收　入　表

(1) 以净保费准备金作为负债		(2) 以毛保费准备金作为负债
第一年收入		
3 423.50	保费收入 (10 人)	3 423.50
548.82	投资收入 (15%)	548.82
3 972.32	合计	3 972.32
支出		
684.70	百分数 (20%)	684.70
80.00	固定数 (8)	80.00
1 000.00	给付 (1 人)	1 000.00
2 316.69	准备金增加额	1 965.69
4 081.39	合计	3 730.39
－109.07	净收入	241.93
第二年收入		
3 081.15	保费收入 (9 人)	3 081.15
912.88	投资收入 (15%)	912.88
3 994.03	合计	3 994.03
支出		
184.87	百分数 (6%)	184.87
18.00	固定数 (2)	18.00
1 000.00	给付 (1 人)	1 000.00
2 332.59	准备金增加额	2 507.59
3 535.46	合计	3 710.46
458.57	净收入	283.57
第三年收入		
2 738.80	保费收入 (8 人)	2 738.80
1 283.59	投资收入 (15%)	1 283.59
4 022.39	合计	4 022.39
支出		
164.33	百分数 (6%)	164.33
16.00	固定数 (2)	16.00
8 000.00	给付 (1 人)	8 000.00
－4 649.28	准备金增加额	－4 473.28
3 531.05	合计	3 707.05
491.34	净收入	315.34

注：1. 投资收入＝（上年末资产＋保费收入－费用）×0.15

2. 总净收入＝－109.07＋458.57＋491.34

＝241.93＋283.57＋315.34

＝840.84

从表 6－9 可见，两种会计方法得出的总净收入是相同的。这是因为到保险期结束时，每人年缴保费中的 332.35 元应当平衡所有的保险给付与费用开支。保险人的总净收入完全来自 1 000 元的初始基金和每人年缴保费中的 10 元利润附加保费，即

总净收入 = 初始基金上的利息收入 + 利润附加保费的积累值

$=1\ 000\times[1.15^3-1]+10\times10\times(1-20\%)\times1.15^3+10\times9\times(1-6\%)\times1.15^2$

$=840.91$

以上两种计算结果之差来自舍入误差。但在以净保费准备金作为负债的会计科目中，由于第一年的负债增加较大，初始基金上的投资收入和利润附加保费的积累值被抵消后，还出现亏损 109.07 元。这些被抵消掉的初始基金上的投资收入和利润附加保费的积累值将在续年度摊回，这就导致续年度的净收入较大。在以毛保费准备金作为负债的会计科目中，由于第一年的负债增加较小，净收入为正数。另外，各年度的净收入完全来自于自有资金和利润附加保费。这可验证如下：

第一年的净收入 $=1\ 000\times(0.15)+100\times(1-0.2)\times(1.15)=242$

第二年的净收入 $=(1\ 000+242)\times(0.15)+90\times(1-0.06)\times(1.15)=283.59$

第三年的净收入 $=(1\ 000+242+283.59)\times(0.15)+80\times(1-0.06)\times(1.15)=315.32$

计算结果有舍入误差。

最后比较一下两种负债下的资产负债表 6-10。以净保费准备金作为负债时，第一年度末的盈余 890.93 元小于初始基金 1 000 元。如果没有这笔初始基金作为资产，保险人将处于资不抵债的状况。但在以毛保费准备金作为负债时，则不会出现这种情况。

表 6-10　　资产负债表

(1) 以净保费准备金作为负债		(2) 以毛保费准备金作为负债
	第一年末	
3 207.62	资产	3 207.62
2 316.69	负债（准备金）	1 965.69
890.93	盈余	1 241.93
	第二年末	
5 998.78	资产	5 998.78
4 649.28	负债（准备金）	4 473.28
1 349.50	盈余	1 525.50
	第三年末	
1 840.84	资产	1 840.84
0	负债（准备金）	0
1 840.84	盈余	1 840.84

注：1. 盈余的增加数 = 总净收入

$1\ 840.84-1\ 000=840.84$

2. 盈余 = 上年末的盈余 + 净收入

3. 资产 = 上年末的资产 +（净收入 + 准备金增加数）

= 上年末的资产 +（保费收入 + 投资收入 − 给付 − 费用）

最后要说明的是，在实务中的结果不像以上会计报表所假设的那样具

有确定性，否则寿险经营就不存在风险了。

§6.3 预期盈余计算

本节通过数学推导来分析预期盈余，使上节中的思想更为清晰。结合表6－9和表6－10，有助于对本节内容的理解。

6.3.1 不考虑费用时的情形

财务会计的目的之一是在各会计期末确定下述会计等式中的各要素

$$A(h)=L(h)+U(h)$$

这里，$A(h)$表示第h会计期末的资产额，$L(h)$表示负债额，而$U(h)$表示权益额（在保险会计中也称为盈余）。盈余的增量可表示为

$$\Delta U(h)=\Delta A(h)-\Delta L(h)$$

$$=\text{第 } h+1 \text{ 期的净收益} \qquad (6-4)$$

首先在表6－11所给的理想条件下，运用数学推导来计算预期盈余。

表6－11　　保　单　说　明

1. 险种	终身寿险，单位保额
2. 支付方式	全离散式
3. 签单年龄与时间	年龄为x岁，在第一会计期初签单
4. 费用	无费用及附加保费
5. 投资经验	投资所得利率与假定利率一致

根据第五章中关于净保费准备金的递推关系，对于第h保单年度，有

年初l_{x+h-1}个人的期初准备金×（$1+i$）－年末d_{x+h-1}个人的死亡给付＝年末l_{x+h}个人的期末准备金

用数学式表达，即为

$$l_{x+h-1}({}_{h-1}V_x+P_x)(1+i)-d_{x+h-1}=l_{x+h}\cdot{}_hV_x \quad (h=1,2,3,\cdots) \quad (6-5)$$

如果考虑每个最初被保险人在第h保单年度的预期值，则在上式两边除以最初被保险人的人数l_x，得到

$${}_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x+P_x)(1+i)-{}_{h-1}p_x\,q_{x+h-1}={}_hp_x\cdot{}_hV_x \quad (h=1,2,3,\cdots)(6-6)$$

因此，在第一会计期末（假设会计与保单年度一致），对于每个最初被保险人有

$$P_x(1+i)-q_x=p_x\,{}_1V_x$$

在第一会计期中，对每个最初被保险人，保险人的预期资产增量为

$$\Delta A(1)=\text{保费收入}+\text{利息收入}-\text{死亡给付}$$

$$=P_x+P_xi-q_x$$

$$=P_x(1+i)-q_x$$

每个最初被保险人在缴纳第一期保费之前，保险人的资产为零，即 $A(0)=0$，所以

$$\begin{aligned}A(1)&=A(0)+\Delta A(0)\\&=P_x(1+i)-q_x\\&=P_x\cdot{}_1V_x=L(1)\end{aligned}$$

这说明在第一会计期末，预期资产与预期负债相等。

假设在第 h 会计期末有

$$A(h)=L(h)$$

在第 $h+1$ 会计期，保险人的预期资产增量为

$$\begin{aligned}\Delta A(h)&=\text{保费收入}+\text{利息收入}-\text{死亡给付}\\&={}_hp_xP_x+{}_hp_x({}_hV_x+P_x)i-{}_hp_x\,q_{x+h}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}A(h+1)&=A(h)+\Delta A(h)\\&=L(h)+\Delta A(h)\\&={}_hp_x\,{}_hV_x+\{{}_hp_x[P_x+({}_hV_x+P_x)i]-{}_hp_x\,q_{x+h}\}\\&={}_hp_x(P_x+{}_hV_x)(1+i)-{}_hp_x\,q_{x+h}\\&={}_{h+1}p_x\,{}_{h+1}V_x=L(h+1)\end{aligned}$$

根据数学归纳法，在所有会计期末，预期资产都等于预期负债：

$$A(h)=L(h)\quad(h=1,2,3,\cdots)$$

于是

$$U(h)=A(h)-L(h)=0\quad(h=1,2,3,\cdots)$$

从而可得结论：在没有初始基金、利润及意外风险附加保费的情形下，所有会计期末的预期盈余都是零。

6.3.2　考虑费用时的情形

考虑较为实际一些的情况，设表 6－11 所给的其他条件不变，而在净保费 P_x 上附加一个正的常数 c，并设第 h 会计期初每个生存者保单上支出的费用为 e_{h-1}，附加保费 c 中包含利润，因此 $\{c, c, c, \cdots\}$ 的精算现值大于 $\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$ 的精算现值。

考虑附加保费和费用之后，(6－6) 式变为

$$\begin{aligned}&{}_{h-1}p_x\{[{}_{h-1}V_x+u(h-1)]+(P_x+c)-e_{h-1}\}(1+i)-{}_{h-1}p_x\,q_{x+h-1}\\&={}_hp_x[{}_hV_x+u(h)],\quad(h=1,2,3\cdots)\end{aligned}\tag{6-7}$$

其中 $u(h)$ 表示相应于每个生存的被保险人在第 h 会计期末的盈余。

(6－7) 式减去 (6－6) 式，得到

$${}_{h-1}p_x[u(h-1)+(c-e_{h-1})](1+i)={}_hp_xu(h),(h=1,2,3,\cdots)\tag{6-8}$$

在上式两边乘以 v^h 并移项，得到

$$\Delta[v^{h-1}{}_{h-1}p_x u(h-1)] = v^{h-1}p_x(c-e_{h-1}) \tag{6-9}$$

对初始条件 $u(0)=0$（即没有初始基金的情形），对上式两边求和可得

$$\sum_{j=1}^{h}\Delta[v^{h-1}{}_{h-1}p_x u(j-1)] = \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$$

$$v^h{}_hp_x u(h) = \sum_{j=1}^{h} v^{j-1}{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1}) \tag{6-10}$$

$$_hp_x u(h) = \sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$$

上面最后式子表明，平均来看对于每个最初被保险人，在第 h 会计期末的预期盈余是前面各会计期上对盈余的预期贡献$\{_{j-1}p_x(c-e_{j-1}), j=1,2,\cdots,h\}$的积累值。读者可把此结论与上节中总净收入的计算加以比较。

在上面讨论的保险模型中，如果把净保费准备金作为负债，那么在第 h 会计期末对于每个最初被保人的各种期望值如表 6－12 所示：

表 6－12

资产负债表（第 h 会计期末）		
$A(h)=L(h)+U(h)$ $={}_hp_x\cdot{}_hV_x+{}_hp_x u(h)$ $={}_hp_x\cdot{}_hV_x+\sum_1^h(1+j)^{h-j+1}{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$		
收入表（第 h 会计期）		
收入		
保费收入	$_{h-1}p_x\ (p_x+c)$	
投资收入	$_{h-1}p_x[{}_{h-1}V_x+u\ (h-1)\ \ +p_x+c-e_{h-1}]\times i$	
总计	$_{h-1}p_x\{(P_x+c)(1+i)+[{}_{h-1}V_x+u(h-1)-e_{h-1}]\times i\}$	
支出		
死亡给付	$_{h-1}p_x\ q_{x+h-1}$	
费用	$_{h-1}p_x e_{h-1}$	
准备金增加额	$_hp_x\ {}_hV_x-{}_{h-1}p_x\ {}_{h-1}V_x$	
总计	$_hp_x\ {}_hV_x-{}_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x-e_{h-1})+{}_{h-1}p_x\ q_{x+h-1}$	
净收入（盈余增加额）	$_{h-1}p_x[u(h-1)\times i+(c-e_{h-1})(1+i)]$	(6－11)

净收入的计算应用了(6－6)式，预期盈余的表示应用了(6－10)式。

由（6－11）式可得在第 h 会计期末每个最初被保险人的预期盈余

$$_hp_x u(h) = {}_{h-1}p_x u(h-1) + {}_{h-1}p_x[u(h-1)\times i+(c-e_{h-1})(1+i)] \tag{6-12}$$

上式与（6－8）式是一致的，这里是从会计的角度推导的。

通常费用的开支在保单初期很大，但会随着保单期延续而减少。这样，一般来说，对于较小的 h，预期盈余

$$ {}_hp_x u(h) = \sum_{j=1}^{h} (1+i)^{h-j+1} {}_{j-1}p_x (c - e_{j-1}) $$

将是负值，而对于较大的 h 将是正值。这个结果适合于以净保费准备金作为负债，附加保费不变，而费用随保单期递减的保险模型。

为了避免在最初几个保单年度出现资产小于负债的情况，可以采用下面几种办法：

1. 为获得初始盈余 $u(0)$，保险人可建立一个初始基金，以使

$$ u(0)(1+i)^h + \sum_{j=1}^{h} (1+i)^{h-j+1} {}_{j-1}p_x (c - e_{j-1}) \quad h = 0,1,2,\cdots $$

均为正数。

2. 可以使附加保费随保单年度而变化，以使 $c_{h-1} - e_{h-1} \geqslant 0, (h=1,2,3,\cdots)$。

3. 可以基于修正准备金原理记录保险人的负债，以减少最初几个保单年度认可的负债。表 6－9 和表 6－10 中以毛保费准备金作为负债即是一个例子。

最后一种办法将在下节进一步讨论。

§6.4　修正准备金

以毛保费准备金作为负债实际上是一种修正准备金制度。在 §6.2 节的例子中，初年度附加保费抵付费用开支的不足部分(74.47 － 43.94) = 30.53(元)由初年度支付死亡成本有余的净保费来弥补。这样，第一年的净保费降低到(288.41 － 30.53) = 257.88(元)，用过去法求得第一年末的净保费准备金为

$$ (257.88 - 1\,000A^{1}_{x:\overline{1}|})/(vp_x) = (257.88 - 1\,000vq_x)/(vp_x) = 218.40(\text{元}) $$

这等于第一年末的毛保费准备金（有 0.01 的舍入误差）。相对于均衡净保费准备金来说，这种修正净保费准备金可以降低保险前期的负债，从而使账上盈余不至于为负数。下面先就一般情形进行讨论，然后介绍一些国家采用的法定准备金制度。

6.4.1　修正准备金的一般方法

按照修正准备金方法，在准备金的定义中从未来给付的精算现值中减去的不是均衡净保费的精算现值，而是定义一系列分段净保费的精算现值。通常是把分段净保费分为三个不同水平。这三个净保费水平分别表示如下：初年度净保费记为 α；往后 $j-1$ 个年度的净保费记为 β；j 年之后的净保费即为原来的均衡净保费 P。这一系列净保费应与原来的均衡净保费有相同的精算现值，即

$$ \alpha + \beta a_{x:\overline{j-1}|} + P\,{}_{j|}\ddot{a}_{x:\overline{h-j}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{h}|} $$

$$\alpha+\beta a_{x:\overline{j-1}|}=P\ddot{a}_{x:\overline{j}|} \tag{6-13}$$

这里 h 为保费缴纳年数，前面 j 年缴费期称为修正期。

年缴均衡毛保费 $P+c$ 中能用于支付初年度费用的部分是 c，这往往不够支付费用。因此要减少初年度的净保费以满足费用开支，即令 $\alpha<P$，这样就有 $P+c-\alpha>c$。在修正准备金方法中，能获得 $P+c-\alpha$ 来支付初年度较大的费用。当 $\alpha<P$ 时，自然就有 $\beta>P$，这也可以通过改写（6-13）式看出。

$$\alpha+\beta a_{x:\overline{j-1}|}=P(a_{x:\overline{j-1}|}+1)$$

$$\beta=P+\frac{P-\alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}} \tag{6-14}$$

（6-13）式还可以写成另一种有用的形式

$$\beta(\ddot{a}_{x:\overline{j}|}-1)=P\ddot{a}_{x:\overline{j}|}-\alpha$$

$$\beta=P+\frac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}} \tag{6-15}$$

由（6-14）和（6-15）式可以看出，续年度净保费可以通过确定修正期年数 j，均衡净保费与初年度净保费之差 $P-\alpha$，或者续年度净保费与初年度净保费之差 $\beta-\alpha$ 来定义。图 6-1 说明了修正准备金方法中的各个保费之间的关系。

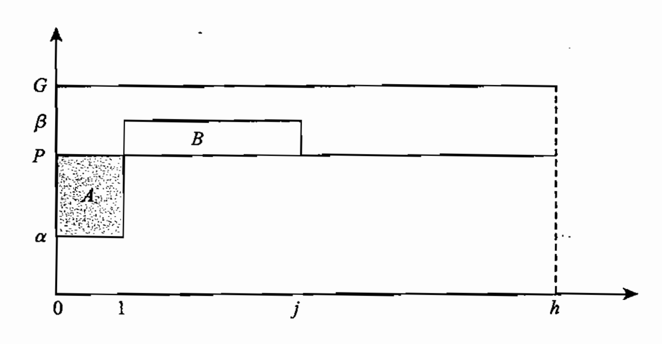


图 6-1　修正准备金方法中的各种保费

在图 6-1 中，阴影部分 A 的面积为 $P-\alpha$。由（6-13）得

$$P-\alpha=(\beta-P)a_{x:\overline{j-1}|}$$

用 V^{Mod} 表示修正准备金方法中的期末准备金。对于离散式和半连续式寿险，有

$$ {}_kV^{Mod}=\begin{cases}A(k)-\beta\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}-P_{j-k|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-j}|} & (k<j)\\ A(k)-P\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & (j\leqslant k<h)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}A(k)-P\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}-(\beta-P)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} & (k<j)\\ A(k)-P\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & (j\leqslant k<h)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} {}_kV-(\beta-P)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|} & (k<j) \\ {}_kV & (j\leqslant k<h) \end{cases}$$

这里 $A(k)$ 表示保险给付在 k 时刻的精算现值。由此可得，当 $\alpha<P$（从而 $\beta>P$）时，在修正期内修正准备金小于均衡净保费准备金，而在修正期后两者归为一致。

【例 6-5】 对（30）签订的 1 000 元保额，缴费期为 35 年的 50 年期离散式两全保险，应用修正准备金方法，计算第 8 个保单年末的修正准备金。已知：

（1）修正年限为 20 年；

（2）第 2 年至第 20 年的修正年净保费为 9.56；

（3）$1\,000\,{}_8^{35}V_{30:\overline{50}|}=74.42$；

（4）${}_{35}P_{30:\overline{50}|}=0.006340$；

（5）$\ddot{a}_{38:\overline{12}|}=8.805$。

计算 $1\,000\,{}_8^{35}V^{Mod}_{30:\overline{50}|}$。

解： 这里修正年限为 $j=20$ 年，有

$$\begin{aligned} 1\,000\,{}_8^{35}V_{30:\overline{50}|} &= 1\,000[{}_8^{35}V_{30:\overline{50}|}-(\beta-{}_{35}P_{30:\overline{50}|})\ddot{a}_{38:\overline{20-8}|}] \\ &= 74.42-(9.56-1\,000\times0.006340)\times8.805 \\ &= 46.07 \end{aligned}$$

实际上，修正准备金方法也可以推广到全连续式寿险中。设 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 分别表示初年度和续年度的修正年净保费，修正期年数为 j，那么与（6-13）式相应的有

$$\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|}+\bar{\beta}\,{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-j}|}+\bar{P}\,{}_{j|}\bar{a}_{x:\overline{h-j}|}=\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{h}|} \tag{6-16}$$

这里 h 为保费缴纳年数，$\bar{P}$ 为连续支付的均衡净保费。

同样可以导出与（6-14）式相应的式子

$$\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|}+\bar{\beta}\,{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|}=\bar{P}(\bar{a}_{x:\overline{1}|}+{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{j-1}|})$$

$$\bar{\beta}=\bar{P}+\frac{(\bar{P}-\bar{\alpha})\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{1}|}} \tag{6-17}$$

由上式知，当 $\bar{\alpha}<\bar{P}$ 时，就有 $\bar{\beta}>\bar{P}$。

对于连续式寿险，当 $t\geqslant1$ 时，t 时刻的修正准备金可由未来法计算如下

$${}_t\bar{V}^{Mod}=\begin{cases} A(t)-\bar{\beta}\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|}-\bar{P}\,{}_{j-t|}\bar{a}_{x+t:\overline{h-j}|} & (t<j) \\ A(t)-\bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & (j\leqslant t<h) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} A(t)-\bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|}-(\bar{\beta}-\bar{P})\ddot{a}_{x+t:\overline{j-t}|} & (t<j) \\ A(t)-\bar{P}\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|} & (j\leqslant t<h) \end{cases}$$

$$
=\begin{cases} {}_1\bar{V}-(\bar{\beta}-\bar{P})\bar{a}_{x+t:\overline{j-t}|} & (t<j) \\ {}_t\bar{V} & (j\leqslant t<h) \end{cases}
$$

这里 $A(t)$ 表示保险给付在 t 时刻的精算现值。与全离散式寿险的情况相同，若 $\bar{\alpha}<\bar{P}$（从而 $\bar{\beta}>\bar{P}$），在修正期内修正准备金小于均衡净保费准备金，而在修正期后两者归为一致。

当 $t<1$ 时，t 时刻的修正准备金按过去法计算较为简单。

$$
{}_t\bar{V}^{Mod}=\frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{t}|}-\bar{A}^1_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x},\quad (0<t<1)
$$

当 $\bar{\alpha}<\bar{P}$ 时，由于

$$
{}_t\bar{V}-{}_t\bar{V}^{Mod}=\frac{\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{t}|}-\bar{A}^1_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}-\frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{t}|}-\bar{A}^1_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}
$$

$$
=(\bar{P}-\bar{a})\ \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}
$$

可知，修正准备金在 $t<1$ 时也比均衡净保费准备金小。

6.4.2 一年定期修正制

在修正准备金方法中，为了增加初年度的附加保费 $G-\alpha$，以满足初年度较大的费用开支，常要求 α 小于 P。然而在某些国家的管理规定中，α 的取值有一个实际的最低界限。这个最低界限来自这样一种考虑：负的准备金负债实际上算作资产。由于未来保费的收取是不确定的，因而在确定保险公司的偿付能力时，管理机构不允许将负准备金列入资产负债表。这时，确定修正准备金方法就要求避免在第一保单年度末出现负准备金。对于全离散式单位保额的寿险，就意味着 α 的最小可能取值为 $A^1_{x:\overline{1}|}$，即一年定期寿险的死亡成本。这是因为

$$
{}_1V=\frac{\alpha}{{}_1E_x}-\frac{A^1_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x}=(\alpha-A^1_{x:\overline{1}|})\ /{}_1E_x
$$

要使 ${}_1V\geqslant0$，必须 $\alpha\geqslant A^1_{x:\overline{1}|}$。

另外，对于确定的 α，准备金的大小与修正期的长短有关。从(6－14)式可以看出，续年度修正净保费 β 随修正期年度 j 的增长而减小。由过去法计算准备金，在修正期内有

$$
{}_kV^{Mod}=\frac{\alpha+\beta a_{x:\overline{k-1}|}}{{}_kE_x}-(\text{到时刻 } k \text{ 为止保险给付的精算积累值})
$$

由于 β 随修正期年数 j 的增大而减小，而使右边第一项也随修正期增大而减小，第二项与修正期无关，由此可知，修正期越长准备金越小。

由于修正期不能长于保费缴纳期，因此，如果 α 取最低要求 $A^1_{x:\overline{1}|}$，而

以整个缴费期为修正期，那么准备金就达到了最低限。这种修正准备金方法称为一年定期全缴费期修正法，简称 FPT 法（Full Preliminary Term）。在 FPT 法中，第一个保单年末的准备金为零。

FPT 法的续年度修正净保费 β 可由下式确定

$$A^{1}_{x:\overline{1}|}+\beta\ {}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}=P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$$

$$=A^{1}_{x:\overline{1}|}+{}_{1}E_{x}A(1)$$

变形后得到

$$\beta=\frac{{}_{1}E_{x}A(1)}{{}_{1|}\ddot{a}_{x:\overline{h-1}|}}=\frac{A(1)}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}} \tag{6-18}$$

这里 $A(1)$ 是在 $x+1$ 岁时签订的、与原保险有相同的到期年龄的保险的趸缴净保费，β 则可看作该保险的年缴净保费，而缴费期比原保险少一年。

【例 6－6】 对 35 岁男性签订的保额为 20 000 元的 30 年期全离散式两全保险，根据附录Ⅲ（CL1 非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=2.5\%$ 的情况下，求一年定期修正制下第三年末的准备金。

解： 由（6－14）式有

$$\beta^{FPT}=P_{35:\overline{30}|}+\frac{P_{35:\overline{30}|}-A^{1}_{35:\overline{1}|}}{a_{35:\overline{29}|}}$$

由换算表数值，得到

$$P_{35:\overline{30}|}=\frac{M_{35}-M_{65}+D_{65}}{N_{35}-N_{65}}=0.02355$$

$$a_{35:\overline{29}|}=\frac{N_{36}-N_{65}}{D_{35}}=19.85884$$

$$A^{1}_{35:\overline{1}|}=\frac{M_{35}-M_{36}}{D_{35}}=0.00103$$

求得 $\beta^{FPT}=0.02468$。所求准备金为

$${}_{3}V^{FPT}_{35:\overline{30}|}=20\ 000A_{38:\overline{27}|}-20\ 000\beta^{FPT}\ddot{a}_{38:\overline{27}|}$$

$$=20\ 000\left[\frac{M_{38}-M_{65}+D_{65}}{D_{38}}-\beta^{FPT}\frac{N_{38}-N_{65}}{D_{38}}\right]$$

$$=2\ 000\ (0.52735-0.02468\times19.37874)$$

$$=981.65\ (元)$$

对于连续式寿险，一年定期修正制中初年度净保费 $\bar{\alpha}$ 由下式确定

$${}_{1}\bar{V}^{FPT}=0$$

由此可得

$$\frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1}E_{x}}-\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}}{{}_{1}E_{x}}=0$$

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}}{a_{x:\overline{1}|}}$$

续年度修正净保费 $\bar{\beta}$ 则由下式计算

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}+\bar{\beta}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-1}|}=\bar{P}(\bar{A})\bar{a}_{x:\overline{h}|}=\bar{A}$$

$$=A^{1}_{x:\overline{1}|}+{}_{1}E_{x}\bar{A}(1)$$

变形后得到

$$\bar{\beta}=\frac{{}_{1}E_{x}\bar{A}(1)}{{}_{1|}\bar{a}_{x:\overline{h-1}|}}=\frac{\bar{A}(1)}{\bar{a}_{x:\overline{h-1}|}} \tag{6-19}$$

最后看看 FPT 法对第一个保单年度盈余的影响。

在均衡净保费准备金方法（简称 NLP 法）中，年缴毛保费可以表示为

$$G=P+c$$

这里，c 为各年度的附加保费。在 FPT 法中，修正期内各年度毛保费可以表示为

$$G=A^{1}_{x:\overline{1}|}+c_{0}=\beta+c_{1}$$

这里 c_0 为初年度的附加保费，c_1 为续年度的附加保费。在初年度，由以上两式可得

$$c_{0}=c+(P-A^{1}_{x:\overline{1}|})$$

这就是说，相对于 NLP 方法，FPT 法在初年度提供了一项费用补贴 $(P-A^{1}_{x:\overline{1}|})$。

假设没有初始基金，即 $u(0)=0$，根据(6-8)式，在 NLP 法下有

$$(c-e_{0})(1+i)=p_{x}u(1)$$

通常因为 $c<e_0$ 而使 $u(1)<0$。

在 FPT 下有

$$(c_{0}-e_{0})(1+i)=[c+(P-A^{1}_{x:\overline{1}|})-e_{0}](1+i)=p_{x}u(1)$$

如果加上费用补贴的所得，使得 $c_0=c+(P-A^{1}_{x:\overline{1}|})\geqslant e_0$，则第一年度的盈余非负。如果仍然 $c_0<e_0$，则保险人需要采取其他措施来解决资不抵债的问题，例如，设置初始基金，使得 $u(0)>0$，或提高初年度保费。前者对于新业务占很大比重的成长型的寿险公司来说会有困难，后者则受市场竞争的限制。

基于以上这种情况，有些国家的准备金标准比一年定期修正制更低。这种更低的标准主要反映在初年度费用补贴 $P-\alpha$ 可以比 $P-A^{1}_{x:\overline{1}|}$ 更大，而计算原理是相同的。例如，加拿大保险法规定，保单初年度的费用补贴 $E^{Can}=P-\alpha^{Can}$ 最多可以取以下三者中的最小者：（1）均衡净保费的 1.5 倍；（2）获得该业务实际发生的费用；（3）在保证能支付管理费用和保单红利的前提下，可以从各续年度摊回的费用的精算现值。依照这一标准，初年

度费用补贴 E^{Can} 可能高于均衡净保费 P，从而使修正后的初年度净保费 $\alpha^{Can} = P - E^{Can} < 0$。这时第一个保单年度的期初准备金 ${}_0V^{Can} + \alpha^{Can} = \alpha^{Can} < 0$，由此也使得第一个保单年度的期末准备金 ${}_1V^{Can} = [({}_0V^{Can} + \alpha^{Can})(1+i) - q_x]/p_x < 0$。因此，实际上加拿大保险法承认负准备金为资产的一部分。

【例 6－7】 在例 6－6 中，设初年度费用补贴为均衡净保费的 1.5 倍，求第三年末的准备金。

解： 这时续年度净保费为

$$\beta = P_{35:\overline{30|}} + \frac{1.5P_{35:\overline{30|}}}{a_{35:\overline{29|}}} = 0.02533 \text{（元）}$$

所求准备金为

$$\begin{aligned}{}_3V^{Mod}_{35:\overline{30|}} &= 20\,000A_{38:\overline{27|}} - 20\,000\beta\ddot{a}_{38:\overline{27|}} \\ &= 20\,000 \times (0.52735 - 0.02533 \times 19.37874) \\ &= 729.73 \text{（元）}\end{aligned}$$

【例 6－8】 已知 $i = 0.06$，$\ddot{a}_{52} = 12.88785$，$A^{1}_{51:\overline{1|}} = 0.00606$，计算 $1\,000\ {}_2V^{FPT}_{50}$。

解： 由于对于（50）购买的终身寿险，其修正续年保费 $\beta^{FPT} = P_{51}$，故应用未来法公式，所求的准备金为

$$\begin{aligned}1\,000\ {}_2V^{FPT}_{50} &= 1\,000 \cdot (A_{52} - P_{51} \cdot \ddot{a}_{52}) \\ &= 1\,000\ {}_1V_{51} \\ &= 1\,000 \cdot \left(1 - \frac{\ddot{a}_{52}}{\ddot{a}_{51}}\right)\end{aligned}$$

又由于

$$A^{1}_{51:\overline{1|}} = vq_{51} = 0.00606$$

$$\ddot{a}_{51} = 1 + vp_{51}\ddot{a}_{52} = 1 + (v - vq_{51})\ddot{a}_{52} = 13.080249$$

所以

$$\begin{aligned}1\,000\ {}_2V^{FPT}_{50} &= 1\,000 \cdot \left(1 - \frac{\ddot{a}_{52}}{\ddot{a}_{51}}\right) \\ &= 1\,000 \cdot \left(1 - \frac{12.88785}{13.080249}\right) \\ &= 14.71\end{aligned}$$

6.4.3　保单分类修正制

在 FPT 中，初年度的费用补贴（$P - A^{1}_{x:\overline{1|}}$）会因不同的险种而在数量上有很大的差别。例如，$P_{x:\overline{n|}}$ 通常比 $P^{1}_{x:\overline{n|}}$ 大得多，所以 n 年两全保险较 n 年定期寿险有大得多的初年度费用补贴。于是就有这样一种想法，如果 FPT 法为低保费保单提供的费用补贴足以支付初年度费用，那么对于高保费保单，这种费用补贴就有余。基于这种想法，对低保费保单可以使用 FPT 法，对

高保费保单则须减少初年度费用补贴。根据保费的高低来划分保单，对高保费保单和低保费保单规定不同的修正准备金方法，称为保单分类修正制。

制定一种保单分类修正制需要考虑两个问题：高保费保单与低保费保单的划分标准；对高保费保单初年度费用补贴（或等价的初年度修正净保费或续年度修正净保费）和修正期的规定。

在 FPT 法中，第一年度的修正净保费 $\alpha = A^{1}_{x:\overline{1}|}$ 刚好承担该年的死亡给付，使年末准备金等于零。这对于死亡保险有其合理性。但对于两全保险，净保费中有相当大的一部分是用于生存给付的，这部分不宜完全用于补贴费用，扣除费用补贴后，其余的应该积存到年末，提供正的准备金。终身寿险既是期限最长的定期寿险，又是期限最长的两全保险。它既是最贵的定期寿险，又是最便宜的两全保险。因此，在保单分类制中，常用终身寿险作为高、低保费保单的划分标准。但由于年费率与缴费期长短有关，所以还需确定终身寿险的缴费期限。此外，有关初年度的费用补贴可用这个终身寿险的初年度费用补贴来确定。

下面介绍美国标准评估法为寿险定义的保险监督官评估标准。该标准的要点如下：

1. 满足 $\beta^{FPT} > {}_{19}P_{x+1}$ 的保单为高保费保单，这里 β^{FPT} 为该保单按 20 年缴费使用 FPT 法时的续年度净保费。反之，称为低保费保单。

2. FPT 法是评估低保费保单准备金的最低要求。

3. 对于高保费保单，使用一个特定的保险监督官准备金计算方法（简记为 Com），该方法规定保费缴纳期为修正期，以及 $\beta^{Com} - \alpha^{Com} = {}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}$。

美国保险监督官评估标准以 20 年缴费的终身寿险为划分标准。${}_{19}P_{x+1}$ 为 20 年缴费终身寿险在 FPT 法中的续年度修正净保费。

由（6－15）式，高保费保单的续年度修正净保费可以表示为

$$\beta^{Com} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{6-20}$$

这里 h 为保费缴纳期年数。

【例 6－9】 根据美国保险监督官评估标准计算例 6－6 中的保单在第三年末的准备金。

解： 因为

$$\beta^{FPT} = 0.02463 > {}_{19}P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36} - N_{55}} = 0.02317$$

所以该保单属于高保费保单，其续年度净保费由（6－20）式确定

$$\begin{aligned}\beta^{Com} &= P_{35:\overline{30}|} + \frac{{}_{19}P_{36} - A^{1}_{35:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{35:\overline{30}|}} \\ &= 0.02355 + (0.02317 - 0.00103)/(1 + 19.85884) \\ &= 0.02461\end{aligned}$$

所求准备金为

$$
\begin{aligned}
{}_3V_{35:\overline{30}|}^{Com} &= 20\ 000A_{38:\overline{27}|} - 20\ 000\beta^{Com}\ddot{a}_{38:\overline{27}|} \\
&= 20\ 000\ (0.52735 - 0.02461 \times 19.37874) \\
&= 1\ 008.78
\end{aligned}
$$

美国保险监管部门对非均衡缴费和非均衡保额的保单的评估标准值得参考。下面考虑一般情形：当被保险人在第 $j+1$ 保单年度内死亡时，该保单年度末的保险给付为 b_{j+1}；生存的被保险人在保费缴纳期内的第 $j+1$ 保单年度初（即 j 时刻）缴纳毛保费 G_j。下面具体给出 n 年定期寿险的计算公式，并指出 n 年两全保险的不同。

首先要确定高保费保单和低保费保单的划分标准。为此，首先计算均衡的续年度保额，它与原来的非均衡续保额有相同的精算现值。该等价的续年度均衡保额记为 ELRA（Equivalent Level Renewal Amount），那么应有

$$
\text{ELRA} \cdot A_{x+1:\overline{n-1}|}^{1} = \sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1}\ {}_jp_{x+1} q_{x+1+j}
$$

所以

$$
\text{ELRA} = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1}\ {}_jp_{x+1} q_{x+1+j}}{A_{x+1:\overline{n-1}|}^{1}} \tag{6-21}
$$

这里的续年度均衡保额只考虑死亡给付额。对于两全保险，相应的 ELRA 也由（6－21）式给出。

其次，计算续年度净保费与续年度毛保费的平均比，记为 r_F。平均比计算如下

$$
r_F = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1}\ {}_jp_{x+1} q_{x+1+j}}{\sum_{j=0}^{h-2} G_{j+1} v^{j}\ {}_jp_{x+1}} \tag{6-22}
$$

这里 h 为保费缴纳期。对于两全保险，在（6－22）式的分子中加上生存给付的精算现值即得相应的 r_F。

类似于均衡缴费和均衡保额的情形，这里以保额为 ELRA 的 20 年缴费终身寿险为划分标准。

如果

$$
r_F \cdot G_0 \leqslant \text{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1} \tag{6-23}
$$

则该保单属于低保费保单，可以用 FPT 法提存准备金。此时初年度的修正净保费为 $\pi_0 = vb_1q_x = b_1A_{x:\overline{1}|}^{1}$，续年度的修正净保费为 $\pi_j = r_F \cdot G_j$（$j=1, 2, \cdots, h-1$）。由（6－22）式可知，续年度的净保费恰好支付续年度的保险给付，即

$$\sum_{j=0}^{n-2} r_F G_{j+1} v^j \, {}_jp_{x+1} = \sum_{j=0}^{n-2} b_{j+2} v^{j+1} \, {}_jp_{x+1} q_{x+1+j}$$

对于 $1 \leqslant k < h$，修正准备金为

$$ {}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1} v^{j+1} \, {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} - r_F \sum_{j=0}^{h-k-1} G_{k+1} v^j \, {}_jp_{x+k} \qquad (6-24)$$

对于两全保险，上式右边第一项需加上生存给付的精算现值。

如果

$$r_F \cdot G_0 > \mathrm{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1}$$

则该保单为高保费保单。此时要求续年度与初年度的修正净保费之差不超过

$$\mathrm{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1 A^1_{x:\overline{1}|}$$

这类似于均衡缴费情形下对 $\beta - \alpha$ 的限制。

这里需要计算净保费与毛保费的修正平均比 r_C，由此确定初年度修正净保费与续年度修正净保费 $r_C G_0 - [\mathrm{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1 A^1_{x:\overline{1}|}]$ 与续年度修正净保费 $r_C G_j$（$j = 1, 2, \cdots, h-1$），其精算现值与保险给付的精算现值相等，即

$$r_C G_0 - [\mathrm{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1 A^1_{x:\overline{1}|}] + \sum_{j=1}^{h-1} r_C G_j v^j \, {}_jP_x = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} v^{j+1} \, {}_jp_x q_{x+j}$$

因此

$$r_C \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} v^{j+1} \, {}_jp_x q_{x+j} + [\mathrm{ELRA} \cdot {}_{19}P_{x+1} - b_1 A^1_{x:\overline{1}|}]}{\sum_{j=0}^{h-1} G_j v^j \, {}_jp_x} \qquad (6-25)$$

这时，在 $1 \leqslant k < h$ 时的修正准备金为

$$ {}_kV^{Mod} = \sum_{j=0}^{n-k-1} b_{k+j+1} v^{j+1} \, {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} - r_C \sum_{j=0}^{n-k-1} G_{k+j} v^j \, {}_jp_{x+k} \qquad (6-26)$$

对于两全保险，只需分别在（6－25）式的分子和（6－26）式右边第一个求和式中加上生存给付的精算现值即可。

【例 6－10】 一份在 35 岁签订的男性 30 年两全保险，前 20 年死亡给付额为 150 万元，后 10 年死亡给付及满期给付均为 10 万元；前 10 年年缴保费为 2 500 元，以后各年为 1 250 元。利用附录Ⅲ（CL1 非养老金业务男性表）中的换算函数表及利率 $i = 0.025$，根据美国保险监督官评估标准计算各年度的修正净保费。

解： 利用续年度死亡给付额计算 ELRA 如下

$$\mathrm{ELRA} = 50\ 000 \frac{3M_{36} - M_{55} - 2M_{65}}{M_{36} - M_{65}}$$

$$= 123\ 340.47$$

续年度净保费与续年度毛保费的平均比为

$$r_F = \frac{5\ 000\ (3M_{36} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65})}{1\ 250\ (2N_{36} - N_{45} - N_{65})}$$
$$= 1.4565714$$

另外

$$_{19}P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36} - N_{35}} = 0.02317$$

因为

$$r_F \cdot G_0 = 3\ 641.43 > \text{ELRA} \cdot {}_{19}P_{36} = 2\ 857.80$$

所以该保单属于高保费保单。

$$\text{ELRA} \cdot {}_{19}P_{36} - 150\ 000A^{1}_{35:\overline{1}|} = 2\ 703.30$$

而净保费与毛保费的修正平均比为

$$r_C = \frac{5\ 000\ (3M_{35} - M_{55} - 2M_{65} + 2D_{65})\ + 2\ 703.30D_{65}}{1\ 250\ (2N_{36} - N_{45} - N_{65})}$$
$$= 1.4895338$$

初年度的修正净保费为

$$r_C \cdot 2\ 500 - [\text{ELRA} \cdot {}_{19}P_{36} - 150\ 000A^{1}_{35:\overline{1}|}] = 1\ 020.53\ (元)$$

第 2 年至第 10 年的净保费为

$$r_C \cdot 2\ 500 = 3\ 723.83\ (元)$$

第 11 年至第 30 年的净保费为

$$r_C \cdot 1\ 250 = 1\ 861.92\ (元)$$

实际上，采用保单分类法的修正制还有其他形式，这几种修正制实质上都是以某种限期缴费的终身寿险保单作为划分标准，分别采用不同的修正方法。

习　题

1. 在 40 岁签发的保额 1 000 元的离散式两全保险保单，保险期限至 65 岁。根据以下假设，写出年缴毛保费计算式。

（1）销售佣金是初年度保费的 40%；

（2）续年度佣金为第 2 保单年度至第 10 保单年度各年保费的 5%；

（3）保费税为各年保费的 2%；

（4）保单维持费用初年度为 1 000 元保额 12.5 元，续年度为 1 000 元保额 4.00 元；

（5）保险金在死亡后立即给付，无理赔费用；

（6）使用 15 年选择与终极生命表。

2. n 年趸缴保费的两全保险的毛保费由以下假设确定：

（1）税收额为保费的 2.5%；

(2) 佣金为保费的4%;

(3) 其他费用初年度为1 000元保额5元,各续年度为1 000元保额2.50元。

若保险金在死亡后立即给付,费用发生在保单年度初,对被保险人(x)签发的1 000元保额的该种保单,给出毛保费计算公式。

3. 关于(x)的某趸缴保费终身寿险,其死亡受益在死亡年末给付。已知

(1) $A_x=0.25$ 元

(2) $d=0.05$ 元

(3) 佣金额为毛保费的18%

(4) 税收额为毛保费的2%

(5) 每份保单的费用,第一年内40元,第二年起每年5元

试用保单费附加法计算保单费。

4. 对(30)签发的保额2万元的半连续式终身寿险,各保单年初支付的费用如下表:

	初年度	续年度
保费百分数(%)	50	5
每1 000元保额(元)	2.00	0.10
每份保单(元)	20.00	5.00

根据附录中换算函数表计算每年应付的保单费。

5. 个人保单上签发的保额可看作一个随机变量。对某种保险计划,保额分布的概率密度函数为

$$f(b)=kb^{-3},(b>10)$$

这里 b 以千元为单位。设 $a=25$,$f=0.15$,$c=12$,保费按保额分为三级:10 000 ~ 19 999元,20 000 ~ 49 999元以及50 000元以上。求分级费率。

6. 一类离散式终身寿险保单,每年初费用的分配如下:

费用类型	费用
按保费百分比支付的	25%
按每1 000元保额支付的	2.00(元)
保单费用	30.00(元)

设这类保单的保额均值为2 000元,求保额为2 500元的保单按保额均值计算的费率和按保单费附加法计算的费率所得到的年缴毛保费之差。

7. 对于连续式终身寿险模型,包含费用的损失变量可以表示为 $L_e=$

$L+X$，其中

$$L=v^T-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}$$

$$X=c_0+(g-e)\bar{a}_{\overline{T}|}$$

在以上表达式中，L 为相应于保险给付部分的损失变量，X 为相应于费用损失部分的损失变量，符号 c_0 表示初始费用，g 为每年按连续方式缴纳的维持费用，而 e 为每年的附加保费。应用等价原理 $E[L]=E[X]=0$，证明：

（1） $X=c_0L$

（2） $Var[L_e]=(1+c_0)^2Var\ [L]$

8. 对于保额 1 000 元的 3 年期全离散式两全保险，已知：

k	$_kp_x$	q_{x+k}	G	e_k	$1\ 000_kV$	$u\ (k)$
0	1.00	—	350	—	0	—
1	0.90	0.10	350	5	250	100
2	0.81	—	350	5	600	—

设年利率 $i=0.15$，100 份这样的保单在同一天签发，求这些保单在第 2 保单年度的期望净收入。

9. 对 30 岁男性签发的 5 万元保额 35 年缴费 50 年期全离散式两全保险，利用附表（2000—2003CL1 非养老金业务男性表）的换算表数值，在年利率 $i=4\%$ 的情况下，计算第 8 个保单年末的修正准备金。假设：

（1） 修正期为 20 年；

（2） 续年度修正净保费为 537.81 元。

10. 若保费修正期等于保费缴纳费，试证明：

$$_kV^{Mod}_{x:\overline{n}|}=1-(\beta+d)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

这里 $d=1/(1+i)$。

11. 假设全连续式终身寿险的一种修正准备金方法由下式定义

$$\bar{a}(t)=\frac{t}{m}\bar{\beta}(0\leqslant t<m)$$

这里 $\bar{\beta}$ 是当 $t\geqslant m$ 时的均衡净保费。

（1） 写出 $\bar{\beta}$ 的计算式；

（2） 写出计算 $_t\bar{V}\ (\bar{A}_x)^{Mod}$ 未来法公式，这里 $t<m$。

12. 对全离散式终身寿险，计算其修正准备金方法中的 α_x^{Mod} 和 β_x^{Mod}，这里 $_1V_x^{Mod}=k$，修正期等于保费缴纳期。

13. 在一种关于全离散式终身寿险的修正准备金方法中，均衡年缴净保费 P_x 在前 n 年换成年缴净保费 α_x^{Mod}，之后换成 β_x^{Mod}（仅用于计算准备金）。证明：

$$\frac{\beta_x^{Mod}-P_x}{P_x-\alpha_x^{Mod}}=\frac{\ddot{a}_x}{{}_{n|}\ddot{a}_x}-1$$

14. 证明：

$${}_kV-{}_kV^{Mod}=\left(\frac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{j-k}|}$$

这里j是修正期年数。这个差额可解释为第1年度费用超额补贴尚未摊回的部分。

15. 对（x）签发的单位保额10年两全保险，已知：

（1）${}_5V^{FPT}_{x:\overline{10}|}=0.25$；（2）$\beta^{FPT}=0.05$；（3）$d=0.06$，$q_{x+4}=0.01$。求$1\ 000{}_3V_{x+1:\overline{9}|}$。

16. 已知$a_{80:\overline{19}|}=6.158$，$a_{70:\overline{30}|}=9.339$，$a_{71:\overline{28}|}=9.020$，计算$1\ 000{}_{10}V^{FPT}_{70:\overline{30}|}$。

17. 一个两年定期修正法的定义中涉及三个净保费：初年度净保费：$A^1_{x:\overline{1}|}$；第二年度净保费：$A^1_{x+1:\overline{1}|}$；以后各年度净保费：P_{x+2}。

在这种方法中，证明关于（x）的终身寿险保单的准备金为

$${}_1V^{Mod}={}_2V^{Mod}=0$$

$${}_kV_x^{Mod}={}_kV_x-(P_{x+2}-P_x)\ddot{a}_{x+k},(k=3,4,5,\cdots)$$

18. 某种修正准备金方法规定：$\alpha\geqslant A^1_{x:\overline{1}|}$，$\beta-\alpha\leqslant0.05$，修正期为整个保费缴纳期。这一规定使得对某些保单和某些年龄可以使用FPT法。已知$d=0.03$，$\ddot{a}_x=17$，$\ddot{a}_{x:\overline{12}|}=9$，$A^1_{x:\overline{12}|}=2/3$及$A^1_{x:\overline{1}|}=0.01$。

（1）对在x岁时签发的终身寿险保单，计算β；

（2）在这样方法下计算${}_{12}V_x^{Mod}$；

（3）假设$\alpha=A^1_{x:\overline{1}|}=0.01$，对在$x$岁签发的12年两全保险计算$\beta$的值。可以验证$\beta-\alpha>0.05$，因此在这个方法下对该保险不能取$\alpha=A^1_{x:\overline{1}|}=0.01$；

（4）根据（3）中的结果，对在x岁签发的12年两全保险求最大的β和最小的α值；

（5）计算${}_1V^{Mod}_{x:\overline{12}|}$。

19. 对（x）签发的15年全离散式两全保险，试按美国保险监督官标准写出其初年度和续年度修正净保费计算公式。

20. 设保单起初20年受益金为15万元，以后为10万元，期满受益全额亦为10万元。毛保费前10年为2 500，以后为1 250，并设$i=0.04$。应用附表Ⅳ换算表，根据保险监督官修正制，计算投保年龄35岁的一份特殊30年期两全保险的初年度修正净保费。

21. 对（x）的全离散式寿险，如果$\beta_x^{Mod}>{}_{19}P_{x+1}$，那么美国保险监督官标准下的第$k$年期末准备金可以写成

$${}_kV^{Com}=\frac{A^1_{x:\overline{1}|}}{{}_kE_x}+{}_{19}P_{x+1}\ddot{s}_{x+1:\overline{k-1}|}+T\ddot{s}_{x:\overline{k}|}-\frac{A^1_{x:\overline{k}|}}{{}_kE_x}$$

求T的表达式。

第七章　多元生命函数

学习目标

- □ 了解将未来生存时间这一随机变量由单个生命推广到多个生命的精算理论
- □ 掌握独立性假设下个体的联合生存状态和最后生存状态的相关精算变量之间的关系，熟练掌握连续型和离散型两种情况下的计算方法
- □ 了解非独立情形下的分布规律，熟悉两个寿险生命参数模型：Frank Copula 模型和 Common Shock 模型，会进行非独立假设下的简单计算
- □ 了解死亡率的各种合理假设，会在某些合理的假设下计算趸缴净保费和年金精算现值
- □ 熟悉考虑死亡顺序的趸缴净保费的计算方法

§7.1　基本概念

我们把若干个生命的组合称为一个状态，并根据其中各生命的生存与死亡情况定义状态的存续与终止。例如，我们可以把某 l 个人都活着时作为一个状态存续。也可规定状态的存续为其中至少有一人活着，即所有人死亡时状态才终止。对存续和终止的不同定义，会得到不同的状态，该生命组合的生存即为状态的存续，死亡即为状态的终止。

以下讨论两个生命的情形。两个生命组成的状态有两种，相应的定义如下：

1. 联合生存状态：一个 x 岁的生命 (x) 和一个 y 岁的生命 (y) 组成的状态，当这两个生命都生存时状态存续。该状态记为 (xy)；

2. 最后生存状态：一个 x 岁的生命 (x) 和一个 y 岁的生命 (y) 组成的状态，这两个生命中至少有一个生存时状态存续。该状态记为 $(\overline{xy})$。

这两种状态分别对应两个人的联合生命保险和最后生存者保险，后面将作详细讨论。注意到 (x) 和 (y) 可以来自不同的生存群体。

虽然联合生存状态和最后生存状态可以推广到包含 l 个人的一般情形，但有关的计算复杂，在寿险实务中也少有应用，本章不作讨论。

§7.2 连续型未来存续时间的概率分布

一个状态从开始到终止，所经过的时间称为其未来存续时间。在前面各章中我们已看到，人寿保险和生存年金的各种净保费及责任准备金都是单个生命未来生存时间变量 T 的函数的期望。包含多个生命的情形也是如此。状态未来存续时间是最基本的随机变量。为此，我们首先考虑随机变量的概率分布。

下面有关状态（xy）和（$\overline{xy}$）的概念和符号，均与前面各章中关于状态（x）的概念和符号相对应。

7.2.1 联合生存状态未来存续时间的概率分布

(xy)的未来存续时间记为 $T=T(xy)$。显然，$T=\min[T(x),T(y)]$，其中 $T(x)$和 $T(y)$分别为(x)、(y)的未来生存时间。

考虑 T 的分布。对于 $t>0$，T 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= Pr\ [T\leqslant t] \\
&= 1-Pr\ [T>t] \\
&= 1-Pr\ [T(x)>t, T(y)>t]
\end{aligned} \tag{7-1}
$$

若 $T(x)$和 $T(y)$相互独立，则

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= 1-Pr[T(x)>t]\cdot Pr[T(y)>t] \\
&= 1-{}_tp_x\cdot {}_tp_y
\end{aligned} \tag{7-2}
$$

此时有

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{xy} &= Pr[T>t] \\
&= {}_tp_x\cdot {}_tp_y
\end{aligned} \tag{7-3}
$$

T 的密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1-{}_tp_x\cdot {}_tp_y) \\
&= -{}_tp_x(-{}_tp_y\cdot \mu_{y+t})-{}_tp_y(-{}_tp_x\cdot \mu_{x+t}) \\
&= {}_tp_x\cdot {}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})
\end{aligned} \tag{7-4}
$$

类似于单个生命的情形，也可以从状态（xy）的终止力来确定 T 的分布。类似于单个生命死亡力 μ_x 的定义，状态（xy）在时刻 t 的终止力定义为

$$
\mu_{xy}(t)=\frac{f_{T(xy)}(t)}{1-F_{T(xy)}(t)} \tag{7-5}
$$

当 $T(x)$与 $T(y)$相互独立时，

$$
\mu_{xy}(t)=\frac{{}_tp_x\ {}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})}{1-(1-{}_tp_x\ {}_tp_y)}
$$

$$= \mu_{x+t} + \mu_{y+t} \tag{7-6}$$

对于状态（xy），完全平均余命定义为

$$\mathring{e}_{xy} = E[T(xy)] = \int_0^{\infty} t\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)\,dt$$

类似于第一章中的$\mathring{e}_x$，$\mathring{e}_{xy}$有另一表达式

$$\mathring{e}_{xy} = \int_0^{\infty} {}_tp_{xy}\,dt \tag{7-7}$$

对于 T（xy）的方差，亦类似地有

$$Var[T(xy)] = 2\int_0^{\infty} t\ {}_tp_{xy}\,dt - (\mathring{e}_{xy})^2$$

【例 7－1】 已知（x）的生存函数为

$$s(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{110}, & (0 \leqslant x < 110) \\ 0, & (x \geqslant 110) \end{cases}$$

假设（45）与（50）的未来生存时间相互独立，计算状态（45:50）的完全平均余命。

解： 按定义直接计算得，

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{45:50} &= \int_0^{\infty} {}_tp_{45:50}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} {}_tp_{45}\,{}_tp_{50}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s(45+t)}{s(45)} \cdot \frac{s(50+t)}{s(50)}\,dt \\ &= \int_0^{60} \frac{(65-t)(60-t)}{3\ 900}\,dt \\ &\approx 20.77 \end{aligned}$$

【例 7－2】 在上例所给条件下，求状态（45:50）在此后 5～10 年之间终止的概率。

解： 按定义直接计算得，

$$\begin{aligned} Pr(5 < T \leqslant 10) &= Pr(T \geqslant 5) - Pr(T > 10) \\ &= {}_5p_{45:50} - {}_{10}p_{45:50} \\ &= {}_5p_{45} \cdot {}_5p_{50} - {}_{10}p_{45} \cdot {}_{10}p_{50} \\ &= \frac{5}{39} \end{aligned}$$

7.2.2 最后生存状态未来存续时间的概率分布

（$\overline{xy}$）的未来存续时间记为 $T = T$（$\overline{xy}$），显然 $T = max\,[T(x), T(y)]$。对于 $t > 0$，T 的分布函数为

$$F_T(t) = Pr\ (T \leqslant t)$$

$$= Pr\ (T(x) \leqslant t, T(y) \leqslant t) \tag{7-8}$$

如 $T\ (x)$ 与 $T\ (y)$ 相互独立，那么

$$\begin{aligned} F_T(t) &= Pr[T(x) \leqslant t]Pr[T(y) \leqslant t] \\ &= (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \\ &= 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y \end{aligned} \tag{7-9}$$

此时有

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \tag{7-10}$$

T 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y) \\ &= {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \end{aligned} \tag{7-11}$$

同样，定义状态 $(\overline{xy})$ 的终止力为

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \\ &= \frac{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} - {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+t} + \mu_{y+t})}{{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y} \end{aligned}$$

对于状态 $(\overline{xy})$，完全平均余命定义为

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = E[T(\overline{xy})] = \int_0^{\infty} t\ {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)\,dt$$

类似于第一章中的 $\mathring{e}_x$，$\mathring{e}_{\overline{xy}}$ 有另一表达式

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} {}_tp_{\overline{xy}}\,dt \tag{7-12}$$

对于 $T(\overline{xy})$ 的方差，

$$Var[T(\overline{xy})] = 2\int_0^{\infty} t\ {}_tp_{\overline{xy}}\,dt - (\mathring{e}_{\overline{xy}})^2$$

【例 7－3】 对例 7－1 所给条件，求状态 $(\overline{45:50})$ 的完全平均余命。

解： 按定义直接计算得，

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{\overline{45:50}} &= \int_0^{\infty} {}_tp_{\overline{45:50}}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} ({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s(45+t)}{s(45)}dt + \int_0^{\infty} \frac{s(50+t)}{s(50)}dt - \mathring{e}_{45:50} \\ &= \frac{65}{2} + 30 - 20.77 \\ &= 41.73 \end{aligned}$$

【例 7－4】 对例 7－1 所给条件，求状态 $(\overline{45:50})$ 在此后 5 年～10 年之间终止的概率。

解： 按定义直接计算得，

$Pr\ [5 < T(\overline{45:50}) \leqslant 10]$

$= Pr\ [T(\overline{45:50}) > 5] - Pr\ [T(\overline{45:50}) > 10]$

$= {}_5p_{\overline{45:50}} - {}_{10}p_{\overline{45:50}}$

$= {}_5p_{45} + {}_5p_{50} - {}_5p_{45:50} - ({}_{10}p_{45} + {}_{10}p_{50} - {}_{10}p_{45:50})$

$= \dfrac{s(50)}{s(45)} + \dfrac{s(55)}{s(50)} - \dfrac{s(50)s(55)}{s(45)s(50)} - \left[\dfrac{s(55)}{s(45)} + \dfrac{s(60)}{s(50)} - \dfrac{s(55)s(60)}{s(45)s(50)}\right]$

$= \dfrac{1}{52}$

7.2.3 两种状态间的关系

最后生存状态与联合生存状态的未来存续时间有一定关系。对分布函数，注意到对事件 A 和 B，以下关系成立

$$Pr\ (A \cup B) = Pr\ (A) + Pr\ (B) - Pr\ (A \cap B)$$

由此

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) &= Pr\ [T(xy) \leqslant t] + Pr\ [T(\overline{xy}) \leqslant t] \\ &= Pr\ [T(x) \leqslant t \text{ 或 } T(y) \leqslant t] + Pr\ [T(x) \leqslant t \text{ 且 } T(y) \leqslant t] \\ &= Pr\ [T(x) \leqslant t] + Pr\ [T(y) \leqslant t] \\ &= F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) \end{aligned} \tag{7-13}$$

从而对于密度函数，以下关系式成立

$$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})} = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) \tag{7-14}$$

由（7-13）式，对一般的 $T(x)$ 和 $T(y)$

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \tag{7-15}$$

由（7-14）式，可得

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)} \\ &= \frac{f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - f_{T(xy)}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \end{aligned} \tag{7-16}$$

以上这些关系可以简化计算。例如，由（7-15）式，可得

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy} \tag{7-17}$$

另外两个有用的关系如下。注意到当 $T(\overline{xy}) = T(x)$ 时，$T(xy) = T(y)$；当 $T(\overline{xy}) = T(y)$ 时，$T(xy) = T(x)$。所以

$$T(\overline{xy}) + T(xy) = T(x) + T(y) \tag{7-18}$$

$$T(\overline{xy}) \cdot T(xy) = T(x) \cdot T(y) \tag{7-19}$$

由（7-19）式，计算 $T\ (xy)$ 与 $T\ (\overline{xy})$ 的协方差如下，

$$Cov[T(xy),T(\overline{xy})]=E[T(xy)T(\overline{xy})]-E[T(xy)]E[T(\overline{xy})]$$
$$=E[T(x)T(y)]-E[T(xy)]E[T(\overline{xy})]$$

进一步，如 $T(x),T(y)$相互独立，那么

$$Cov[T(xy),T(\overline{xy})]=\mathring{e}_x\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy}\mathring{e}_{\overline{xy}} \quad (7-20)$$

把（7－17）式代入（7－20）式，即得

$$\mathrm{Cov}[T(xy),T(\overline{xy})]=(\mathring{e}_x-\mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y-\mathring{e}_{\overline{xy}}) \quad (7-21)$$

由（7－20）式可知，在独立性假设下，$T(xy)$与$T(\overline{xy})$总是正相关的。

§7.3 离散型未来存续时间的概率分布

7.3.1 联合生存状态的情形

我们考虑未来存续事件的整年数 $K(xy)=[T(xy)]$。对于 $k=0$，1，2，…，

$$\begin{aligned}Pr(K=k)&=Pr(k\leqslant T<k+1)\\&=Pr(k<T\leqslant k+1)\\&={}_{k|}q_{xy}\\&={}_kp_{xy}\cdot q_{x+k:y+k}\end{aligned} \quad (7-22)$$

当 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立时，

$${}_kp_{xy}={}_kp_x\cdot{}_kp_y$$

另外由（7－13）式，可得

$$q_{x+k:y+k}=q_{x+k}+q_{y+k}-q_{x+k}q_{y+k} \quad (7-23)$$

因此 $K(xy)$的分布可由（x）、（y）的未来存续整年数的分布表示如下：

$$\begin{aligned}Pr(K=k)&={}_kp_x\cdot{}_kp_y(q_{x+k}+q_{y+k}-q_{x+k}q_{y+k})\\&={}_kp_y\cdot{}_{k|}q_x+{}_kp_x\cdot{}_{k|}q_y-{}_{k|}q_x\cdot{}_{k|}q_y(k=0,1,2\cdots)\end{aligned} \quad (7-24)$$

对于状态（xy），简约平均余命定义为

$$e_{xy}=E[K(xy)]=\sum_{k=0}^{\infty}k\,{}_{k|}q_{xy}$$

类似于 e_x 的计算，有

$$e_{xy}=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_{xy} \quad (7-25)$$

7.3.2 最后生存状态的情形

考虑（$\overline{xy}$）的未来存续整年数 $K(\overline{xy})=[T(\overline{xy})]$的分布。对于 $k=0$，1，2，…，注意以下等价关系

$$[K(\overline{xy})=k \text{ 或 } K(xy)=k]=[K(x)=k \text{ 或 } K(y)=k]$$

$$[K(\overline{xy})=k \text{ 且 } K(xy)=k]=[K(x)=k \text{ 且 } K(y)=k]$$

由第一个关系式得到

$$Pr[K(\overline{xy})=k \text{ 或 } K(xy)=k]=Pr[K(x)=k \text{ 或 } K(y)=k]$$

左边概率可写为

$$Pr[K(\overline{xy})=k]+Pr[K(xy)=k]-Pr[K(\overline{xy})=k \text{ 且 } K(xy)=k]$$

右边概率可写为

$$Pr[K(x)=k]+Pr[K(y)=k]-Pr[K(x)=k \text{ 且 } K(y)=k]$$

由第二个关系式，上述两个式子的第三项相等，最后得到

$$\begin{aligned}Pr[K(\overline{xy})=k]&=Pr[K(x)=k]+Pr[K(y)=k]-Pr[K(xy)=k]\\&={}_kp_x\cdot q_{x+k}+{}_kp_y\cdot q_{y+k}-{}_kp_{xy}\cdot q_{x+k:y+k}\end{aligned} \tag{7-26}$$

进一步，当 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立时，就有

$$\begin{aligned}Pr[K(\overline{xy}=k)]&={}_kp_x\cdot q_{x+k}+{}_kp_y\cdot q_{y+k}-{}_kp_x\,{}_kp_y(q_{x+k}+q_{y+k}-q_{x+k}q_{y+k})\\&=(1-{}_kp_y){}_kp_x\cdot q_{x+k}+(1-{}_kp_x){}_kp_y\cdot q_{y+k}+{}_kp_x\cdot{}_kp_y\cdot q_{x+k}q_{y+k}\\&=(1-{}_kp_y)_{k|}q_x+(1-{}_kp_x)_{k|}q_y+{}_{k|}q_x\cdot{}_{k|}q_y\\&={}_kq_y\,{}_{k|}q_x+{}_kq_x\,{}_{k|}q_y+{}_{k|}q_x\cdot{}_{k|}q_y\end{aligned} \tag{7-27}$$

实际上，对（7－27）式有一个直观解释。右边第一项表示（x）在第 $k+1$ 年内死亡，而（y）已经在前 k 年内死亡。类似地可解释第二项。第三项表示（x）和（y）都在第 $k+1$ 年内死亡。

对于状态（$\overline{xy}$），简约平均余命定义为

$$e_{\overline{xy}}=E[K(\overline{xy})]=\sum_{k=0}^{\infty}k\,{}_{k|}q_{\overline{xy}} \tag{7-28}$$

类似于（7－25）式，并结合（7－15）式，可得

$$e_{\overline{xy}}=e_x+e_y-e_{xy} \tag{7-29}$$

与连续型的情形相似，当 $K(\overline{xy})=K(x)$ 时，$K(xy)=K(y)$；当 $K(\overline{xy})=K(y)$ 时，$K(xy)=K(x)$。所以

$$K(\overline{xy})+K(xy)=K(x)+K(y) \tag{7-30}$$

$$K(\overline{xy})\cdot K(xy)=K(x)\cdot K(y) \tag{7-31}$$

以上关系式在计算趸缴净保费、年金精算现值以及协方差时会带来方便。

§7.4　非独立的寿命模型

在购买联合寿险或联合年金的两人中，一人的生死可能对另一人的寿命有影响，独立性的假设不再成立。例如夫妻共同投保，丈夫的死亡可能

使妻子的寿命缩短。

7.4.1 非独立个体的联合生存状态与最后生存状态

在前三节中，我们讨论了独立个体在联合生存状态与最后生存状态下的一些关系式，例如：

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{xy} &= {}_tp_x \cdot {}_tp_y \\
{}_tq_{\overline{xy}} &= {}_tq_x \cdot {}_tq_y \\
\mu_{xy}(t) &= \mu_{x+t} + \mu_{y+t}
\end{aligned}
$$

在非独立个体假设下，这些关系式将不再成立。

通常联合分布函数表达如下：

$$F_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = Pr\,[\,T(x) \leqslant t_1 \text{ 且 } T(y) \leqslant t_2\,] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds$$

联合生存函数表示如下：

$$S_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = Pr\,[\,T(x) > t_1 \text{ 且 } T(y) > t_2\,] = \int_{t_2}^{\infty}\int_{t_1}^{\infty} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds$$

以上两式可以在图 7－1 中表示出来：

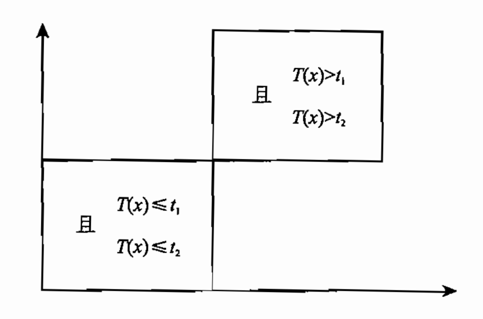


图 7－1　联合分布函数与联合生存函数

由（7－13）式得到

$${}_tq_{xy} + {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x + {}_tq_y$$

由上式可得

$${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y$$

【例 7－5】　假设 $T(x)$ 和 $T(y)$ 的联合概率密度函数为

$$f_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \frac{t_1+t_2}{1\,000}, 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 10$$

计算边际概率密度函数、边际分布函数、联合生存状态分布函数、最后生存状态分布函数。

解： 对 $t_1, t_2 \in [0,10]$

$$F_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \frac{s+t}{1\,000}dtds$$

$$= \frac{t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2}{2\ 000}$$

$$\Rightarrow {}_t q_{\overline{xy}} = F_{T(x),T(y)}(t,t) = \frac{t^3}{1\ 000}$$

$$\Rightarrow {}_t q_y = F_{T(x),T(y)}(t,10) = \frac{10t^2 + 100t}{2\ 000} = \frac{t^2 + 10t}{200}$$

$$\Rightarrow f_{T(x)}(t) = \frac{d({}_t q_x)}{dt} = \frac{t+5}{100}$$

由密度函数$f_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \dfrac{t_1 + t_2}{1\ 000}$的对称性，就有${}_t q_x = {}_t q_y$。其他表达式类似。

为计算${}_t q_{\overline{xy}}$，注意到

$$S_{T(x),T(y)}(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{10}\int_{t_2}^{10} f_{T(x),T(y)}(s,t)\,dtds$$

$$= \frac{1\ 000 - 50(t_1 + t_2) - 5(t_1^2 + t_2^2) + \dfrac{t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2}{2}}{1\ 000}$$

$$\Rightarrow {}_t p_{xy} = S_{T(x),T(y)}(t,t) = \frac{(10-t)^2(10+t)}{1\ 000}$$

$$\Rightarrow {}_t p_x = S_{T(x),T(y)}(t,0) = \frac{200 - 10t - t^2}{200}$$

另一方面，由前面得到的${}_t q_x$可直接得到${}_t p_x$。由${}_t p_{xy} + {}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y$可求得${}_t p_{xy}$。

$T(xy)$和$T(\overline{xy})$的密度函数分别如下：

$$f_{T(xy)}(t) = -\frac{d({}_t p_{xy})}{dt} = \frac{100 - 20t + 3t^2}{1\ 000}, 0 \leqslant t \leqslant 10$$

$$f_{T(\overline{xy})}(t) = \frac{d({}_t q_{\overline{xy}})}{dt} = \frac{3t^2}{1\ 000}, 0 \leqslant t \leqslant 10$$

7.4.2 非独立个体的参数模型

这里我们介绍两个非独立个体的参数模型：Frank Copula 模型和 Common Shock 模型。

Frank Copula 模型：给定个体边际分布函数($F_{T(x)}(S) = {}_s q_x$；$F_{T(y)}(t) = {}_t q_y$)以及一个不为零的参数α构造二元分布函数，使得：

(1) 边际分布函数是给定的个体边际分布函数；

(2) 变量$T(x)$和$T(y)$一般不独立。

Frank Copula 模型构造的二元分布函数如下：

$$F_{T(x),T(y)}(s,t) = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{(e^{\alpha \cdot {}_s q_x} - 1)(e^{\alpha \cdot {}_t q_y} - 1)}{e^{\alpha} - 1}\right], (0 \leqslant s \leqslant \omega - x, 0 \leqslant t \leqslant \omega - y)$$

可以验证：

$$F_{T(x)}(s)=F_{T(x),T(y)}(s,\omega-y)=\frac{1}{\alpha}\ln\left[1+\frac{(e^{\alpha\cdot{}_sq_x}-1)(e^{\alpha\cdot 1}-1)}{e^{\alpha}-1}\right]={}_sq_x$$

另外按照二元联合分布的定义，可以验证 $F_{T(x),T(y)}(s,t)$是分布函数。

$T(x)$和 $T(y)$一般是不独立的。但是

$$\lim_{\alpha\to 0}f_{T(x),T(y)}(s,t)=f_{T(x)}(s)\cdot f_{T(y)}(t)$$

即当 $\alpha\to 0$ 时，$T(x)$与 $T(y)$渐近独立。

【例 7－6】 设$(x)=(50)$，$(y)=(60)$服从 de Moivre 假设，$\omega=100$。假设在 Frank Copula 模型中，$\alpha=0.5$，计算：

（1） ${}_{10}q_{50}$， ${}_{10}q_{60}$

（2） ${}_{10}q_{\overline{50:60}}$

（3） ${}_{10}q_{50:60}$

解：（1） 在 de Moivre 假设下，${}_tq_x=\dfrac{t}{\omega-x}$，所以

$${}_{10}q_{50}=\frac{10}{50},\quad {}_{10}q_{60}=\frac{10}{40}$$

（2） 根据 Frank Copula 公式

$${}_{10}q_{\overline{50:60}}=F_{T(x),T(y)}(10,10)=\frac{1}{0.5}\ln\left[1+\frac{(e^{0.5\times 0.2}-1)(e^{0.5\times 0.25}-1)}{e^{0.5}-1}\right]=0.0427$$

（3） 由 （7－13） 式，

$$\begin{aligned}{}_{10}q_{50:60}&={}_{10}q_{50}+{}_{10}q_{60}-{}_{10}q_{\overline{50:60}}\\&=0.2+0.25-0.0427\\&=0.4073\end{aligned}$$

Common Shock 模型：假设 $T^*(x)$，$T^*(y)$，Z 相互独立，Z 的密度函数为$f_Z(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，$T(x)$，$T(y)$定义如下：

$$T(x)=\min[T^*(x),Z],\ T(y)=\min[T^*(y),Z]$$

因此 $T(x)$与 $T(y)$不独立。该模型表明“正常”的生存时间可能会被一些意外事件同时缩短。由独立性假设，联合生存函数计算为：

$$\begin{aligned}S_{T(x),T(y)}(s,t)&=Pr\ [T(x)>s\text{ 且 }T(y)>t]\\&=Pr\ \{\min[T^*(x),Z]>s\text{ 且 }\min[T^*(y),Z]>t\}\\&=S_{T^*(x)}(s)\cdot S_{T^*(y)}(t)\cdot e^{-\lambda\max(s,t)}\end{aligned}$$

因此，

$${}_tp_{xy}=S_{T^*(x)}(t)\cdot S_{T^*(y)}(t)\cdot e^{-\lambda t}$$

边际分布如下：

$${}_tp_x=S_{T(x)}(t)=S_{T(x),T(y)}(t,0)=S_{T^*(x)}(t)\cdot e^{-\lambda t}$$

$${}_tp_y=S_{T(y)}(t)=S_{T(x),T(y)}(0,t)=S_{T^*(y)}(t)\cdot e^{-\lambda t}$$

另外，

$$\mu_{xy}(t) = -\ln({}_tp_{xy})' = \mu_x^*(t) + \mu_y^*(t) + \lambda$$

$$\mu_x(t) = -\ln({}_tp_x)' = \mu_x^*(t) + \lambda$$

$$\mu_y(t) = -\ln({}_tp_y)' = \mu_y^*(t) + \lambda$$

【例 7-7】 假设 $T^*(x)$, $T^*(y)$ 分别服从参数为 λ_1，λ_2 的指数分布，根据 Common Shock 模型，计算：

(1) $T(x)$, $T(y)$ 和 $T(xy)$ 的分布函数；

(2) $\bar{A}_x$，$\bar{A}_y$，$\bar{A}_{xy}$，$\bar{A}_{\overline{xy}}$；

(3) $\mathring{e}_x$，$\mathring{e}_y$，$\mathring{e}_{xy}$，$\mathring{e}_{\overline{xy}}$；

(4) (xy) 状态由于意外失效的概率，即 $\{Z < \min[T^*(x), T^*(y)]\}$ 的概率。

解：

(1) ${}_tp_x = S_{T^*(x)}(t) \cdot e^{-\lambda t} = e^{-(\lambda_1+\lambda)t}$

$F_{T(x)}(t) = {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda)t}$

即 $T(x)$ 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda$ 的指数分布。同理，$T(y)$ 和 $T(xy)$ 分别服从参数为 $\lambda_2 + \lambda$，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda$ 的指数分布。

(2) 在单生命常数死力的情形下，$\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu+\delta}$。对多个生命，类似地有：

$$\bar{A}_x = \frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1 + \lambda + \delta}, \quad \bar{A}_y = \frac{\lambda_2 + \lambda}{\lambda_2 + \lambda + \delta}$$

$$\bar{A}_{xy} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + \delta}$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}$$

(3) 由 (1) 即得：

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda}, \quad \mathring{e}_y = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda}$$

$$\mathring{e}_{xy} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda}$$

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}$$

(4) 由定义得

$$\begin{aligned} Pr\{Z < \min[T^*(x), T^*(y)]\} &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \cdot S_{T^*(x)}(t) \cdot S_{T^*(y)}(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t}\,dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda} \end{aligned}$$

§7.5　趸缴净保费与年金精算现值

本节把趸缴净保费与年金精算现值从单个生命状态 (x) 推广到一般状

态（u）。一般地，在关于状态（x）的公式中，以（u）取代（x），便得到关于状态（u）的相应公式。在独立性假设下，这些公式可以进一步通过状态（u）中各单个生命未来生存时间的分布来表示。

7.5.1 在状态终止年度末给付的寿险与离散型生存年金

考虑在状态终止的保单年末给付 1 个单位的终身寿险。以 K 表示状态（u）的未来存续整年数，则给付时间为 $K+1$，给付额 1 个单位在签单时的现值为 $Z=v^{k+1}$，从而趸缴净保费为

$$A_u=E[Z]=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}Pr\ [K=k] \tag{7-32}$$

Z 的方差为

$$Var[Z]={}^2A_u-(A_u)^2 \tag{7-33}$$

对 n 年期两全保险，趸缴净保费为

$$A_{u:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}Pr(K=k)+v^n\ {}_np_u \tag{7-34}$$

在状态（u）存续期间，保单年初给付 1 个单位的终身生存年金现值为 $Y=\ddot{a}_{k+1}$，精算现值为

$$\ddot{a}_u=E[Y]=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}{}_{k|}q_u$$

$$\ddot{a}_u=\sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_u \tag{7-35}$$

对 n 年生存年金，则其精算现值为

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}{}_{k|}q_u+\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot np_u$$

$$\ddot{a}_{u:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}v^k\cdot{}_kp_u \tag{7-36}$$

Y 的方差为

$$Var[Y]=\frac{1}{d^2}[{}^2A_u-A_u^2] \tag{7-37}$$

趸缴净保费与年金精算现值之间有如下关系式

$$A_u+d_u\ddot{a}_u=1 \tag{7-38}$$

$$A_{u:\overline{n}|}+d\ddot{a}_{u:\overline{n}|}=1 \tag{7-39}$$

由上面的一般公式，以及 $K(xy)$ 和 $K(\overline{xy})$ 的分布，就可得到对应于状态（xy）、（$\overline{xy}$）的趸缴净保费与年金精算现值公式。例如，由（7－32）式和（7－22）式，可得

$$A_{xy}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_{xy}q_{x+k:y+k}$$

由（7－36）式和（7－15），可得

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ ({}_kp_x + {}_kp_y - {}_kp_{xy})$$

对联合生存状态与最后生存状态，相应的趸缴净保费与年金精算现值满足一定关系。由于

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|}$$

取期望即得

$$A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$$

上述结论的直观意义也很明显：买一份(x)与(y)最后一人死亡时给付的保险，同时买一份(x)与(y)最先一人死亡时给付的保险，那么(x)与(y)死亡后都能得到给付。这无异于(x)与(y)各买一份保险。同样可以解释年金关系式。

【例7-8】 一份年金在(x)与(y)都生存时每年年初给付1，而当(x)与(y)仅有一人生存时每年年初给付2/3。假设$K(x)$与$K(y)$相互独立，求以下表达式：(1) 年金的现值变量；(2) 年金的精算现值。

解：(1) 该年金可看作每年年初给付2/3的最后生存年金和每年年初给付1/3的联合生存年金的组合，因此现值为

$$Z = \frac{2}{3}\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \frac{1}{3}\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|}$$

(2) 精算现值为

$$E[Z] = \frac{2}{3}\ddot{a}_{\overline{xy}} + \frac{1}{3}\ddot{a}_{xy}$$

把 $\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$代入，得到

$$E[Z] = \frac{2}{3}\ddot{a}_x + \frac{1}{3}\ddot{a}_y - \frac{1}{3}\ddot{a}_{xy}$$

7.5.2 在状态终止时给付的寿险与连续生存年金

考虑在状态终止之时给付1个单位的终身寿险。设T为状态(u)的未来存续时间，则给付额1个单位在签单时的现值是$Z = v^T$，从而趸缴净保费为

$$\bar{A}_u = E[Z] = \int_0^n v^t \ {}_tp_u \, \mu_{u+t} dt \tag{7-40}$$

方差为

$$Var[Z] = {}^2\bar{A}_u - (\bar{A}_u)^2 \tag{7-41}$$

对n年期两全保险，趸缴净保费为

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_u\,\mu_{u+t}dt + v^n\ {}_np_u \tag{7-42}$$

在状态（u）存续期间连续给付，每年给付总额为 1 个单位的生存年金在签单时的现值记为 $Y=\bar{a}_{\overline{T}|}$，精算现值为

$$\bar{a}_u = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_u\,\mu_{u+t}dt$$

$$\bar{a}_u = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_u dt \tag{7-43}$$

方差为

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{\delta^2}\ ({}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2) \tag{7-44}$$

对 n 年生存年金，精算现值为

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_u\,\mu_{u+t}dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_u$$

$$\bar{a}_{u:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_u\ dt \tag{7-45}$$

趸缴净保费与年金精算现值有如下关系

$$\bar{A}_u + \delta\bar{a}_u = 1$$

$$\bar{A}_{u:\overline{n}|} + \delta\bar{a}_{u:\overline{n}|} = 1$$

由上面的一般公式，以及 $T(xy)$ 和 $T\,\overline{xy}$ 的分布，就可得到对应于状态（xy）、（$\overline{xy}$）的趸缴净保费和年金精算现值公式。例如，由(7－40)式，(7－15)－(7－16)式，可得

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty v^t[\,{}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\,]\,dt$$

由（7－43）式和（7－15）式，得到

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}dt$$

$$= \int_0^\infty v^t(\,{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy})\,dt$$

由于

$$v^{T(xy)} + v^{T(\overline{xy})} = v^{T(x)} + v^{T(y)}$$

$$\bar{a}_{\overline{T(xy)}|} + \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|}$$

取期望值，即得

$$\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

$$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$$

如 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立，可得 $v^{T(xy)}$ 与 $v^{T(\overline{xy})}$ 的协方差如下

$$\mathrm{Cov}[v^{T(xy)},\ v^{T(\overline{xy})}] = E[v^{T(xy)}v^{T(\overline{xy})}] - E[v^{T(xy)}]E[v^{T(\overline{xy})}]$$

$$=E[v^{T(x)}v^{T(y)}]-\bar{A}_{xy}\bar{A}_{\overline{xy}}$$
$$=\bar{A}_x\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\ (\bar{A}_x+\bar{A}_y-\bar{A}_{xy})$$
$$=\ (\bar{A}_x-\bar{A}_{xy})\ (\bar{A}_y-\bar{A}_{xy})$$

【例 7－9】 在例 7－1 所给条件及给定利息力下 $\delta=0.06$，求保额为10 000元的 5 年定期寿险在以下两种情况下的趸缴净保费：（1）当且仅当（45）与（50）中最后一人在未来 5 年内死亡时立即给付保险金；（2）当且仅当（45）与（50）中至少一人在未来 5 年内死亡时立即给付保险金。

解：（1）这是相应于最后生存状态在状态终止时给付保险金的寿险，趸缴净保费为

$$10\ 000\bar{A}^{\ 1}_{\overline{45:50}:\overline{5}|}=10\ 000\int_0^5 v^t\ {}_tp_{\overline{45:50}}\ \mu_{\overline{45:50}}(t)\,dt$$
$$=10\ 000\int_0^5 v^t[{}_tp_{45}\ \mu_{45+t}+{}_tp_{50}\ \mu_{50+t}-{}_tp_{45:50}\ \mu_{45:50}(t)]\,dt$$

注意到

$${}_tp_{45}=\frac{65-t}{65},\quad \mu_{45+t}=\frac{1}{65-t},\quad {}_tp_{50}=\frac{60-t}{60},\quad \mu_{50+t}=\frac{1}{60-t},\quad {}_tp_{45:50}={}_tp_{45}\ {}_tp_{50},$$

$\mu_{45:50}(t)=\mu_{45+t}+\mu_{50+t}$

最后化简得到

$$10\ 000\bar{A}^{\ 1}_{\overline{45:50}:\overline{5}|}=10\ 000\int_0^5\frac{2tv^t}{65\times 60}dt$$
$$=52.62$$

（2）这是相应于联合生存状态在状态终止时给付保险金的寿险。趸缴净保费为

$$10\ 000\bar{A}^{\ 1}_{45:50:\overline{5}|}=10\ 000\int_0^5 v^t\ {}_tp_{45:50}\ \mu_{45:50}(t)\,dt$$
$$=1\ 331.90$$

【例 7－10】 设连续给付年金按如下方式给付：(1)以每年给付总量 1 给付 n 年；(2)n 年之后，如(x)和(y)都生存，以每年给付总量 1 给付；(3) n 年之后，如(y)已死亡而(x)仍生存时，以每年3/4给付；(4) n 年之后，如 (x) 已死亡而 (y) 仍生存时，按每年1/2给付。求该年金的精算现值。

解： 该年金前 n 年给付的现值为 $\bar{a}_{\overline{n}|}$。

n 年之后，当 $t>n$ 时，年金到 t 时刻仍在给付可分为三种互斥的情形，即（2），（3），（4）。这三种情形发生概率分别为${}_tp_{xy}$，${}_tp_x(1-{}_tp_y)$，${}_tp_y(1-{}_tp_x)$，精算现值分别为

$$\int_n^\infty v^t\ {}_tp_{xy}dt=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_{xy}dt-\int_0^n v^t\ {}_tp_{xy}dt=\bar{a}_{xy}-\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

$$\frac{3}{4}\int_n^\infty v^t\ {}_tp_x(1-{}_tp_y)\,dt=\frac{3}{4}(\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|})-\frac{3}{4}(\bar{a}_{xy}-\bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

$$\frac{1}{2}\int_n^{\infty} v^t {}_tp_y(1-{}_tp_x)dt=\frac{1}{2}(\bar{a}_y-\bar{a}_{y:\overline{n}|})-\frac{1}{2}(\bar{a}_{xy}-\bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

该年金的精算现值为以上各项之和，即

$$\bar{a}_{\overline{n}|}+\frac{3}{4}\bar{a}_x+\frac{1}{2}\bar{a}_y-\frac{1}{4}\bar{a}_{xy}-\frac{3}{4}\bar{a}_{x:\overline{n}|}-\frac{1}{2}\bar{a}_{y:\overline{n}|}+\frac{1}{4}\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

这里假设 $T(x)$、$T(y)$ 相互独立。

§7.6 特殊死亡率假设下的估值

上一节给出了趸缴净保费和年金精算现值的一些公式，但没有涉及计算问题。在实际问题中，我们通常在某些合理的假设下简化趸缴净保费和年金精算现值的计算。

7.6.1 死亡率在 Gompertz 假设下的情形

假设死亡率满足 Gompertz 假设。此时 $\mu_x=Bc^x$，$\mu_y=Bc^y$。在独立性假设下，对联合生存状态（xy）有

$$\begin{aligned}\mu_{xy}(s)&=\mu_{x+s}+\mu_{y+s},(s\geqslant 0)\\&=B(c^x+c^y)c^s\\&=Bc^{\omega+s}\\&=\mu_{\omega+s}\end{aligned}$$

因此可以用某个单个生命状态（ω）来代替（xy），其中 ω 由下式确定

$$c^{\omega}=c^x+c^y$$

那么对任何 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}{}_tp_{xy}&=\exp\left(-\int_0^t\mu_{xy}(s)ds\right)\\&=\exp\left(-\int_0^t\mu_{\omega+s}ds\right)\\&={}_tp_{\omega}\end{aligned}$$

关于（xy）的各种概率、期望和方差等都与(ω)的相应概率、期望和方差相同。这样，关于(xy)的二维数值表就可用(ω)的相应的一维数值表来代替。一般来说，对于整数 x 和 y，相应的 ω 是非整数，因此有必要进行线性插值，如下例所示。

【例 7－11】 设（28）与（32）购买保额为 5 万元的联合两全保险，保险金在第一人死亡的保单年末给付，或经过 35 年后两人都生存时给付。给定如下条件，计算趸缴净保费。

（1）设在 20 岁以后的死亡率满足 Gompertz 假设，$\mu_x=0.00015\times 1.08^x, x\geqslant 20$。

（2） $A_{39:\overline{35|}}=0.21452$，$A_{40:\overline{35|}}=0.22314$。

解： 由$1.08^{\omega}=1.08^{28}+1.08^{32}$，解得

$$\omega=39.15979$$

$A_{\omega:\overline{35|}}$可由线性插值计算

$$\begin{aligned}A_{\omega:\overline{35|}}&=0.84021A_{39:\overline{35|}}+0.15979A_{40:\overline{35|}}\\&=(0.84021)(0.21452)+(0.15979)(0.22314)\\&=0.21590\end{aligned}$$

所求趸缴净保费为 $50\ 000A_{(28:32):\overline{35|}}$，那么

$$50\ 000A_{(28:32):\overline{35|}}=50\ 000A_{\omega:\overline{35|}}=10\ 795$$

7.6.2 死亡率在 Makeham 假设下的情形

考虑更一般的情形，即 Makeham 假设下的情形。此时 $\mu_x=A+Bc^x,\mu_y=A+Bc^y$。

在独立性的假设下，对联合生存状态

$$\begin{aligned}\mu_{xy}(s)&=\mu_{x+t}+\mu_{y+t}\\&=2A+Bc^s(c^x+c^y)\\&=2A+2Bc^sc^{\omega}\\&=2(A+Bc^{\omega+s})\\&=2\mu_{\omega+s}\\&=\mu_{\omega\omega}(s)\end{aligned}$$

因此可以用联合生存状态（$\omega\omega$）代替（xy），其中 ω 由下式确定

$$2c^{\omega}=c^x+c^y$$

这样，关于(xy)二维数值表就可用($\omega\omega$)的一维数值表代替。在实务中，通常列出 $\ddot{a}_{xx}$和 A_{xx}的数值表供计算时使用。同样，对应于 x 和 y 的 ω 一般不是整数，因此也要进行线性插值。

【例 7－12】 设（35）与（40）购买保额为 10 万元的最后生存终身寿险，保险金在第二人死亡的保单年末给付。已知：

（1） 在 20 岁以后的死亡率满足 Makeham 假设，

$$1\ 000\mu_x=0.7+0.05\times(10^{0.04})^x,\ x\geqslant 20$$

（2） 在给定利率 $i=0.06$ 下，

$$A_{35}=0.012872,\ A_{40}=0.16132$$

$$A_{37:37}=0.20321,\ A_{38:38}=0.21181$$

计算趸缴净保费。

解： 由关系式 $A_{\overline{xy}}+A_{xy}=A_x+A_y$，所求趸缴净保费可表示为

$100\ 000A_{\overline{35:40}}=100\ 000\ (A_{35}+A_{40}-A_{35:40})$

由 $2\ (10^{0.04})^{\omega}=(10^{0.04})^{35}+(10^{0.04})^{40}$，可得 $\omega=37.78532$。

于是

$$\begin{aligned} A_{35:40} &= A_{\omega\omega} \\ &= 0.21468A_{37:37} + 0.78532A_{38:38} \\ &= (0.21468)(0.20321) + (0.78532)(0.21181) \\ &= 0.20996 \end{aligned}$$

所求趸缴净保费为：

$100\ 000A_{\overline{35:40}} = 100\ 000\ (0.12\ 872 + 0.16\ 132 - 0.20996) = 8\ 008$

【例 7－13】 设年金在（60）与（70）都生存时每年年初给付 15 000 元，当（60）与（70）仅有一人生存时每年年初给付 1 万元。已知：

（1）在 20 岁以后的死亡率满足 Makeham 假设，

$$1\ 000\mu_x = 0.7 + 0.05\ (10^{0.04})^x,\ x \geqslant 20$$

（2）在给定利率 $i = 0.06$ 下，

$$\ddot{a}_{60} = 11.14535,\ \ddot{a}_{70} = 8.56925$$

$$\ddot{a}_{66:66} = 7.58658,\ \ddot{a}_{67:67} = 7.31867$$

计算年金精算现值。

解： 年金的精算现值可表示为

$10\ 000\ddot{a}_{\overline{60:70}} + 5\ 000\ddot{a}_{60:70} = 10\ 000\ddot{a}_{60} + 10\ 000\ddot{a}_{70} - 5\ 000\ddot{a}_{60:70}$

由 $2\ (10^{0.04})^{\omega} = (10^{0.04})^{60} + (10^{0.04})^{70}$，解得

$$\omega = 66.11276$$

于是

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{60:70} &= \ddot{a}_{\omega\omega} \\ &= 0.88724\ddot{a}_{66:66} + 0.11276\ddot{a}_{67:67} \\ &= 7.55637 \end{aligned}$$

最后求得年金精算现值为 159 365 元。

7.6.3 各年龄内死亡服从均匀分布的情形

上面讨论了在状态终止年末给付的寿险趸缴净保费计算，以及按年给付的生存年金的现值计算。现在进一步假设单个生命的死亡时间在每个年龄内服从均匀分布。在该假设下，计算在状态终止时立即给付保险金情形下的趸缴净保费。

当死亡在［x，$x+1$］内服从均匀分布时，

$$_tp_x = 1 - tq_x,\qquad (0 \leqslant t_1 \leqslant 1)$$

$$_tp_x\,\mu_{x+t} = \frac{d}{dt}\ (_tq_x)\ = \frac{d}{dt}\ (1 - {}_tp_x)\ = q_x$$

另外，假设 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立。对于联合生存状态（xy），

$${}_tp_{xy}\mu_{xy}(t) = {}_tp_x \cdot {}_tp_y(\mu_{x+y} + \mu_{y+t})$$

$$
\begin{aligned}
&= {}_tp_y({}_tp_x\mu_{x+t}) + {}_tp_x({}_tp_y\mu_{y+t}) \\
&= (1-tq_y)q_x + (1-tq_x)q_y \\
&= q_x + q_y - q_xq_y + (1-2t)q_xq_y \qquad (7-46) \\
&= q_{xy} + (1-2t)q_xq_y
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \int_0^{\infty} v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 v^{k+s}\,{}_{k+s}p_{xy}\,\mu_{xy}(k+s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}\,{}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k:y+k}(s)\,ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}[q_{x+k:y+k} + (1-2s)q_{x+k}q_{y+k}]\,ds \qquad (7-47) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k:y+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}ds + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}q_{x+k}q_{y+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)\,ds \\
&= \frac{i}{\delta}A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1-\frac{2}{\delta}+\frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
$$

如果假设状态（xy）的终止时间在未来每一年内服从均匀分布，那么

$$
{}_tp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k:y+k}\ (t)\ = q_{x+k:y+k},\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 0\leqslant t\leqslant 1)
$$

这时有

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\int_0^1 v^{s-1}\,{}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k:y+k}\ (s)\ ds \qquad (7-48) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k:y+k}\int_0^1 v^{s-1}ds \\
&= \frac{i}{\delta}A_{xy}
\end{aligned}
$$

（7－48）式类似于单个生命的情形。

（7－47）式与（7－48）式的差别在于：“$T(xy)$ 在未来各年内均匀分布”与“$T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立而且死亡在各年内均匀分布”是不同的。（7－47）式的第二项对应于（x）和（y）在未来同一年（日历年）内死亡的净保费。

有关最后生存保险的趸缴净保费可以通过联合生命保险的趸缴净保费来计算。下面举例说明。

【例 7－14】 给定例 7－12 的条件，再假设 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立而且死亡在各年内均匀分布。计算在状态$\overline{35:40}$终止时立即给付 10 万元的最后生存终身寿险的趸缴净保费。

解： 由（7－47）式，

$$
\bar{A}_{\overline{35:40}} = \bar{A}_{35} + \bar{A}_{40} - \bar{A}_{35:40}
$$

$$\approx \frac{i}{\delta}A_{35} + \frac{i}{\delta}A_{40} - \frac{i}{\delta}A_{35:40}$$

$$= \frac{i}{\delta}A_{\overline{35:40}}$$

所求的趸缴净保费为

$$100\ 000\bar{A}_{\overline{35:40}} \approx 100\ 000A_{\overline{35:40}}\frac{i}{\delta}$$

$$= 8\ 008 \times \frac{0.06}{\ln 1.06}$$

$$= 8\ 245.91$$

§7.7 考虑死亡顺序的趸缴净保费

本节考虑保险给付不仅依赖于状态终止时刻，而且依赖于状态中单个生命的死亡顺序的情形。

7.7.1 (x)在(y)之前并在 n 年内死亡的情形

记“(x)在(y)之前并在 n 年内死亡”这一事件发生的概率为${}_nq_{xy}^{1}$，这里 x 上的 1 表示(x)在(y)之前死亡，n 表示(x)在未来 n 年内死亡。${}_nq_{xy}^{1}$是$(T(x),T(y))$的联合密度函数在区域 $D=[T(x)\leqslant T(y),0\leqslant T(x)\leqslant n]$上的二重积分。在独立性的假设下，联合密度函数是 $T(x)$ 与 $T(y)$ 各自的密度函数之积。因此

$$\begin{aligned}
{}_nq_{xy}^{1} &= \int_0^n\int_t^\infty {}_sp_y\,\mu_{y+s}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,ds\,dt \\
&= \int_0^n {}_tp_x\,\mu_{x+t}\left[\int_t^\infty {}_sp_y\,\mu_{y+s}\,ds\right]dt \qquad (7-49)\\
&= \int_0^n {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,{}_tp_y\,dt \\
&= \int_0^n {}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\,dt
\end{aligned}$$

在 n 年内，如 (x) 死亡，而 (y) 仍生存，则给付 1 个单位的寿险，现值变量为

$$Z=\begin{cases} v^{T(x)}, & T(x)\leqslant T(y),T(x)\leqslant n\\ 0, & 其他\end{cases}$$

趸缴净保费为

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1} = E[Z] &= \int_0^n\int_t^\infty v^t\,{}_sp_y\,\mu_{y+s}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,ds\,dt\\
&= \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt
\end{aligned}$$

对于终身寿险，相应地有

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_{xy} \, \mu_{x+t} dt$$

7.7.2 (y)在(x)之后并在n年内死亡的情形

记“（y）在（x）之后并在未来n年内死亡”的概率为${}_nq_{xy}^{\;\;2}$，y上的2表示(y)在(x)之后死亡，n表示(y)在未来n年内死亡。${}_nq_{xy}^{\;\;2}$是$T(x),T(y)$的联合密度函数在区域$D=[T(x)\geqslant 0, T(x)\leqslant T(y)\leqslant n]$上的二重积分。在独立性的假设下，

$$\begin{aligned} {}_nq_{xy}^{\;\;2} &= \int_0^n\int_0^t {}_sp_x \, \mu_{x+s} \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} ds dt \\ &= \int_0^n (1-{}_tp_x) \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} dt \qquad (7-50) \\ &= {}_nq_y - {}_nq_{xy}^{\;\;1} \end{aligned}$$

（7－50）式的${}_nq_{xy}^{\;\;1}$中y上的1代表y先于x死亡，以下相同。

在这种情形下，对于在（y）死亡时立即给付1个单位的寿险，现值变量为

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)}, & T(x)\leqslant T(y)\leqslant n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

趸缴净保费为

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy:\overline{n|}}^{\;\;2} = E[Z] &= \int_0^n\int_0^t v^t \, {}_sp_x \, \mu_{x+s} \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} ds dt \\ &= \int_0^n v^t (1-{}_tp_x) \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} dt \\ &= \bar{A}_{y:\overline{n|}}^{1} - \bar{A}_{xy:\overline{n|}}^{\;\;1} \end{aligned}$$

对于终身寿险，相应地有

$$\begin{aligned} \bar{A}_{xy}^{\;\;2} &= \int_0^{\infty} v^t (1-{}_tp_x) \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} dt \\ &= \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}^{\;\;1} \end{aligned}$$

在（7－50）式中交换积分顺序可得

$$\begin{aligned} {}_nq_{xy}^{\;\;2} &= \int_0^n\int_s^n {}_sp_x \, \mu_{x+s} \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} dt ds \\ &= \int_0^n ({}_sp_y - {}_np_y) \, {}_sp_x \, \mu_{x+s} ds \qquad (7-51) \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}y} - {}_np_y \, {}_nq_x \end{aligned}$$

从而可知

$${}_nq_{\overset{1}{x}y} \geqslant {}_nq_{xy}^{\;\;2}$$

7.7.3 在特殊假设下趸缴净保费的计算

下面通过例子来说明在Gompertz假设和Makeham假设下趸缴净保费的

计算。由于 $\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{\ 2}=\bar{A}_{y:\overline{n}|}^{1}-\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{\ 1}$，所以只需讨论某人在另一人之前并在 n 年内死亡的情形即可。计算概率时也可利用（7－51）式。

【例 7－15】 设死力由 Gompertz 律给出，$T(x)$ 与 $T(y)$ 相互独立。求：（1）当 (x) 死亡而 (y) 仍然生存时，立即给付 1 的 n 年定期寿险的趸缴净保费。（2）(x) 先于 (y) 并在 n 年内死亡的概率。

解：（1）由给定条件，$\mu_{x+t}=Bc^{x+t}$，$\mu_{y+t}=Bc^{y+t}$，$\mu_{xy}(t)=\mu_{x+t}+\mu_{y+t}$。所求趸缴净保费为

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1}=\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}Bc^{x+t}dt$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}B\ (c^x+c^y)\ c^tdt$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\mu_{xy}\ (t)\ dt$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y}\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\ 1}$$

上式最后的符号 $\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\ 1}$ 表示关于状态（xy）的定期保险。令 $c^x+c^y=c^\omega$，此时 ${}_tp_{xy}={}_tp_\omega$，$\mu_{xy}(t)=\mu_{\omega+t}$，

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1}=\frac{c^x}{c^\omega}\int_0^n v^t\,{}_tP_\omega\,\mu_{\omega+t}dt$$

$$=\frac{c^x}{c^\omega}\bar{A}_{\omega:\overline{n}|}^{1}$$

（2）当 $v=1$ 时，$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1}$ 在数值上即等于 ${}_nq_{xy}^{1}$。因此

$${}_nq_{xy}^{1}=\frac{c^x}{c^\omega}{}_nq_\omega$$

【例 7－16】 如例 7－15 中的死力满足 Makeham 律，计算趸缴净保费与概率。

解：（1）由给定条件，$\mu_{xy}(t)=\mu_{x+t}+\mu_{y+t}=2A+B(c^x+c^y)c^t$。所求趸缴净保费为

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1}=\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}(A+Bc^{x+t})\,dt$$

$$=A\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}dt+\frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}B(c^x+c^y)c^tdt$$

$$=A\left(1-\frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}dt+\frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}[2A+B(c^x+c^y)c^t]\,dt$$

$$=A\left(1-\frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n}|}+\frac{2c^x}{c^x+c^y}\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}^{\ 1}$$

令 $2c^\omega=c^x+c^y$，此时 ${}_tp_{\omega\omega}={}_tp_{xy}$，$\mu_{xy}(t)=\mu_{\omega\omega}(t)$。

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^{1}=A\left(1-\frac{c^x}{c^\omega}\right)\bar{a}_{\omega\omega:\overline{n}|}+\frac{c^x}{2c^\omega}\bar{A}_{\overline{\omega\omega}:\overline{n}|}^{\ 1}$$

（2）令 $v=1$，得到

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{xy}^{1} &= A\left(1-\frac{c^x}{c^\omega}\right)\int_0^n {}_tp_{\omega\omega}dt + \frac{c^x}{2c^\omega}\int_0^n {}_tp_{\omega\omega}\,\mu_{\omega\omega}(t)\,dt \\
&= A\left(1-\frac{c^x}{c^\omega}\right)\mathring{e}_{\omega\omega:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^\omega}{}_nq_{\omega\omega}
\end{aligned}
$$

其中$\mathring{e}_{\omega\omega:\overline{n}|}$为联合生存状态在 n 年内的平均剩余存续时间。

最后考察均匀分布假设对趸缴净保费的影响。在（x）先于（y）死亡年末给付 1 个单位的趸缴净保费为

$$
A_{xy}^{1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{xy}q_{x+k:y+k}^{1} \tag{7-52}
$$

假设每个人死亡的发生在各年龄内均匀分布，那么

$$
\begin{aligned}
q_{x+k:y+k}^{1} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k+s}ds \qquad (7-53)\\
&= \int_0^1 (1-sq_{y+k})\,q_{x+k}ds \\
&= q_{x+k}\left(1-\frac{1}{2}q_{y+k}\right)
\end{aligned}
$$

由（7－53）式，${}_sp_{x+k:y+k}\mu_{x+k+s}$用 $q_{x+k:y+k}^{1}$表示如下

$$
\begin{aligned}
{}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k+s} &= q_{x+k}\ (1-sq_{y+k}) \\
&= q_{x+k}\left(1-\frac{1}{2}q_{x+k}\right)+\left(\frac{1}{2}-s\right)q_{x+k}q_{y+k} \qquad (7-54)\\
&= q_{x+k:y+k}^{1}+\left(\frac{1}{2}-s\right)q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
$$

对于在（x）死亡时立即给付的情形，趸缴净保费为

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy}^{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_{xy}\int_0^1 v^s{}_sp_{x+k:y+k}\,\mu_{x+k+s}ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{xy}\left[q_{x+k:y+k}^{1}\int_0^1 (1+i)^{1-s}ds + q_{x+k}q_{y+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}\left(\frac{1}{2}-s\right)ds\right] \qquad (7-55)\\
&= \frac{i}{\delta}A_{xy}^{1}+\frac{1}{2}\,\frac{i}{\delta}\left(1-\frac{2}{\delta}+\frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_kp_{xy}q_{x+k}q_{y+k}
\end{aligned}
$$

（7－55）式的第二项相对来说较小，通常可略去而得到近似计算

$$
\bar{A}_{xy}^{1} \approx \frac{i}{\delta}A_{xy}^{1}
$$

习　题

下列问题中均假设各生命的未来生存时间为相互独立的随机变量。

1. 利用单个生命的生存概率${}_np_x$ 和${}_np_y$ 表示。

（1）（xy）存续 n 年的概率；

(2) (x) 和 (y) 只有一个活过 n 年的概率；

(3) (x) 和 (y) 至少有一个活过 n 年的概率；

(4) (xy) 将在 n 年内终止的概率；

(5) (x) 和 (y) 中都在 n 年内死亡的概率。

2. 证明 (x) 活过 n 年且 (y) 活过 $n-1$ 年的概率可表示为：$\frac{{}_{n}p_{x:y-1}}{p_{y-1}}$ 或 $p_x\ {}_{n}p_{x+1:y}$。

3. 给出 ${}_{25}p_{25:50}=0.2$ 和 ${}_{15}p_{25}=0.9$，计算 40 岁的人活过 75 岁的概率。

4. 如果 $\mu_x=\frac{1}{100-x}$ $(0\leqslant x<100)$，计算：

(1) ${}_{10}p_{40:50}$；(2) $\mathring{e}_{40:50}$；(3) $\mathrm{Var}[T(40:50)]$

5. 求：$\frac{d\,\mathring{e}_{xx}}{dx}$。

6. 生命Ⅰ和生命Ⅱ的死力分别为：

$\mu_x^{I}=\ln\frac{10}{9}$ $(x\geqslant 0)$，$\mu_x^{II}=(10-x)^{-1}$ $(0\leqslant x<100)$

如两个生命均为 1 岁，求最初的死亡发生在 3 岁至 5 岁之间的概率。

7. 设 $\mu_x=\frac{1}{100-x}$ $(0\leqslant x<100)$，计算：

(1) ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$；(2) $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$

(3) $\mathrm{Var}[T(\overline{40:50})]$；(4) $\mathrm{Cov}[T(40:50),\ T(\overline{40:50})]$

8. 求 (x) 和 (y) 至少有一人在第 $n+1$ 年死亡的概率。这个概率是否等于 ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$？为什么？

9. 设两个 x 岁的人具有相同的寿命分布，求 ${}_{t}p_{\overline{xx}}-{}_{t}p_x$ 的最大可能值。

10. 用单个生命状态的死亡概率、生存概率和死力表示 (40) 和 (50) 中最后一个生存者在 70 岁至 75 岁死亡的概率。

11. 年给付额为 1 个单位的连续型年金的给付条件为：(30) 与 (45) 至少有一个人活着时给付，但当 (30) 活着且在 40 岁以下时不给付。求年金的精算现值。

12. 对于 (25) 和 (30)，当至少有一人活着并在 50 岁以下时，可以获得年给付额为 1 个单位的连续型年金给付。试用单生命年金和联合生命年金表示该连续型年金的精算现值。

13. 证明：

$$a_{\overline{(xy):\overline{n|}}}=a_{\overline{n|}}+{}_{n|}a_{xy}$$

14. 对于趸缴净保费 $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$，说明该保险的给付方式，并证明：

$$\bar{A}_{\overline{x:\overline{n|}}}=\bar{A}_x-\bar{A}_{x:\overline{n|}}+v^n$$

15. 在 50 岁以后，只要(25)和(30)中至少有一人活着，就可在每年末

获得 1 个单位的年金给付。试用单生命年金和联合生命年金表示该延期年金的精算现值。

16. 考虑年给付额为 1 个单位的连续型年金。当(40)和(55)至少有一人生存并超过 60 岁时给付，但当(40)活着并在 55 岁以下时不予给付。给出此年金的精算现值。

17. (x)在(y)活着时，以及在 (y) 死亡后 n 年内仍生存，则可获得给付额为 1 个单位的年末年金给付，但年金的最长给付期为 m 年，$m>n$。证明：该年金的精算现值为

$$a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x a_{(x+n:y):\overline{m-n}|}$$

18. 对于联合生存状态 (xy)，如果：

(1) 死力服从 Gompertz 律，而且 $c=2^{0.2}$，那么 $\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_{56}$；

(2) 死力服从 Makeham 律，而且 $c=2^{0.2}$，那么 $\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_{zz}$。

求 z。

19. 假设生命表满足 Makeham 律，状态 $(\omega\omega)$ 是相应于年龄 x 和 y 的等价年龄状态。证明：

(1) ${}_tp_{\omega}$ 是 ${}_tp_x$ 和 ${}_tp_y$ 的几何平均；

(2) ${}_tp_x + {}_tp_y > 2\,{}_tp_{\omega}$，$x \neq y$；

(3) $a_{\overline{xy}} > a_{\overline{\omega\omega}}$，$x \neq y$。

20. 在 Makeham 律下，当用状态 $(\omega\omega)$ 代替状态 (xy) 时，证明：

$$\omega - y = \frac{\ln\ (c^{\Delta}+1)\ \ -\ln 2}{\ln\ (c)}$$

这里 $\Delta = x - y \geqslant 0$（这说明 ω 可以通过较小的年龄 y 加上一个关于 Δ 的函数而得到）。

21. 假设 20 岁以后的死力满足 Makeham 律：$1\,000\mu_x = 0.7 + 0.05\ (10^{0.04})^x$，$x \geqslant 20$。另外给定 $i=0.06$，${}_{20}p_{50}=0.7391608$，$\ddot{a}_{56:56}=10.22273$，$\ddot{a}_{57:57}=9.96964$，$\ddot{a}_{66:66}=7.58658$，$\ddot{a}_{67:67}=7.31867$，计算 $\ddot{a}_{(50:60):\overline{10}|}$。

22. 假设生命表满足 Makeham 律，证明 $\bar{a}_{xy}$ 等于 (ω) 的单生命年金的精算现值，这里 $c^{\omega}=c^x+c^y$。引入 $\delta'=\delta+A$，证明：

$$\bar{A}_{xy} = \bar{A}'_{\omega} + A\bar{a}'_{\omega}$$

这里带撇号的函数是以利力 δ' 计算的。

23. 考虑男女两个生命表，男性的记为 M，女性的记为 F，分别具有死力：

$$\mu_x^M = 3a + \frac{3bx}{2},\ \mu_x^F = a + bx$$

希望利用关于男女年龄均为 ω 的两个生命的精算现值，计算 x 岁的男性和 y 岁的女性的联合生命年金的精算现值。用 x 和 y 表示 ω。

24. 设 $T\ (x)$ 和 $T\ (y)$ 相互独立，而且在每一年龄内均匀分布假设成

立。给定（x）和（y）均在下一年内死亡，证明（xy）的未来存续时间在下年内不服从均匀分布。

（提示：证明 $Pr[T(xy)\leqslant t\mid\{(T(x)\leqslant 1)\cap(T(y)\leqslant 1)\}]=2t-t^2$）

25. 在（x）死亡的年末（y）仍生存时给付 1 的寿险，证明趸缴净保费可表示为：

$$vp_y\ddot{a}_{x:y+1}-a_{xy}$$

26. 设 $q_x=q_y=1$，而且对于（x）和（y），死亡的发生在年内服从均匀分布，计算$\mathring{e}_{xy}$。

27. 关于（50）和（20）的寿险，在（50）死亡时立即为已死亡或已达到 40 岁的（20）提供 1 个单位保险金。试用单生命寿险和最初死亡寿险的趸缴净保费表示该保险的趸缴净保费。

28. 某寿险在（y）死亡后 n 年内（x）死亡时立即给付 1 个单位保险金，试用生存保险和最初死亡寿险的趸缴净保费表示该寿险的趸缴净保费。

29. 在满足 Makeham 律的生命表中，已知 $A=0.003$ 和 $c^{10}=3$。

（1）若$\mathring{e}_{40:50}=17$，计算${}_{\infty}q^{1}_{40:50}$。

（2）用 $\bar{A}_{40:50}$和 $\bar{a}_{40:50}$表示 $\bar{A}^{1}_{40:50}$。

30. 设 $\mu_x=\dfrac{1}{100-x}$，（$0\leqslant x<100$），计算${}_{25}q_{25:\overset{2}{50}}$。

31. 假设死力满足 Gompertz 律，$\mu_x=10^{-4}2^{x/8}$。由例 7－15 给出 $\bar{A}^{1}_{40:48:\overline{10|}}=f\bar{A}^{1}_{\omega:\overline{10|}}$，求 f 与 ω。

第八章　多元风险模型

学习目标

- □ 了解具有多个终止原因的多元风险模型的基本概念
- □ 熟悉多元风险模型中有关状态未来存续时间和终止原因的概率分布，掌握在多个因素同时作用下的计算方法
- □ 熟悉伴随单风险模型中各种风险的单独作用对存续群体的影响，掌握多元风险模型与伴随单风险模型的关系
- □ 掌握多元风险模型中趸缴净保费的计算方法

§8.1　多元风险模型的概念

在第七章，我们把建立在单个生命状态上的精算理论推广到了包含多个生命的状态，但仅考虑了死亡这一决定未来存续时间的因素。在实际中，往往需要考虑多种影响有关状态未来存续时间的因素。例如，企业的员工人数会由于辞职、残疾、死亡或退休而减少，有必要对目前在职人员在未来不同年度内仍在职的人数进行估计。在员工保险计划中，保险给付额依赖于事故的不同性质，如退休给付常常与死亡或残疾给付不同。在伤病收入保险中，被保险人在伤病后可获得定期的给付，而有些伤病收入保险的定期给付额会因导致工作能力丧失的原因而不同，如疾病导致的工作能力丧失与事故导致的工作能力丧失，定期给付额可能不同。另外，被保险人可能因为死亡、解约、残疾或期满而终止保险，此时保险人是否给付以及给付多少都会取决于不同的事件。

从上面的例子可知，除了考虑有关状态的未来存续时间，我们还应考虑导致状态终止的因素。本章在单个生命状态保险模型的基础上，同时考虑导致状态终止的因素，这些因素导致的状态终止可视为随机变量，称这种模型为多元风险模型（multiple decrement models）。在这个意义下，前面各章所讨论的保险模型可称为一元风险模型。在多元风险模型中，状态的终止不仅源于被保险人的死亡，也包括解约、退休、残疾及期满等。在精算学中，本章所建立的理论称为多元风险理论（multiple decrement theory）。在生物统计学中称为竞争风险理论。

§8.2 存续时间与终止原因的联合分布与边际分布

把状态(x)的未来存续时间仍记为$T(x)$，或简记为T。这时$T(x)$表示自状态(x)开始直到因某种原因导致其终止时所经过的时间。导致状态(x)终止的原因记为$J(x)$，简记为J。把导致状态终止的原因按自然数顺序编号，这样J就是一个离散型随机变量。例如，在员工保险计划中，可令$J=1$、2、3、4分别表示导致状态(x)的终止原因是辞职、残疾、死亡或退休；在伤病收入保险中，可令$J=1$、2、3、4分别表示导致状态(x)的终止原因是死亡、解约、残疾或期满。可见，J的取值可根据具体情况自由选择，只需指明其含义即可。

8.2.1 联合分布与边际分布

随机变量T与J的分布可由联合概率密度函数$f(t,j)$给出，其中T的取值为$[0,\infty)$，J的取值为$\{1,2,\cdots,m\}$，m为某正整数。注意到$f(t,j)$不是通常严格意义下的密度，因为j取离散值。

由联合概率密度函数$f(t,j)$，可以表示如下概率：

由原因j导致状态(x)在时间$[0,t]$内终止的概率，记为${}_tq_x^{(j)}$，

$$\begin{aligned}{}_tq_x^{(j)} &= Pr(0\leqslant T\leqslant t, J=j)\\ &= \int_0^t f(s,j)\,ds\,(t\geqslant 0, j=1,2,\cdots,m)\end{aligned} \qquad (8-1)$$

状态(x)在时刻t前终止的概率，即不论何种原因导致状态(x)在时刻t前终止的概率，记为${}_tq_x^{(\tau)}$，

$${}_tq_x^{(\tau)} = Pr(T\leqslant t) = \sum_{j=1}^{m}\int_0^t f(s,j)\,ds \qquad (8-2)$$

状态(x)在时刻t仍存续的概率记为${}_tp_x^{(\tau)}$，

$${}_tp_x^{(\tau)} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \qquad (8-3)$$

状态(x)由原因j导致终止的概率记为${}_\infty q_x^{(j)}$，

$$\begin{aligned}{}_\infty q_x^{(j)} &= Pr(T<\infty, J=j)\\ &= \int_0^\infty f(s,j)\,ds \quad (j=1,2,\cdots,m)\end{aligned} \qquad (8-4)$$

$\{{}_\infty q_x^{(j)}, j=1,2,\cdots m\}$构成了随机变量$J$的边际概率函数。引入$f_J(j)$：

$$f_J(j) = {}_\infty q_x^{(j)} = \int_0^\infty f(s,j)\,ds, j = 1,2,\cdots,m$$

记随机变量T的边际密度函数为$f_T(t)$，那么

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j) \qquad (8-5)$$

显然

$$\int_0^\infty f_T(t)\,dt = 1$$

记 T 的边际分布函数为 $F_T(t)$，那么

$$\begin{aligned}F_T(t) &= \int_0^t f_T(s)\,ds = \int_0^t \sum_{j=1}^m f(s,j)\,ds \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^t f(s,j)\,ds = {}_tq_x^{(\tau)}\end{aligned} \tag{8-6}$$

即 $F_T(t)$ 正是状态 (x) 在时刻 t 前终止的概率。

8.2.2 终止力函数

类似于一元风险模型，在多元风险模型中，我们将状态 (x) 在 $x+t$ 岁的终止力定义为

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{F'_T(t)}{1-F_T(t)} = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)} \tag{8-7}$$

由 (8－6) 式和 (8－3) 式，可得

$$\begin{aligned}\mu_{x+t}^{(\tau)} &= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}{}_tq_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}{}_tp_x^{(\tau)} \\ &= -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x^{(\tau)}\end{aligned} \tag{8-8}$$

由上式可解得

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)}\,ds\right] \tag{8-9}$$

由原因 j 导致状态 (x) 在 $x+t$ 岁终止的终止力可以定义为

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1-F_T(t)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \tag{8-10}$$

因此，联合概率密度函数可用精算符号表示为

$$f(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$

在 (8－1) 式中对 t 求导，可得

$$\frac{d}{dt}{}_tq_x^{(j)} = f(t,j)$$

于是 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 可表示为

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}{}_tq_x^{(j)} \tag{8-11}$$

由 (8－1) 式和 (8－2) 式，可得

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m {}_tq_x^{(j)} \tag{8-12}$$

两边对 t 求导并除以 ${}_tp_x^{(\tau)}$，可得

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)} \tag{8-13}$$

（8－12）式和（8－13）式表明各种原因导致状态终止的概率、以及各种原因的终止力都有可加性，它们的和分别为终止概率和终止力。

由（8－10）式和（8－13）式，可得

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{m} f(t,j) = \sum_{j=1}^{m} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} = {}_tp_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)}$$
$$= {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}$$

最后考虑一个条件概率。已知状态在 t 时刻终止，那么 J 的条件密度函数为

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{f(t,j)}{f_T(t)} = \frac{{}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)}} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}, \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{8-14}$$

至此，我们已把 T 和 J 的联合概率密度函数、边际密度函数和条件密度函数用精算符号表示出来。现概括如下：

$$f(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$
$$f_T(t) = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$
$$f_J(j) = {}_\infty q_x^{(j)}$$
$$f_{J|T}(j|t) = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}$$

下面给出两个例题。

【例 8－1】 考虑具有两个终止原因的多元风险模型，其终止力如下：

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{t}{100}, \quad \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{1}{100}, \quad t \geqslant 0$$

求该模型的联合密度函数、边际密度函数和条件密度函数。

解： 先求 $\mu_{x+t}^{(\tau)}$ 与 ${}_tp_x^{(\tau)}$。对 $t \geqslant 0$，

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)} = \frac{t+1}{100}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \frac{s+1}{100} ds\right] = \exp[-(t^2+2t)/200]$$

于是 T 和 J 的联合密度函数为

$$f(t,j) = \begin{cases} \dfrac{t}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right](t \geqslant 0, j=1) \\ \dfrac{1}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right](t \geqslant 0, j=2) \end{cases}$$

T 的边际密度函数为

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f(t,j) = \frac{t+1}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right], (t \geqslant 0)$$

J 的边际密度函数为

$$f_J(j)=\begin{cases}\int_0^{\infty} f(t,1)\,dt & (j=1)\\ \int_0^{\infty} f(t,2)\,dt & (j=2)\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}f_J(2)&=\int_0^{\infty}\frac{1}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]dt\\&=\frac{1}{100}e^{0.005}\int_0^{\infty}\exp\left[-(t+1)^2/200\right]dt\\&=\frac{1}{100}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\cdot 10\int_0^{\infty}\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\exp\left[-(t+1)^2/200\right]dt\\&=\frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\int_{0.1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-z^2/200\right)dz\\&=\frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\left[1-\Phi(0.1)\right]\\&=0.1159\end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。从而

$$f_J(1)=1-0.1159=0.8841$$

最后，给定状态在 t 时刻终止的条件下，J 的条件密度函数为

$$f_{J|T}(j|t)=\begin{cases}\dfrac{\mu_{x+t}^{(1)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}=\dfrac{t}{t+1} & (j=1)\\[2ex] \dfrac{\mu_{x+t}^{(2)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}=\dfrac{1}{t+1} & (j=2)\end{cases}$$

【例 8－2】　在例 8－1 所给条件下，求 $E[T]$ 和 $E[T|J=2]$。

解： 由分部积分，可得

$$\begin{aligned}E[T]&=\int_0^{\infty}t\cdot f_T(t)\,dt=\int_0^{\infty}t\left\{\frac{t+1}{100}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]\right\}dt\\&=-t\cdot\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]dt\\&=0+100f_J(2)\\&=11.59\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[T|J=2]&=\int_0^{\infty}t\frac{f(t,2)}{f_J(2)}dt\\&=\frac{1}{0.1159}\int_0^{\infty}t\{100^{-1}\exp\left[-(t^2+2t)/200\right]\}dt\\&=\frac{f_J(1)}{0.1159}\\&=7.63\end{aligned}$$

由以上两个例子可知，只要确定了 T 和 J 的联合密度函数，相应的边

际分布、条件分布、矩和条件矩等均可求出。

8.2.3 存续整年数与终止原因的联合分布

现在考虑状态(x)未来存续整年数 $K=[T]$与终止原因 J 的联合分布。K 和 J 的联合分布可表示为

$$
\begin{aligned}
Pr[K=k,\ J=j] &= Pr[k\leqslant T<k+1,\ J=j] \\
&= \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt \\
&\overset{t=k+s}{=} {}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \\
&= {}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)} \qquad (8-15)
\end{aligned}
$$

其中

$$
q_{x+k}^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(j)}ds \qquad (8-16)
$$

为已知状态存续到 $x+k$ 岁后由原因 j 导致在下一年内终止的概率。

在下一年内终止的概率为

$$
\begin{aligned}
q_{x+k}^{(\tau)} &= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\mu_{x+k+s}^{(\tau)}ds \\
&= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\sum_{j=1}^m \mu_{x+k+s}^{(j)}ds \\
&= \sum_{j=1}^m q_{x+k}^{(j)} \qquad (8-17)
\end{aligned}
$$

从（8－17）式可以看出，如果状态（x）在 $x+k$ 岁至 $x+k+1$ 岁之间的终止概率保持不变，那么当某个原因导致终止的概率增大时，由其他原因导致终止的概率就会减小。由于这个原因，多元风险理论也称为竞争风险理论。

§8.3 随机存续群体与确定存续群体

与一元风险模型类似，在多元风险模型中，我们也可以从两个不同的角度来看待一个群体。从概率论的角度来看，对于一个群体，在未来某一时刻仍在群体中的人数、以及在未来某一段时间内因某种原因离开群体的人数都是随机变量，事先不能确定，只有在数学期望下来反映群体人数的变化才有意义。在这个角度下，我们把所考察的群体称为随机存续群体。而从生物学的角度来看，一个群体的人数将受某些负增长因素或某综合负增长因素的影响而不断减少。未来某一时刻群体的人数、以及未来某一段时间内因某种原因离开群体的人数均可由该群体的初始人数和负增长因素确定。在这个角度下，我们把所考察的群体称为确定

存续群体。

下面我们分别从这两种角度出发展开讨论。

8.3.1　随机存续群体

考虑一个由 $l_a^{(\tau)}$ 个年龄为 a 岁的人组成的群体，其中每个人在未来离开该群体的时刻和原因的联合密度函数为

$$f(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)} \cdot \mu_{a+t}^{(j)}, \quad (t \geqslant 0, j = 1, 2\cdots, m)$$

当 $x \geqslant a$ 时，在 x 岁到 $x+n$ 岁之间，由于原因 j 而离开群体的人数是一个随机变量，记为 ${}_nD_x^{(j)}$，其数学期望记为 ${}_nd_x^{(j)}$。

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &= E[{}_nD_x^{(j)}] \\ &= l_a^{(\tau)} Pr(x - a < T \leqslant x + n - a, J = j) \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(j)} dt \end{aligned} \tag{8-18}$$

当 $n=1$ 时，${}_nD^{(j)}$ 和 ${}_nd_x^{(j)}$ 分别记为 $D_x^{(j)}$ 和 $d_x^{(j)}$。

在 x 岁和 $x+n$ 岁之间将离开群体的人数记为 ${}_nD_x^{(\tau)}$。由于

$${}_nD_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_nD_x^{(j)}$$

从而

$${}_nd_x^{(\tau)} = E[{}_nD_x^{(\tau)}] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)} \tag{8-19}$$

把（8－18）式代入，得

$${}_nd_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-1} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{a+t}^{(j)} dt \tag{8-20}$$

到 x 岁时仍在该群体的人数是一个随机变量，记为 $L_x^{(\tau)}$，其均值记为 $l_x^{(\tau)}$，

$$l_x^{(\tau)} = E[L_x^{(\tau)}] = l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x-a}p_x^{(\tau)} \tag{8-21}$$

在（8－18）式中令 $n=1$，得到在 x 岁和 $x+1$ 岁之间由于原因 j 而离开群体的人数的均值

$$\begin{aligned} d_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_{s+x-a}p_a^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \\ &= l_a^{(\tau)} {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)} \mu_{x+s}^{(j)} ds \end{aligned}$$

由（8－21）式和（8－22）式，可得

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)} \tag{8-22}$$

通过（8－21）式和（8－22）式，可以从给定的 $l_a^{(\tau)}$ 和 $q_x^{(j)}$ 的数值表得到相应的关于 $l_x^{(\tau)}$ 和 $d_x^{(j)}$ 的数值表。这两种表都被称为多元风险表。

【例 8－3】　设 $l_{65}^{(\tau)} = 1\ 000$，根据表 8－1 构造关于 $l_x^{(\tau)}$ 和 $d_x^{(j)}$ 的数值表。

表 8－1　　　　　　$q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$ 数值表

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08
69	0.06	0.09
70	0.00	1.00

解： 由 $q_x^{(\tau)}=q_x^{(1)}+q_x^{(2)}$，$p_x^{(\tau)}=1-q_x^{(\tau)}$，及（8－21）式可得如下多元风险表（见表 8－2）。

表 8－2　　　　　　多 元 风 险 表

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}=l_{x-1}^{(\tau)}p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}=l_x^{(\tau)}q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}=l_x^{(\tau)}q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05	0.07	0.93	1 000.00	20.00	50.00
66	0.03	0.06	0.09	0.91	930.00	27.90	55.80
67	0.04	0.07	0.11	0.89	846.30	33.85	59.24
68	0.05	0.08	0.13	0.87	753.21	37.66	60.26
69	0.06	0.09	0.15	0.85	655.29	39.32	58.98
70	0.00	1.00	1.00	0.00	557.00	0.00	557.00

注意 $l_{x+1}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}-d_x^{(1)}-d_x^{(2)}$，它可用来检验表中最后三列数值结论，但可能会存在舍入误差。

利用表 8－2 中的数值，可以比较由基本原理求得的某些概率和由表 8－2 中最后三列求得的相应概率。由基本原理求得如下概率：

$$_2p_{65}^{(\tau)}=p_{65}^{(\tau)}p_{66}^{(\tau)}=(0.93)(0.91)=0.8463$$

$$_2q_{65}^{(\tau)}=p_{66}^{(\tau)}p_{67}^{(\tau)}q_{68}^{(\tau)}=(0.91)(0.89)(0.05)=0.0405$$

$$_2q_{67}^{(2)}=q_{67}^{(2)}+p_{67}^{(\tau)}q_{68}^{(2)}=0.07+(0.89)(0.08)=0.1412$$

由表 8－2 中最后三列求得相应的概率如下：

$$_2p_{65}^{(\tau)}=\frac{l_{67}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}}=\frac{846.30}{1\ 000.00}=0.8463$$

$$_{2|}q_{66}^{(\tau)}=\frac{d_{68}^{(1)}}{l_{66}^{(\tau)}}=\frac{37.66}{930.00}=0.0405$$

$$_2q_{67}^{(\tau)}=\frac{d_{67}^{(2)}+d_{68}^{(2)}}{l_{67}^{(\tau)}}=\frac{59.24+60.26}{846.30}=0.1412$$

两种方法得到的结果在四位小数上是相同的。

例 8－3 中的原因 1 可视为死亡，原因 2 可视为退休。这里，70 岁可看

成强制退休年龄，到 70 岁时所有该群体中仍存在的人将全部退休。

8.3.2　确定存续群体

我们从给定生命表来看存续群体。考虑一下由 $l_a^{(\tau)}$ 个 a 岁的人组成的群体，在未来某一年龄 x，群体中仍存续的人数 $l_x^{(\tau)}$ 由年终止率 $q_a^{(\tau)}$，$q_{a+1}^{(\tau)}$，$\cdots$，$q_{x-1}^{(\tau)}$确定。

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)}(1-q_a^{(\tau)})(1-q_{a+1}^{(\tau)})\cdots(1-q_{x-1}^{(\tau)}) \\ &= l_a^{(\tau)}p_a^{(\tau)}p_a^{(\tau)}\cdots p_{x-1}^{(\tau)} \\ &= l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \end{aligned}$$

上式对应于随机存续群体中的（8－21）式。如果群体中每个人在未来年龄 y 岁离开群体的终止力为 $\mu_y^{(\tau)}$，$y \geqslant a$，那么

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)} = l_a^{(\tau)}\exp\left[-\int_a^x \mu_y^{(\tau)}dy\right] \tag{8－23}$$

在 x 岁和 $x+1$ 岁之间离开群体的人数 $d_x^{(\tau)}$ 可由下式确定

$$\begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}\left[1-\frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right] \\ &= l_x^{(\tau)}\left\{1-\exp\left[-\int_x^{x+1}\mu_y^{(\tau)}dy\right]\right\} \\ &= l_x^{(\tau)}\left[1-p_x^{(\tau)}\right] \\ &= l_x^{(\tau)}q_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{8－24}$$

在随机存续群体中，由（8－22）式和（8－12）式也可得到与（8－24）式相应的式子。

在（8－23）式中取对数，并对 x 求导，得

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx} \tag{8－25}$$

上述公式与第一章中有关生命表函数的公式相似。不过这里群体中的人数是由综合负增长率（包括多个终止原因）$q_x^{(\tau)}$ 或与之等价的终止力 $\mu_y^{(\tau)}$（$x \leqslant y \leqslant x+1$）确定的，而不是仅由一元风险模型中的单个负增长率（死亡率）或与之等价的死力确定。

假设有 m 个终止原因，在 x 岁时群体中的 $l_x^{(\tau)}$ 个仍存续的人将由于这 m 个原因在未来全部离开群体。这样我们可以把 $l_x^{(\tau)}$ 个人划分为 m 个小群体，各小群体的人数分别记为 $l_x^{(j)}$（$j=1$，2，$\cdots$，m），其中 $l_x^{(j)}$ 表示将由原因 j 而离开群体的人数。显然

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} \tag{8－26}$$

定义在年龄 x 岁时关于原因 j 的终止力为

$$\mu_x^{(j)}=\lim_{t\to 0}\frac{l_x^{(j)}-l_{x+t}^{(j)}}{t\cdot l_x^{(\tau)}}$$

注意，分母出现的是 $l_x^{(\tau)}$ 而不是 $l_x^{(j)}$。等价地

$$\mu_x^{(j)}=-\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(j)}}{dx} \tag{8-27}$$

由式（8　25）式—（8－27）式，可得

$$\mu_x^{(\tau)}=-\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{m}l_x^{(j)}=\sum_{j=1}^{m}\mu_x^{(j)} \tag{8-28}$$

把（8－27）式中的 x 换成 y，改写为

$$-dl_y^{(j)}=l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy$$

两边从 $y=x$ 到 $y=x+1$ 积分，得到

$$l_x^{(j)}-l_{x+1}^{(j)}=\int_x^{x+1}l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy$$

因此

$$d_x^{(j)}=\int_x^{x+1}l_y^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy \tag{8-29}$$

在（8－29）式中对 j 求和，由（8－28）式，就得

$$d_x^{(\tau)}=\int_x^{x+1}l_y^{(\tau)}\mu_y^{(\tau)}dy \tag{8-30}$$

最后，在（8－29）式两边同时除以 $l_x^{(\tau)}$，得到

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}=\int_x^{x+1}{}_{y-x}p_x^{(\tau)}\mu_y^{(j)}dy=q_x^{(j)} \tag{8-31}$$

其中 $q_x^{(j)}$ 是在所有 m 个终止原因都起作用的情况下，$l_x^{(\tau)}$ 个存续者中在 x 岁到 $x+1$ 岁之间由原因 j 而离开群体的人数比率。

可见，确定存续群体为多元风险理论提供了另一种描述方法和理论框架，它类似于生命表的情形。

§8.4　伴随单风险模型和多元风险表的构造

在一元风险模型中，我们仅考虑一种风险（如死亡）导致状态在一定时间内终止的概率。而在多元风险模型中，我们考虑的是各种风险同时发生作用的情形，某种风险导致状态终止的可能性会因其他风险的存在而改变。例如，在保险期限内，寿险合同可能因死亡或退保这两种原因而终止。由于退保可能发生在死亡之前，因此因死亡而导致的寿险合同终止的概率会因退保的存在而减小；同样，死亡也可能发生在退保之前，从而因退保导致寿险合同终止的概率也会因死亡的存在而减小。在多元风险模型中，这些对导致状态终止的概率相互影响的风险称为竞争风险。在竞争风险的环境下，我们只能看到这些风险对状态的终止产生的总作用，而很难看到

某个终止原因的单独作用。例如，在员工保险计划中，由于退休、残疾和自愿解约的存在而不能直接知道死亡率有多大的影响。为了考虑各种风险的单独作用对存续函数${}_tp_x^{(\tau)}$和年终止概率$q_x^{(\tau)}$所造成的影响，我们就特定的风险定义单风险模型，称之为伴随单风险模型，它只依赖某个特定的风险（称为伴随风险）。

8.4.1 伴随单风险模型中的函数

在考虑第j个终止原因的单独作用时，终止力$\mu_x^{(j)}$是最基本的因素，在此基础上定义其他函数。定义

$$ {}_tp'^{(j)}_x = \exp\left[- \int_0^t \mu_{x+s}^{(j)} ds \right] \tag{8-32}$$

称为伴随单风险生存函数，它表示状态（x）在t时刻前不由第j个原因导致终止的概率。

在一元风险模型中，生存概率${}_tp_x$是一个生存函数，$\lim\limits_{t\to\infty} {}_tp_x = 0$。但在有$m$个终止原因的竞争风险环境中，对于某个特定的终止原因j，$\lim\limits_{t\to\infty} {}_tp'^{(j)}_x = 0$不一定成立。

因为，

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left[- \int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds \right] \\ &= \exp\left\{ - \int_0^t \left[\mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} + \cdots + \mu_{x+s}^{(m)} \right] ds \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{m} {}_tp'^{(j)}_x \end{aligned} \tag{8-33}$$

可见至少存在一个终止原因j，使得$\lim\limits_{t\to\infty} {}_tP'^{(j)}_x = 0$。

定义

$$ {}_tq'^{(j)}_x = 1 - {}_tp'^{(j)}_x \tag{8-34}$$

为独立终止率，它表示在没有其他原因的影响时，由第j个原因导致状态（x）在t时刻前终止的概率。“独立”一词反映了在确定${}_tq'^{(j)}_x$时只考虑原因j的作用而不考虑其他竞争原因的影响。为了区别由原因j先于其他原因导致状态（x）在t时刻前终止的概率${}_tq_x^{(j)}$，称${}_tq'^{(j)}_x$为终止率（rate），而不是终止概率（probability）。

由（8－32）式，有${}_tp'^{(j)}_x \geqslant {}_tp_x^{(\tau)}$，所以有

$$ {}_tp'^{(j)}_x \mu_{x+t}^{(j)} \geqslant {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} $$

上式两端从0到1积分便得

$$ q'^{(j)}_x = \int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x \mu_{x+t}^{(j)} dt \geqslant \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt = q_x^{(j)} $$

即第j种原因导致状态终止的概率会因其他原因的作用（先于原因j发

生）而减小。

此外，显然

$$q'^{(j)}_x = 1 - p'^{(j)}_x \leqslant 1 - p^{(\tau)}_x = q^{(\tau)}_x$$

这说明状态终止的概率会因为原因 j 之外的其他原因的作用而增大。

多元风险模型中有一个函数与其伴随单风险模型中相应的函数很相似，这就是中心终止率（central rate of decrement）。类似于第一章的定义，定义

$$m^{(\tau)}_x = \frac{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(\tau)}_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x dt} \tag{8-35}$$

为完全中心终止率，它是终止力 $\mu^{(\tau)}_{x+t}$ 在 x 到 $x+1$ 上的加权平均值；定义相应于原因 j 的中心终止率为

$$m^{(j)}_x = \frac{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x dt} \tag{8-36}$$

它是终止力 $\mu^{(j)}_{x+t}$ 在 x 到 $x+1$ 之间的加权平均值。显然

$$m^{(\tau)}_x = \sum_{j=1}^{m} m^{(j)}_x$$

在伴随单风险模型中，定义相应的中心终止率为

$$m'^{(j)}_x = \frac{\int_0^1 p'^{(j)}_x \mu^{(j)}_{x+1} dt}{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x dt} \tag{8-37}$$

它也是终止力 $\mu^{(j)}_{x+t}$ 在 x 到 $x+1$ 上的加权平均值，不过这里所用的权数是 ${}_tp'^{(j)}_x$ 而不是 ${}_tp^{(\tau)}_x$。

8.4.2 特殊假设下的独立终止率

假设相应于各终止原因的终止力在各年龄内均为常数，即

$$\mu^{(j)}_{x+t} = \mu^{(j)}_x，(0 \leqslant t < 1，j = 1，2，\cdots，m)$$

显然

$$\mu^{(\tau)}_{x+t} = \mu^{(\tau)}_x，(0 \leqslant t < 1)$$

从而

$$\begin{aligned} q^{(j)}_x &= \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(j)}_x dt \\ &= \frac{\mu^{(j)}_x}{\mu^{(\tau)}_x} \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(\tau)}_x dt \\ &= \frac{\mu^{(j)}}{\mu^{(\tau)}_x} q^{(\tau)}_x \end{aligned} \tag{8-38}$$

$$=\frac{\ln p'^{(j)}_x}{\ln p^{(\tau)}_x}q^{(\tau)}_x$$

$$q'^{(j)}_x=1-\left[1-q^{(\tau)}_x\right]^{q^{(j)}_x/q^{(\tau)}_x} \qquad (8-39)$$

需要指出，上式的推导中应假设 $p'^{(j)}_x$ 和 $p^{(\tau)}_x$ 都大于0.

现在假设在多元风险模型中，各种终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，即

$$_tq^{(j)}_x=t\cdot q^{(j)}_x,\ 0\leqslant t<1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

显然

$$_tq^{(\tau)}_x=t\cdot q^{(\tau)}_x,\ 0\leqslant t<1$$

由（8－11）式，

$$\mu^{(j)}_{x+t}=\frac{1}{_tp^{(\tau)}_x}\cdot\frac{d}{dt}{_tq^{(j)}_x}$$

$$=\frac{1}{1-t\cdot q^{(\tau)}_x}\cdot\frac{d}{dt}\left(t\cdot q^{(j)}_x\right)$$

$$=\frac{q^{(j)}_x}{1-t\cdot q^{(\tau)}_x}$$

从而

$$q'^{(j)}_x=1-\exp\left[-\int_0^1\mu^{(j)}_{x+t}dt\right]$$

$$=1-\exp\left[-\int_0^1\frac{q^{(j)}_x}{1-t\cdot q^{(\tau)}_x}dt\right]$$

$$=1-\exp\left[\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}\ln(1-q^{(\tau)}_x)\right]$$

$$=1-(1-q^{(\tau)}_x)^{q^{(j)}_x/q^{(\tau)}_x}$$

可见，在以上两种假设下，由终止概率得到的独立终止率是相同的。

由各年龄的独立终止率构成的数值表就称为伴随单风险表。

【例8－4】 根据例8－3所给 $q^{(1)}_x$ 和 $q^{(2)}_x$ 的值，利用（8－39）式计算相应的 $q'^{(1)}_x$ 和 $q'^{(2)}_x$ 的值。

解： 利用公式（8－39），可求得相应的 $q'^{(1)}_x$ 和 $q'^{(2)}_x$ 的值如表8－3。

表8－3　　$q'^{(1)}_x$ 和 $q'^{(2)}_x$ 数值表

x	$q^{(1)}_x$	$q^{(2)}_x$	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$
65	0.02	0.05	0.02052	0.05052
66	0.03	0.06	0.03095	0.06094
67	0.04	0.07	0.04149	0.07147
68	0.05	0.08	0.05215	0.08213
69	0.06	0.09	0.06294	0.09291
70	0.00	1.00	—	—

需要指出：虽然可以根据 $q_{70}^{(1)}$ 和 $q_{70}^{(2)}$ 求得 $q'^{(1)}_{70}$ 和 $q'^{(2)}_{70}$，但由于 70 岁为强制退休年龄，此时已无必要考虑 $q'^{(1)}_{70}$ 和 $q'^{(2)}_{70}$ 了。

8.4.3 特殊假设下的终止概率

上面讨论了如何由多元风险表在某些假设下构造伴随风险表的过程。在竞争风险的环境中进行统计，所获得的数据只能直接用于估计终止概率 $q_x^{(j)}$。如果想要了解各终止原因或某个终止原因的单独作用（如单纯的死亡率），就需要应用上一小节的方法。反过来，在有些情况下，也许只能获得伴随单风险模型的独立终止率 $q'^{(j)}_x$，$j=1, 2, \cdots, m$，当需要了解竞争风险环境中各种终止事件在一定时间内发生的概率时，就要通过伴随风险表构造多元风险表。为此首先给出适当的假设。

由上一节我们知道，如假设各终止力在各年龄内均为常数或多元风险模型中各终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，就可以得到（8－38）式。将（8－33）式代入（8－38）式，就得

$$q_x^{(j)} = \frac{\ln p'^{(j)}_x}{\ln \prod_{j=1}^{m} p'^{(j)}_x}\left[1 - \prod_{j=1}^{m} p'^{(j)}_x\right]$$

$$= \frac{\ln\left[1 - q'^{(j)}_x\right]}{\sum_{j=1}^{m} \ln\left[1 - q'^{(j)}_x\right]}\left[1 - \prod_{j=1}^{m}\left(1 - q'^{(j)}_x\right)\right] \qquad (8-40)$$

这就是在所述假设下由独立终止率计算终止概率的公式。

【例 8－5】 表 8－4 给出了伴随单风险表，其中原因 3 表示退休，退休可发生在 65 岁至 70 岁之间，70 岁为强制退休年龄。利用（8－40）式，根据表 8－4 中所给的独立终止率构造相应的多元风险表。

表 8－4 $q'^{(i)}_x$ 数值表

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
65	0.02	0.02	0.04
66	0.025	0.02	0.06
67	0.03	0.02	0.08
68	0.035	0.02	0.1
69	0.04	0.02	0.12

解： 把（8－33）式改写成

$$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q'^{(j)}_x\right)$$

可求得对应于各年龄的 $q_x^{(\tau)}$。由（8－40）式可分别求得对应于各年龄的 $q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$ 和 $q_x^{(3)}$；因为 70 岁为强制退休年龄，所以 $q_{70}^{(\tau)} = q_{70}^{(3)} = 1$，$q_{70}^{(1)} = q_{70}^{(2)} = 0$。所

得数据列于表 8-5，即为所求的多元风险表。

表 8-5　　$q_x^{(i)}$ 数值表

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0.07802	0.0194	0.0194	0.03921
66	0.10183	0.02401	0.01916	0.05867
67	0.12545	0.02851	0.01891	0.07803
68	0.14887	0.0329	0.01866	0.09731
69	0.1721	0.0372	0.01841	0.11649
70	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000

表中数据可以用 $q_x^{(1)}+q_x^{(2)}+q_x^{(3)}=q_x^{(\tau)}$ 进行检验是否有误，但可能存在舍入误差。

需要注意的是，在（8-40）式中要求 $p'^{(j)}_x\neq 0$，$j=1$，2，…，m。当某个 $q'^{(1)}_x$ 或 $p_x^{(\tau)}=0$ 时，需要考虑其他方法。处理这种问题的一个方法是：在各伴随单风险模型中，假设终止事件在各年龄内服从均匀分布，代替假设在多元风险模型中各终止事件在各年龄内服从均匀分布。此时

$$ {}_tq'^{(j)}_x=t\cdot q'^{(j)}_x,\ 0\leqslant t<1,\ j=1,\ 2\cdots,\ m $$

从而

$$ {}_tp'^{(j)}_x\,\mu^{(j)}_{x+t}=\frac{d}{dt}{}_tq'^{(j)}_x $$

$$ =\frac{d}{dt}\left(t\cdot q'^{(j)}_x\right) $$

$$ =q'^{(j)}_x $$

$$ q_x^{(j)}=\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu^{(j)}_{x+t}dt $$

$$ =\int_0^1\prod_{i=1}^m {}_tp'^{(i)}_x\frac{q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x}dt $$

$$ =\int_0^1 q'^{(j)}_x\sum_{i\neq j}{}_tp'^{(i)}_x dt $$

$$ =q'^{(j)}_x\int_0^1\prod_{i\neq j}\left(1-t\cdot q'^{(i)}_x\right)dt \qquad (8-41) $$

上式中被积函数是一个关于 t 的多项式，可以直接进行积分运算，但在 m 较大时计算比较复杂。

【例 8-6】　在例 8-5 所给的伴随风险表中，假定各终止事件在各年龄内的发生均服从均匀分布，利用（8-41）式构造多元风险表。

解： $q_x^{(\tau)}$ 的值已由例 8-5 给出。由（8-41）式，可得

$$ q_x^{(1)}=q'^{(1)}_x\int_0^1\left(1-tq'^{(2)}_x\right)\left(1-tq'^{(3)}_x\right)dt $$

$$= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}(q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x) + \frac{1}{3}q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x\right]$$

同样，对于 $q_x^{(2)}$ 和 $q_x^{(3)}$ 可类似处理。所得结论列于表 8 -6 中。

表 8 -6　　$q_x^{(i)}$ 数值表

x	$q_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
65	0. 07802	0. 01941	0. 01941	0. 03921
66	0. 10183	0. 02401	0. 01916	0. 05866
67	0. 12545	0. 02852	0. 01892	0. 07802
68	0. 14887	0. 03292	0. 01867	0. 09727
69	0. 17210	0. 03723	0. 01843	0. 11643

表 8 -6 中终止概率的值与例 8 -5 中给出的值很接近（见表 8 -5）。表 8 -6 中数值也可用 $q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)}$ 来检验。

在例 8 -5 和例 8 -6 中，$q_x^{(\tau)}$ 的值与假设无关，不同的假设只是导致终止概率 $q_x^{(\tau)}$ 在与各种原因相应的终止概率 $q_x^{(1)}$、$q_x^{(2)}$、$q_x^{(3)}$ 之间的分配不同。

【例 8 -7】 考虑具有三个终止原因的情形。假设死亡和残疾在各自的伴随单风险模型中在各年龄内服从均匀分布，相应的独立终止率分别为 $q'^{(1)}_x$ 和 $q'^{(2)}_x$。（1）如假设解约只发生在年末，独立终止率 $q'^{(3)}_x$，求在年龄 x 至 $x+1$ 岁间相应于三个终止原因的终止概率；（2）如假设解约以相同的概率$q'^{(3)}_x/2$分别发生在年中（$x+0.5$）和年末，求三个终止原因的终止概率。

解：（1）$q_x^{(\tau)}$ 在 $t=1$ 处间断。这是因为 $\lim\limits_{t\to 1} {}_tp'^{(3)}_x = 1$ 和 $p'^{(3)}_x = 1 - q'^{(3)}_x$。由 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x \, {}_tp'^{(3)}_x$，可得

$$\lim_{t\to 1^-} {}_tp_x^{(\tau)} = p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x$$

$$p_x^{(\tau)} = p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x (1 - q'^{(3)}_x)$$

因此

$$q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x (1 - q'^{(3)}_x)$$

另外，

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt \\ &= \int_0^1 {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x \, \mu_{x+t}^{(1)} dt \\ &= q'^{(1)}_x \int_0^1 (1 - t \cdot q'^{(2)}_x)\ dt \\ &= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(2)}_x\right] \end{aligned}$$

类似地有

$$q_x^{(2)} = q'^{(2)}_x \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(1)}_x\right]$$

最后

$$\begin{aligned} q_x^{(3)} &= q_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\ &= 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}) - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} \end{aligned}$$

因为

$$1 - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)}$$

所以

$$q_x^{(3)} = p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} q_x'^{(3)}$$

由于

$$\lim_{t \to 1^-} {}_t p_x^{(\tau)} - p_x^{(\tau)} = q_x^{(3)}$$

所以${}_t p_x^{(\tau)}$ 在 $t=1$ 处的跃度等于 $q_x^{(3)}$。

（2）由假设可知${}_t p_x^{(\tau)}$ 在 $t=\frac{1}{2}$和 $t=1$ 处间断。因此考虑积分区间［0，0.5）和［0.5，1）。

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= q_x'^{(1)} \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - t q_x'^{(2)}] dt + q_x'^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2} q_x'^{(3)}\right] \int_{\frac{1}{2}}^{1} [1 - t q_x'^{(2)}] dt \\ &= q_x'^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(2)} q_x'^{(3)}\right] \end{aligned}$$

类似地有

$$q_x^{(2)} = q_x'^{(2)} \left[1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)} - \frac{1}{4} q_x'^{(3)} + \frac{3}{16} q_x'^{(1)} q_x'^{(3)}\right]$$

$$\begin{aligned} q_x^{(3)} &= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \\ &= 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} (1 - q_x'^{(3)}) - q_x^{(1)} - q_x^{(2)} \end{aligned}$$

化简得到

$$q_x^{(3)} = q_x'^{(3)} \left[1 - \frac{3}{4} q_x'^{(1)} - \frac{3}{4} q_x'^{(2)} + \frac{5}{8} q_x'^{(1)} q_x'^{(2)}\right]$$

8.4.4　近似计算

无论是用（8－39）式计算 $q_x'^{(j)}$，还是用（8－40）式或（8－41）式计算 $q_x^{(j)}$，都涉及较复杂的运算。因此在允许的误差范围内，有必要应用近似方法简化计算。

首先注意到，当相应于各终止原因的终止力在各年龄内均为常数时，

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = \mu_x^{(j)}$$

同样也有

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x'^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x'^{(j)} dt} = \mu_x^{(j)}$$

因此，$m_x^{(j)}=m_x'^{(j)}$。在一般情况下，假设 $m_x^{(j)}\approx m_x'^{(j)}$。

另外，在各伴随风险模型中，假设各终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，那么

$$m_x'^{(j)}=\frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(\tau)}\mu_x^{(j)}dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}dt}=\frac{q_x'^{(j)}}{\int_0^1(1-tq_x'^{(j)})dt}=\frac{q_x'^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x'^{(j)}}$$

此时，一般地 $m_x^{(j)}\neq m_x'^{(j)}$。但如果只求近似值，由下述近似等式

$$\frac{q_x^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}\approx\frac{q_x'^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x'^{(\tau)}}$$

分别解 $q_x'^{(j)}$ 和 $q_x^{(j)}$，得到

$$q_x'^{(j)}\approx\frac{q_x^{(j)}}{1-\frac{1}{2}\left(q_x^{(\tau)}-q_x^{(j)}\right)}\tag{8-42}$$

$$q_x^{(j)}\approx\frac{q_x'^{(j)}\left[1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}\right]}{1-\frac{1}{2}q_x'^{(j)}}\tag{8-43}$$

与（8－41）式相比，近似计算（8－42）式和（8－43）式只涉及简单的四则运算。

§8.5 趸缴净保费

在人身保险中，当需要根据被保险人终止保险的原因来确定给付金额时，就要用到多元风险模型。

用 $B_{x+t}^{(j)}$表示在年龄 $x+t$ 岁时因原因 j 终止保险所对应的给付金额，在状态终止时支付，以 $\bar{A}$ 表示趸缴净保费。可以用两种方法对趸缴净保费进行推导。

第一种方法：相应于终止事件 j 的保险给付的精算现值为

$$\int_0^\infty B_{x+1}^{(j)}v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt,\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

所有这些精算现值的和即为趸缴净保费，因此，

$$\bar{A}=\sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty B_{x+t}^{(j)}v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt\tag{8-44}$$

第二种方法：构造损失变量

$$L=B_{x+T}^{(j)}v^T-\bar{A},\quad (T>0,J=1,2,\cdots,m)$$

根据精算等价原理，即 $E[L]=0$，即得

$$\bar{A}=E[B_{x+T}^{(J)}v^T]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

寿险保单有时附有加倍补偿条款：如死亡是由意外事故造成的，那么给付额加倍。在这种情形下，令 $J=1$ 表示意外事故原因，$J=2$ 表示其他所有原因，取 $B_{x+t}^{(1)}=2$，$B_{x+t}^{(2)}=1$，那么单位保额的 n 年定期寿险的趸缴净保费为

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(1)} dt + \int_0^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(2)} dt \tag{8-45}$$

为使计算简便，把积分化为求和。考虑（8-45）式中的第一个积分，先把它分解成各年的积分之和，即

$$\int_0^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(1)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \ \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

如果假设多元风险模型中每个终止事件在各年龄内服从均匀分布，那么

$$\int_0^n v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(1)} dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(1)} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds$$

$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)}$$

同理，（8-45）式中第二个积分也可类似地表示为求和形式。两者合并，即得

$$\bar{A} = \frac{i}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} (2q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)})\right]$$

$$= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(1)} + \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+t}^{(\tau)}$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1(1)} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} \tag{8-46}$$

其中 $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1(1)}$ 是给付额为 1 个单位的 n 年意外事故死亡保险的趸缴净保费，$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}$ 是给付额为 1 个单位的 n 年死亡保险（不区分死亡原因）的趸缴净保费。在计算 $\bar{A}$ 时，${}_kp_x^{(\tau)}$ 可看作生命表中的生存函数，如能获得 $q_{x+k}^{(1)}$ 的值，则无须构造整个二元风险表。

上面所讨论的是一种简单的情形，给付额不随终止的年龄而变化。特别地，在每一年龄内没有变化。对更复杂的情况，考虑有两个终止原因的多元风险模型。为简便起见，我们取 $B_{x+t}^{(1)}=t$，$B_{x+t}^{(2)}=0$，$(t>0)$。此时

$$\bar{A} = \int_0^\infty t v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_{x+t}^{(1)} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s) v^s \ {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \ \mu_{x+k+s}^{(1)} ds$$

进一步，假设多元风险模型中的终止事件在各年龄内服从均匀分布，那么

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s} ds$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta}\left(k+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i}\right) \tag{8-47}$$

其中

$$k+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{i} \approx k+\frac{1}{2}$$

可看作第 $k+1$ 年的平均给付额，而i/δ可看作以立即给付代替年末给付所需的调整因子。近似地，可以把所有给付都看成是在年中 $k+\frac{1}{2}$时发生，给付额都为 $k+\frac{1}{2}$，那么有

$$\bar{A} \approx \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\frac{1}{2}} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \left(k+\frac{1}{2}\right) \tag{8-48}$$

一般地，由（8－48）式求出的近似值与精确值很接近。

（8－48）式也可在（8－47）式中对积分

$$\int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s} ds$$

应用中值原理估计得到。当 $B_{x+t}^{(j)}$是一个复杂的形式时，这种近似方法被普遍应用。例如，对（8－44）式中第 j 个积分应用均匀分布假设时，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+k+s}^{(j)} (1+i)^{1-s} ds$$

再应用中值原理估计，可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\frac{1}{2}} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+k+\frac{1}{2}}^{(j)}$$

它可以作为一个估计式。

【例 8－8】 某保单为 x 岁的人在 r 岁以前提供金额为 $2B$ 的意外事故死亡给付和金额为 B 的其他原因死亡给付；在 r 岁以后，对任何原因造成的死亡均提供金额为 B 的给付。求该保单的趸缴净保费的表达式。

解： 令 $J=1$ 表示意外事故，$J=2$ 表示其他原因。

第一种方法：意外事故死亡的精算现值为

$$\int_0^{\infty} Bv^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt$$

其他原因死亡给付的精算现值为

$$\int_0^{\infty} Bv^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(2)} dt$$

趸缴净保费为以上两式之和，即

$$\int_0^{\infty} Bv^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt + \int_0^{r-x} Bv^t {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt$$

第二种方法：令损失变量

$$L=\begin{cases}2Bv^T-\bar{A}, & J=1,\ 0<T<r-x\\ Bv^T-\bar{A}, & J=1,\ T\geqslant r-x\\ Bv^T-\bar{A}, & J=2,\ T>0\end{cases}$$

由等价原理 $E[L]=0$，最后得到

$$\bar{A}=\int_0^{\infty}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_{x+t}^{(\tau)}dt+\int_0^{r-x}Bv^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_{x+t}^{(1)}dt$$

本章仅简单介绍了多元风险模型在精算学中的应用，较复杂的情况将在下一章讨论。

习　题

1. 设 $\mu_{x+t}^{(j)}=\mu_x^{(j)}$，$(j=1,2,\cdots,m,t\geqslant 0)$，求以下函数的表达式：

(1) $f(t,j)$；(2) $h(j)$；(3) $g(t)$

并证明 T 与 J 是相互独立的随机变量。

2. 一个三元风险模型，终止力分别为 $\mu_x^{(1)}$，$\mu_x^{(2)}$，$\mu_x^{(3)}$。如果 $\mu_x^{(k)}=\dfrac{3}{11k\ (100-k)}$，$k=1,2,3$。求 10 岁的人活到 60 岁的概率。

3. 一个两年制学院，学生离开学校有如下因素及概率：

年　级	开　除	其他原因
1	0.10	0.30
2	0.05	0.20

(1) 如最终有 180 名毕业生，求初始学生数；

(2) 如每年初报到学生之和为 800 人，求初始学生数。

4. 有两个终止原因的多元风险模型终止力如下：$\mu_{x+t}^{(1)}=\dfrac{1}{100-(x+t)}$，$t<100-x$，$\mu_{x+t}^{(2)}=\dfrac{2}{100-(x+t)}$，$(t<100-x)$。设 $x=50$，求以下函数的表达式：

(1) $f(t,j)$；(2) $g(t)$；(3) $h(j)$；(4) $h(j|t)$

5. 在双风险模型中，如 $\mu_{x+t}^{(1)}=\left(\dfrac{r_1}{c}\right)\cdot t,(t\geqslant 0)$，$\mu_{x+t}^{(2)}=\left(\dfrac{r_2}{c}\right)\cdot t$，$(t\geqslant 0)$，其中 r_1、r_2 和 c 均为大于 0 的常数，求 $h(1)$。

6. 在 m 元风险模型中，如 $\mu_{x+t}^{(j)}=\dfrac{j}{m+1}\cdot\dfrac{1}{100-x-t}$，$j=1,2,3,\cdots,m$；$t<100-x$，求以下各函数：

(1) ${}_tp_x^{(\tau)}$；(2) $f(t,j)$；(3) $g(t)$；(4) $h(3|T=5)$

7. 在三元风险模型中，给定 $\mu_x^{(j)}=0.2j$，$(j=1, 2, 3)$，求 $q_x^{(2)}$。

8. 对双风险模型，已知 $\mu_x^{(1)}=\mu_x^{(2)}=0.3$，求 $q_x^{(1)}$。

9. 已知 (1) $\mu_x^{(1)}=\dfrac{1}{100-x}$；(2) $\mu_x^{(2)}=1$；(3) $l_0^{(\tau)}=1\ 000$，求 $d_x^{(2)}$。

10. 对一个三元风险模型，已知：

(1) $q_{50}^{(1)}=q_{50}^{(3)}$；(2) $q_{50}^{(2)}=2q_{50}^{(1)}$；(3) $\mu_{50+t}^{(1)}=\ln 2$，$(0<t<1)$。

假设每年内相应于各终止原因的终止力为常数。计算 $1\ 000q'^{(2)}_{50}$。

11. 根据例 8.3.1 中的多元风险表，用两种方法计算：

(1) ${}_3p_{65}^{(\tau)}$；(2) ${}_{3|1}p_{65}^{(1)}$；(3) ${}_3p_{65}^{(2)}$。

12. 对参加精算师考试的学生，可建立一个双风险模型如下：

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
21	0.008	0.15
22	0.015	0.20
23	0.025	0.25

其中 $q_x^{(1)}$ 表示因获得精算师资格而终止考试的概率，$q_x^{(2)}$ 表示因其他所有原因而终止考试的概率。设死力为常数 $\mu=0.04$。求现年 21 岁的学生在 3 年之后仍生存并已获得精算师资格的概率。

13. 给定 $\mu_x^{(1)}=\dfrac{1}{a-x}$，$0\leqslant x<a$，$\mu_x^{(2)}=1$。设 $l_x^{(\tau)}=a$，求：

(1) $l_x^{(\tau)}$；(2) $d_x^{(1)}$；(3) $d_x^{(2)}$

14. 对双风险模型，如 $l_{30}^{(\tau)}=1\ 000$；(2) $q'^{(1)}_{30}=0.10$；(3) $q'^{(2)}_{30}=0.30$；(4) ${}_{1|}q_{30}^{(1)}=0.075$；(5) $l_{32}^{(\tau)}=472$。计算 $q_{31}^{(2)}$。

15. 已知 $\mu_{x+t}^{(1)}=c$，$0\leqslant t<1$，求 $q'^{(1)}_x$。

16. 对双风险模型，如 (1) $q_{71}^{(1)}=0.02$；(2) $q_{71}^{(2)}=0.06$；(3) 在双风险模型中，各种终止事件的发生在每年内服从均匀分布。计算 $1\ 000q'^{(1)}_{71}$。

17. 给定 $\mu_x^{(1)}=\dfrac{2x}{a-x^2}$，$0\leqslant x<\sqrt{a}$，$\mu_x^{(2)}=c$，$c>0$。设 $l_0^{(\tau)}=1\ 000$，求 $l_x^{(\tau)}$。

18. 求下列导数：

(1) $\dfrac{d}{ds}{}_tp_x^{(\tau)}$；(2) $\dfrac{d}{dx}{}_tq_x^{(j)}$；(3) $\dfrac{d}{dt}{}_tq_x^{(j)}$

19. 如对 $0\leqslant t<1$，$\mu_{x+t}^{(1)}=c$，用 c 和 ${}_tP_x^{(\tau)}$ 表示下面各量：

(1) $q'^{(1)}_x$；(2) $m_x^{(1)}$；(3) $q_x^{(1)}$

20. 对于一个多元风险模型，如 (1) ${}_tp_x^{(\tau)}=1-0.03t$，$0\leqslant t\leqslant 1$；(2) $\mu_{x+t}^{(1)}=0.02t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，计算 $m_x^{(1)}$。

21. 对双风险模型，给定 $q'^{(1)}_{40}=0.02$ 和 $q'^{(2)}_{40}=0.04$，计算 $q_{40}^{(\tau)}$。

22. 对双风险模型，给定 $m_{40}^{(\tau)}=0.2$ 和 $q'^{(2)}_{40}=0.1$，分别在以下假设下，计算 $q'^{(1)}_{40}$。

（1）在双风险模型中，各终止事件的发生在每年内服从均匀分布；

（2）在伴随单风险模型中，各终止事件的发生在每年内服从均匀分布。

23. 给出三个终止原因，1 为死亡，2 为残疾，3 为退休。根据下面所给的独立终止率，应用（8－40）式构造多元风险表。

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
62	0.020	0.030	0.200
63	0.022	0.034	0.100
64	0.028	0.040	0.120

24. 根据上题中的独立终止率，应用（8－43）式构造多元风险表。

25. 在适当的均匀分布假设下，分别利用例 8－3 和例 8－4 中 $q_x^{(j)}$ 和 $q'^{(j)}_x$ 的各值计算 $m_x^{(j)}$ 和 $m'^{(j)}_x$ 的值，其中 $j=1$，2；$x=65$，…，69。

26. 对多元风险模型，如（1）终止因素为死亡、残疾和退保，并分别用 1、2 和 3 表示；（2）$q'^{(1)}_{60}=0.01$，$q'^{(2)}_{60}=0.05$，$q'^{(3)}_{60}=0.10$；（3）死亡和残疾在伴随单风险模型中在每一年内服从均匀分布；（4）退保仅发生在年末。计算 $q_{60}^{(3)}$。

27. 以下数据摘自某个三元风险表，求 $l_{63}^{(\tau)}$。

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$q_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
60	0.010	0.050	0.020	—	1 000	—	—	—
61	—	—	—	0.076	—	—	—	—
62	—	—	—	—	—	0.023	0.033	0.01
63	—	—	—	0.098	—	—	—	—

28. 给出下列各种终止率，怎样构造多元风险表？

（1）$q'^{(1)}_x$，$q'^{(2)}_x$，$q_x^{(3)}$；（2）$q'^{(1)}_x$，$q_x^{(2)}$，$q_x^{(3)}$

29. 在双风险表中，原因 1 为死亡，原因 2 为解约。假设：

（1）在年龄 n 到 $n+1$ 之间死亡的发生服从均匀分布；

（2）在年龄 n 到 $n+1$ 之间解约的发生只在刚达到年龄 n 时；

（3）$l_{50}^{(\tau)}=1\ 000$，$q_{50}^{(2)}=0.2$，$d_{50}^{(1)}=0.06d_{50}^{(2)}$。求 $q'^{(1)}_{50}$。

30. 某双风险模型中的两种风险分别为意外死亡和其他因素。考虑关于 (x) 因意外死亡支付为 2、其他原因死亡支付为 1 的完全连续型终身寿险，$\mu_{x+t}^{(1)}=\delta$，$\mu_{x+t}^{(2)}=2\delta$。设保额在死亡时刻支付，计算该保险的趸缴净保费。

31. 关于 (x) 的终身寿险，保额为 1 万元。假设 (1) $\delta=0.06$；(2) 死亡给付在死亡发生时支付；(3) 前 30 年内意外死亡的给付加倍；(4) $\mu_x^{(\tau)}(t)=0.008$，$t\geqslant 0$；(5) $\mu_x^{(1)}(t)=0.001$，$t\geqslant 0$，其中 $\mu_x^{(1)}$ 为意外死亡的死力。计算趸缴净保费。

32. 一份附有加倍补偿条款的终身寿险在 (x) 死亡时立刻给付 1 个单位。如 (x) 死于意外事故，那么给付 2 个单位，其趸缴净保费为 S。一份附有三倍补偿条款的终身寿险在 (x) 死于意外事故时给付 3 个单位，其趸缴净保费为 T。如意外事故死亡的死力为常数 μ，其他原因死亡的死力为 5μ，求 $T-S$。

33. 关于 (x) 的终身寿险保单，第一年内的基本死亡给付为 1 万元，以后各年为 2 万元。附加条款规定，当死于意外事故时增加给付 2 万元。假设：

(1) 意外事故死亡的死力为 $\mu_{x+t}^{(1)}=0.005$，$t\geqslant 0$；

(2) $\mu_{x+t}^{(\tau)}=0.040$，$t\geqslant 0$；

(3) $\delta=0.06$

求该保单的趸缴净保费。

34. 在多元风险模型中，假设各终止事件的发生在各年龄内服从均匀分布，证明

$$\mu_{x+0.5}^{(j)}=m_x^{(j)}$$

35. 在例 8－6 中假设第三种独立终止事件的发生在 69 岁不服从均匀分布，但满足

$$ {}_tp'^{(3)}_{69}=\begin{cases}1-0.12t, & 0<t<1\\ 0, & t=1\end{cases}$$

即在该年内第三种独立终止率为 0.12，然后恰在 70 岁前，所有存续者都因第三种原因而终止。这等价于假设 $q'^{(3)}_{69}=1$。求 $q_{69}^{(3)}$。

36. 以下哪些式子是对的？如不对，如何修正？

(1) $q_{30}^{(j)}\approx\dfrac{m_x^{(j)}}{1+\dfrac{1}{2}m_x^{(j)}}$；

(2) $\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}dt\approx\frac{l_x^{(\tau)}}{1+\dfrac{1}{2}m_x^{(\tau)}}$；

(3) 在双风险表中，假设在每个伴随单风险表中，终止事件的发生均在年龄 x 到 $x+1$ 之间服从均匀分布，那么 $q_x^{(1)}=q'^{(1)}_x\left(1-\dfrac{1}{2}q'^{(2)}_x\right)$。

37. 在某个确定的年龄 x、特定的终止原因 j 及常数 K_j，证明下列条件是等价的。

（1）$_tq_x^{(j)} = K_j \cdot {}_tq_x^{(\tau)}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$；

（2）$\mu_{x+t}^{(j)} = K_j \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$；

（3）$1 - {}_tq'^{(j)}_x = [1 - {}_tq_x^{(\tau)}]^{K_j}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$。

38. 在多元风险表中，假设

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}，0 \leqslant t \leqslant 1；j = 1，2，\cdots，m$$

或

$$_tq_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(j)}，0 \leqslant t \leqslant 1；j = 1，2，\cdots，m$$

证明：

$$_tq_x^{(j)} = K_j \cdot {}_tq_x^{(\tau)}，0 \leqslant t \leqslant 1；j = 1，2，\cdots，m$$

其中 K_j 是一个与 t 无关的常数。

第九章　养老金计划的精算方法

学习目标

- □ 了解养老金计划中确定给付计划和确定缴费计划等基本概念
- □ 熟悉养老金计划的基本函数，包括基于多元风险模型的概率和薪金函数等
- □ 熟悉年老退休给付、捐纳金、残疾退休给付和解约给付的精算现值的计算方法

§9.1　养老金计划及其基本函数

9.1.1　养老金计划简介

退休员工的生活保障是现代社会需要解决的一个重要问题，政府的努力大都只限于通过各种形式的社会保险提供最低的生活保障。作为对社会保险的补充，政府可以通过税收上的优惠，鼓励企业为其员工建立养老金计划，其目的是通过企业与员工的定期供款以信托或保险的形式建立养老基金，使员工在退休后能获得年金收入，以达到适当的生活水平。为了区别于社会保险中的退休保障，上述养老金计划也称为私人养老金计划。本章仅讨论私人养老金计划，以下均简称养老金计划。

养老金计划可以由企业单独为其员工设立，也可由行业协会为各所属企业的员工共同设立。通常，养老金计划的基本保障是：为有一定工作年限并达到一定年龄的员工提供一个退休年金；此外，有些养老金计划还提供附加保障，例如因残疾而退休的年金给付、退出养老金计划时所积累供款的退还或提供延期年金、在工作期间死亡时为受益人提供一笔现金给付或年金给付等。以下我们把用于支付养老金给付的定期供款称为捐纳金（contribution，而不像在人寿保险中那样称为保费）。养老金成本可能全由企业负担而员工无须缴付捐纳金，这种养老金计划称为非捐纳计划；如养老金成本的一部分由加入计划的员工负担，剩余部分由企业负担，那么这种养老金计划称为捐纳计划。

根据退休年金年给付额的不同决定方法，养老金计划可分为两大类：确定给付计划（defined benefit plan，简称 DB 计划）和确定缴费计划（defined contribution plan，简称 DC 计划）。在确定给付计划中，先由某个计算

公式确定未来的年给付额，再根据死亡率、解约率、年薪增长率、投资回报率和费用等确定捐纳金水平。从精算的观点来看，养老金计划可看成用工作期间的捐纳金购买退休时开始给付的延期生存年金和一定的附加给付。给付与捐纳金在精算现值上应相等，这种收入与支出的平衡可以建立在个人的基础上，但更多的是建立在计划加入者团体的基础上。达成这种平衡的方法是养老金筹资理论（类似于寿险的定价原理）的研究内容。本章将对单个计划加入者的捐纳金和给付分别计算其精算现值，团体的精算现值可通过对所有计划加入者求和而得到。

9.1.2　基本函数

养老金计划是多元风险理论在精算学中的一个重要应用。捐纳金与退休收入的精算现值的计算以养老金计划加入者对应的多元风险表为基础。该表在工作期间的各年内包含以下概率：解约概率、死亡概率、因残疾而退休的概率、因年老而退休的概率等。从 x 岁到 $x+1$ 岁上述概率分别记为 $q_x^{(w)}$、$q_x^{(d)}$、$q_x^{(i)}$ 和 $q_x^{(r)}$。这些符号与上一章的符号的含义是一致的。此外，我们也会用到上一章中的存续函数 $l_x^{(\tau)}$。我们有

$$l_{x+1}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}\left[1-\left(q_x^{(w)}+q_x^{(d)}+q_x^{(i)}+q_x^{(r)}\right)\right]$$
$$=l_x^{(\tau)}p_x^{(\tau)}$$

其中，${}_kp_x^{(\tau)}$ 与存续函数的关系如下

$${}_kp_x^{(\tau)}=\frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

另外，${}_kp_x^{(\tau)}$ 可递推计算如下

$${}_kp_x^{(\tau)}={}_{k-1}p_x^{(\tau)}p_{x+k-1}^{(\tau)}$$

对应于这种多元风险表的终止力在大多数年龄上是连续的，分别记为 $\mu_x^{(w)}$，$\mu_x^{(d)}$，$\mu_x^{(i)}$ 和 $\mu_x^{(r)}$。但在某些年龄上终止力可能出现间断，主要是最低退休年龄 a 和限定退休年龄 ω。所有达到年龄 ω 的加入者都在这个年龄退休，因此理论上可以假设 $l_\omega^{(\tau)}=0$，但有时假设 $l_\omega^{(\tau)}\neq 0$ 会更适合。对一般的年龄，假设终止事件分布在各个年龄内。

在加入养老金计划的最初几个年度，解约率通常较高，解约给付可能仅是加入者的捐纳金，可能还包含积累的利息。经过一段时间（例如 5 年）以后，解约率降低，解约者可能会获得延期年金。如果解约率的变化如上所述，那么有必要在适当的年度上使用选择解约率。同样，因残疾而退休的情形也可能需要在最初几个年度使用选择残疾率。因此，如果使用选择多元风险表，本章的理论将更为适用。但无论使用选择表还是非选择表，计算原理是相同的。因此，在本章中，我们只把加入计划时的年龄记为 x，而不指明是否为选择表。

本章末给出了一个养老金函数表例表（表9－1），表中的加入计划年龄为30岁，最低退休年龄为$\alpha=60$岁，限定退休年龄为$\omega=71$岁，这里$l_{71}^{(\tau)}=0$。

一般来说，因残疾而退休的员工其后各年的死亡率与正常退休者也往往不同。为了计算退休金的精算现值，有必要对因残疾退休和因正常退休这两种情形采用不同的生命表。对于前一种情形，在$x+t$岁时的年金精算现值因子记为$\bar{a}_{x+t}^{i}$；对后一种情形，在$x+t$岁时的年金精算现值因子记为$\bar{a}_{x+t}^{r}$。为方便计，假设$x+t$岁时的年金为连续给付年金，它可作为通常的按月给付的年金的近似值。

某些养老金计划给付额的确定不依赖于工资收入，但另一些养老金计划的给付额依赖于工资收入，它们或由最后几年的平均工资收入来确定，或由整个工作期间的平均工资收入来确定。而且，参与养老金计划的员工的捐纳金经常表示为工资的某个百分数。因此，预测未来的工资收入是很重要的。为此，定义如下的年薪函数：

（1）对于x岁加入养老金计划而当前为$x+h$岁的参加者，实际年薪记为$(AS)_{x+h}$，在$x+h+t$岁的预期年薪记为$(ES)_{x+h+t}$；

（2）假设存在某个年薪比例函数S_y，使得

$$(ES)_{x+h+t}=(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} \tag{9-1}$$

其中S_y既反映年薪随业绩与资历的增长而增长，也反映年薪随物价上涨而增长。例如，在本章末的例表中，$S_y=s_y\times(1.06)^{y-30}$，这里因子$s_y$表示年薪随个人的业绩与资历而增长的过程，而6%这个积累因素表示通货膨胀的长期影响所导致的年薪增长率。与存续函数$l_x^{(\tau)}$类似，S_y的初始值也可以任意选定。在本章末的例表中，取$S_{30}=1$。通常假设函数S_y为分段函数，在每个给定年龄的一年内为常数。

在计算养老金计划的给付和相应捐纳金的精算现值的过程中，多元风险模型、年薪比例函数、关于投资回报率的假设、以及有关残疾退休和正常退休的适当的年金精算现值因子都是必要的。下面各节将讨论对养老金计划的捐纳金和各种类型的给付进行估值的基本公式。

§9.2 捐纳金的精算现值

在养老金计划中，捐纳金通常有两种缴纳方式：一种是每个加入者都按统一数额缴纳，另一种是每个加入者都按薪金的统一百分比缴纳。下面我们将对现年$x+t$岁的加入者分别就这两种形式的捐纳金，计算精算现值。

假设捐纳金以连续形式缴纳，每年缴纳的总额为 c，这时现年 $x+h$ 岁的加入者未来捐纳金的精算现值为

$$c\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}dt = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s\ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}ds \qquad (9-2)$$

对上式右边每个积分都使用均值定理，得到

$$c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}v^{\frac{1}{2}}\ {}_{\frac{1}{2}}p_{x+h+k}^{(\tau)} \approx c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)} \qquad (9-3)$$

（9.2.2）式右边也可由假设每一年的捐纳金均在年中缴纳而直接推出，它可作为未来捐纳金的精算现值近似计算公式。

如捐纳金表示为年薪的某个固定百分比 c，加入者现在的年薪为 $(AS)_{x+h}$，那么未来捐纳金的精算现值可表示为

$$c\ (AS)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t\ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}dt \qquad (9-4)$$

如果 S_y 在每一年内均为常数，类似于（9.2.2）式，对上式应用均值定理，得到

$$\frac{c\ (AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{x+h}^{(\tau)}S_{x+h+k} \qquad (9-5)$$

在以下的简单情形中，（9－3）式和（9－4）式可用于计算未来捐纳金的精算现值。

【例9－1】 给定实际年利率6%，$\omega=71$，对现年为50岁的养老金计划加入者，在下列各种情形下求未来捐纳金精算现值的近似计算公式：

（1）每年的捐纳金均为1 200元

（2）第一年为1 200元，以后每年增加100元

（3）第一年为1 200元，以后每年均比上一年增加4%

解：（1）利用（9－3）式，得到捐纳金精算现值近似公式为

$$1\ 200\sum_{k=0}^{20}\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

（2）此时 $c_k=1\ 200+100k$，$k=0, 1, 2, \cdots, 20$，捐纳金精算现值的近似公式为

$$\sum_{k=0}^{20} c_k v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)} = 100\sum_{k=0}^{20}(12+k)\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

（3）此时 $c_k=1\ 200\ (1.04)^k$，捐纳金精算现值的近似公式为

$$\sum_{k=0}^{20} c_k v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)} = 1\ 200\sum_{k=0}^{20}(1.04)^k\left(\frac{1}{1.06}\right)^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

$$=\frac{1\ 200}{(1.06)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{20}\left(\frac{1.04}{1.06}\right)^k\ {}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

【例9－2】 在超收入型养老基金计划中，养老金的给付额与捐纳金均根据超过一定收入水平的那部分年薪来确定，各年的标准收入水平记为

H_0，H_1，H_2，…，H_k，…。这里 H_k 表示第 $k+1$ 年的标准收入水平。设 $\omega=71$，捐纳金为未来超额薪金的 5%，对现年 50 岁、年薪为 30 000 元的雇员，求未来捐纳金的精算现值。这里假设 $30\ 000>H_0$，而且未来的年薪均高于标准收入水平 H_k，$k=0,1,2,\cdots$。

解：未来各年的捐纳金预计为

$$0.05\left[30\ 000\frac{S_{50+k}}{S_{50}}-H_k\right],\quad k=0,1,2,\cdots$$

因此捐纳金的精算现值为

$$0.05\sum_{k=0}^{20}\left[30\ 000\frac{S_{50+k}}{S_{50}}-H_k\right]v^{k+\frac{1}{2}}{}_{k+\frac{1}{2}}p_{50}^{(\tau)}$$

§9.3 年老退休给付及其精算现值

养老金计划的主要保障是为年老退休者提供延期年金。

对于确定缴费计划，计划加入者在退休时开始领取的年金是雇主及雇员已缴捐纳金的实际积累值所能购买的生存年金。理论上，该年金的精算现值就是捐纳金的实际积累值，年给付额依赖于实际积累值，因此对于确定缴费计划，通常无法在加入计划时确定未来退休金的数额。

而对于确定给付计划，需要首先确定年给付额，求其精算现值，然后再确定应缴的捐纳金。下面就确定给付计划，介绍年给付额的几种确定公式。

引入函数 $R(x,h,t)$，$R(x,h,t)$ 表示在 x 岁加入计划而现年 $x+h$ 岁的员工，将在 $x+h+t$ 岁获得即期或延期给付年金的年给付额。此外，假设年金的年给付额不变。

9.3.1 年给付额不依赖于年薪的情形

这种情形的年给付额通常有三种确定方式：

（1）员工为企业每工作一年（包括最后的不足一年部分），均可在其退休金年给付额增加一个固定数额 b，这时年给付函数为

$$R(x,h,t)=b\times(h+t)$$

（2）如年给付额不包括最后的不足一年部分，那么

$$R(x,h,t)=b\times(h+k),\quad k=[t]$$

（3）在某规定年数内，每工作一年增加年给付额 b_1，超过的工作年数每年增加较少的年给付额 b_2。如果规定年数为 30，那么年给付额为

$$R(x,h,t)=\begin{cases}b_1\times(h+t), & h+t\leqslant 30\\ 30b_1+b_2\times(h+t-30), & h+t>30\end{cases}$$

【例 9－3】　某养老金计划为每一工作年提供每月 15 元的基本给付，另外提供每月 10 元直到 65 岁的补充给付。某计划加入者现年 40 岁，在 30 岁时加入该计划。若限定退休年龄 $\omega=71$，最早退休年龄 $\alpha=60$ 岁，求退休后可能得到的年给付额。

解：设 k 为从 40 岁开始直到退休为止的工作年数。为计算简便起见，假设退休平均发生在年中，因此基本给付的年给付额为

$$R_1(30,10,k+\frac{1}{2})=15\times12\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right),20\leqslant k\leqslant30$$

补充给付的年给付额为

$$R_2(30,10,k+\frac{1}{2})=10\times12\times\left(10+k+\frac{1}{2}\right),20\leqslant k\leqslant24$$

因此，总的年给付额为

$$R\left(30,\ 10,\ k+\frac{1}{2}\right)=R_1(30,\ 10,\ k+\frac{1}{2})+R_2(30,\ 10,\ k+\frac{1}{2})$$

$$=\begin{cases}300\times(10+k+\frac{1}{2}),\ 20\leqslant k\leqslant24\\180\times(10+k+\frac{1}{2}),\ 25\leqslant k\leqslant30\end{cases}$$

【例 9－4】　在例 9－3 中，如果在计算年给付额时最多只考虑 35 年工作期，那么情况如何？

解：对于基本给付，年给付额为

$$R_1(30,10,k+\frac{1}{2})=\begin{cases}180\times(10+k+\frac{1}{2}), & 20\leqslant k\leqslant24\\180\times35=6\ 300, & 25\leqslant k\leqslant30\end{cases}$$

补充给付保持不变，所以总的年给付额为

$$R(30,10,k+\frac{1}{2})=\begin{cases}300\times(10+k+\frac{1}{2}), & 20\leqslant k\leqslant24\\6\ 300, & 25\leqslant k\leqslant30\end{cases}$$

9.3.2　年给付额由后续年薪决定的情形

这种情形的 R（x，h，t）有三种形式。

（1）员工退休金的年给付额由退休前最后一年的年薪决定，通常是最后年薪的一个比例 g，那么

$$R(x,h,t)=g\times(ES)_{x+h+t}=g\times(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$$

（2）如果年给付额是最后 m 年平均年薪的一个比例 g，那么

$$R(x,h,t)=g\times\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}(ES)_{x+h+s}ds$$

$$= g \times \frac{(AS)_{x+h}}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds \qquad (9-6)$$

其中 $m<t$。如 $m>t$，那么从 $(x+h+t-m)$ 到 $(x+h)$ 期间的年薪是已知的，这时有

$$R(x,h,t) = g\frac{1}{m}\left[\int_{t-m}^{0}(AS)_{x+h+s}ds + \int_{0}^{t}(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\right]$$

为计算（9.3.1）式，假设退休发生在年中（即 $t=k+\frac{1}{2}$），那么

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\int_{k+\frac{1}{2}-m}^{k+\frac{1}{2}}S_{x+h+s}ds$$

通常 S_y 在每一年内是常数，那么

$$R(x,h,k+\frac{1}{2}) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{x+h+k-m}+S_{x+h+k-m+1}+\cdots S_{x+h+k-1}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)$$

$$= g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}{}_{m}Z_{x+h+k} \qquad (9-7)$$

其中

$${}_{m}Z_{y} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{y-m}+S_{y-m+1}+\cdots+S_{y-1}+\frac{1}{2}S_{y}\right) \qquad (9-8)$$

（3）更为一般的情形是年给付额由最后 m 年平均年薪与到退休时的工作年数的乘积的一个比例来确定，这时

$$R(x,h,t) = f\times(h+t)\times(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\right]$$

其中 f 是个百分比（如 2%）。类似于（9－7）式，应用近似计算 ${}_{m}Z_{x+h+k}$，表示 S_{x+h+s} 在区间 $[t,\ t-m]$ 积分的近似值，这里有

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = f\times\left(h+k+\frac{1}{2}\right)\times(AS)_{x+h}\frac{{}_{m}Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} \qquad (9-9)$$

特别地，如只考虑工作整年数，那么

$$R(x,h,k) = f\times(h+k)\times(AS)_{x+h}\frac{{}_{m}Z_{x+h+k}}{S_{x+h}} \qquad (9-10)$$

对其他情形，下面通过例子来说明。

【例 9－5】 在分段给付率计划中，年给付额由下式确定：

第 $k+1$ 年内退休的年给付额 ＝工作总年数 ×（第 $k+1$ 年的标准收入水平 H_k 的 1.25% ＋最后 3 年平均年薪超过 H_k 部分的 1.75%）

对现年 30 岁、年薪 20 000 元的加入者，试给出在 63 岁至 64 岁之间退休时年给付额公式（这里假设最后 3 年平均年薪超过 H_{33}）。

解： 近似地假设退休发生在 63.5 岁，那么

$$R(30,0,33.5) = 33.5\left[0.0125H_{33}+0.0175\left(20\,000\times\frac{{}_{3}Z_{63}}{S_{30}}-H_{33}\right)\right]$$

$$=33.5\left[350\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}}-0.005H_{33}\right]$$

【例 9-6】 在某扣除计划中，年给付额等于最后 3 年平均年薪的 2% 乘以工作总年数再减去社会保险所提供的年退休金收入的 50%。对 30 岁加入计划、现年 40 岁、年薪 30 000 元的加入者，设其在 65 岁退休，而退休时社会保险年收入给付预计为 P，求养老金给付额。

解： 由所给条件，可得

$$R(30,10,25)=35\left[0.02(30\ 000)\frac{{}_3\tilde{Z}_{65}}{S_{40}}\right]-0.5P$$

$$=21\ 000\frac{{}_3\tilde{Z}_{65}}{S_{40}}-0.5P$$

其中

$${}_3\tilde{Z}_{65}=\frac{S_{62}+S_{63}+S_{64}}{3}$$

9.3.3 年给付额由全期平均年薪决定的情形

在这种情形下，年给付额等于整个工作期平均年薪、工作年数、某个百分比 f 的乘积。实际上，这相当于计划加入者在整个工作期中的薪金总额与某个百分比 f 的乘积。但由于过去时期的薪金是已知的，未来时期的薪金是预测的，因此年给付额分两部分计算。把现年 $x+h$ 岁的计划加入者过去的薪金总额记为 $(TPS)_{x+h}$，相应的年给付额部分为

$$f\times(TPS)_{x+h}$$

未来工作期的年给付额部分可由下式给出

$$f\times\int_0^t(ES)_{x+h+s}ds=f\times\int_0^t(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds$$

在进行数值计算时，假设 S_{x+h+s} 是年龄的分段函数并在每个年龄内为常数，又假设退休发生在年中，那么上式可写成

$$f\times\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\tag{9-11}$$

这里 $k=[t]$。

【例 9-7】 一个平均年薪计划提供的年退休给付为整个工作期年薪总额的 2%。对在 30 岁加入该计划、现年 40 岁、年薪 25 000 元的加入者，过去薪金总额为 200 000 元。求在 67 岁至 68 岁之间退休时养老金年给付额。

解： 设退休发生在年中，那么年给付额为

$$R(30,10,27.5)=0.02\times\left(200\ 000+25\ 000\times\frac{\sum_{j=0}^{26}S_{40+j}+\frac{1}{2}S_{67}}{S_{40}}\right)$$

$$= 4\ 000 + 500\ \frac{\sum_{j=0}^{26} S_{40+j} + \frac{1}{2} S_{67}}{S_{40}}$$

养老金计划加入者从退休时开始领取年给付额为 $R(x, h, t)$ 的生存年金，该年金在退休时的精算现值为

$$R(x,h,t) \times \bar{a}^{r}_{x+h+t}$$

因此，现年 $x+h$ 岁的员工，年老退休给付的精算现值可表示为积分形式

$$APV = \int_{\alpha-x-h}^{\omega-x-h} v^{t}\ {}_{t}p^{(\tau)}_{x+h}\ \mu^{(r)}_{x+h+t} R(x,h,t) \bar{a}^{r}_{x+h+t} dt \tag{9-12}$$

其中 $x+h<\alpha$（α 为最早退休年龄）。把（9－12）式的积分划分为各年龄段的积分之和

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h} \int_{0}^{1} v^{s}\ {}_{s}p^{(\tau)}_{x+h+k}\ \mu^{(r)}_{x+h+k+s} R(x,h,k+s) \bar{a}^{r}_{x+h+k+s} ds$$

为计算简单起见，我们推导一个近似公式。假设退休的发生在每一年龄内服从均匀分布，那么上式可简化为：

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h} q^{(r)}_{x+h+k} \int_{0}^{1} v^{s} R(x,h,k+s) \bar{a}^{r}_{x+h+k+s} ds$$

再应用中点公式就得

$$APV \approx \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{x+h} q^{(r)}_{x+h+k} R(x,h,k+\frac{1}{2}) \bar{a}^{r}_{x+h+k+1/2}\ ds \tag{9-13}$$

（9－13）式用来计算年老退休给付的精算现值。

下面我们通过例题来求一些年老退休金的精算现值。

【例 9－8】 计算例 9－3 中养老金计划的基本给付与补充给付的精算现值。

解： 由（9－13）式，基本给付的精算现值为

$$180 \sum_{k=20}^{30} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p^{(\tau)}_{40}\ q^{(r)}_{40+k} (10+k+\frac{1}{2}) \bar{a}^{r}_{40+k+1/2}$$

补充给付的精算现值为

$$120 \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2}\ {}_{k}p^{(r)}_{40}\ q^{(r)}_{40+k} (10+k+\frac{1}{2}) \bar{a}^{r}_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2|}}$$

【例 9－9】 在附加计划中，基本给付年给付额为最后 5 年平均年薪的 1.5%乘上工作总年数；补充给付给付到 65 岁，给付额为最后 5 年平均年薪的 0.5%乘上工作总年数。对 30 岁加入计划、现年 45 岁、年薪 40 000 元的某雇员，求养老金的精算现值。这里假设最早退休年龄为 60 岁，限定退休年龄为 70 岁，有部分加入者直到满 70 岁才退休。

解： 先求年给付额函数。对于基本给付，当 $15 \leqslant k \leqslant 24$ 时，

$$R_{1}(30,15,k+\frac{1}{2}) = 600 \times (15+k+\frac{1}{2}) \frac{{}_{5}Z_{45+k}}{S_{45}}$$

当 $k=25$ 时，

$$R_1(30,15,25)=24\ 000\frac{{}_5\widetilde{Z}_{70}}{S_{45}}$$

其中

$${}_5\widetilde{Z}_{70}=\frac{S_{65}+S_{66}+S_{67}+S_{68}+S_{69}}{5}$$

对于补充给付，当 $15\leqslant k\leqslant 19$ 时，

$$R_2(30,15,k+\frac{1}{2})=200\times(15+k+\frac{1}{2})\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}$$

于是基本给付与补充给付的精算现值分别为

$$\sum_{k=15}^{24}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}600\times(15+k+\frac{1}{2})\frac{{}_5Z_{45+k}}{S_{45}}\bar{a}^r_{45+k+1/2}+v^{25}\ {}_{25}p_{45}^{(\tau)}24\ 000\frac{{}_5\widetilde{Z}_{70}}{S_{45}}\bar{a}^r_{70}$$

和

$$\sum_{k=15}^{19}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{45}^{(\tau)}q_{45+k}^{(r)}200\times(15+k+\frac{1}{2})\frac{{}_5\widetilde{Z}_{45+k}}{S_{45}}\bar{a}^r_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2}|}$$

两者之和即为该雇员养老金的精算现值。

最后讨论年给付额依赖于整个工作期平均年薪的情形。这种情形的养老金精算现值可以分成两部分：

（1）相应于过去工作期的那部分给付的精算现值为

$$f\times(TPS)_{x+h}\sum_{k=\alpha-x-h}^{w-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}\tag{9-14}$$

（2）相应于未来工作期的那部分给付的精算现值。假设未来薪金是年龄的分段函数并在每一个年龄内为常数，又假设退休均发生在各年龄段的年中。精算现值为

$$f\times\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=\alpha-x-h}^{w-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right]\tag{9-15}$$

因为对 $k=0,1,2,\cdots,\alpha-x-h-1$，有 $q_{x+h+k}^{(r)}=0$，所以（9－15）式可改写成

$$f\times\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=0}^{w-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{x+h+j}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right]\tag{9-16}$$

对 k 与 j，交换求和顺序，得到

$$f\times\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{j=0}^{w-x-h-1}S_{x+h+j}\left(\frac{1}{2}v^{j+\frac{1}{2}}\ {}_jp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}\sum_{k=j+1}^{w-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}\right)\right]$$

（9－17）

注意到当 $j=\omega-x-h-1$ 时，由于 ${}_jp_{x+n}^{(\tau)}=0$，因此（9－17）式的内层和式为 0。

【例 9－10】 根据本章末的表 9－1，求例 9－7 中的计划加入者相应于

未来工作期给付的精算现值。

解：在年中退休的假设下，由（9－15）式，退休时的养老金给付额 $R(30,10,27.5)$ 的精算现值为

$$\frac{500}{S_{40}}\sum_{k=20}^{30}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p_{40}^{(\tau)}\ q_{40+k}^{(r)}\left(\sum_{j=0}^{k-1}S_{40+j}+\frac{1}{2}S_{40+k}\right)\bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

而由（9－17）式得到

$$\frac{500}{S_{40}}\left[\sum_{j=0}^{30}S_{40+j}\left(\frac{1}{2}v^{j+\frac{1}{2}}\ {}_{j}p_{40}^{(\tau)}\ q_{40+j}^{(r)}\bar{a}_{40+j+1/2}^{r}+\sum_{k=j+1}^{30}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p_{40}^{(\tau)}\ q_{40+k}^{(r)}\bar{a}_{40+k+1/2}^{r}\right)\right]$$

其中求和的范围由附表中 $\alpha=60$，$w=71$ 确定。由于当 $k<20$ 时，$q_{40+k}^{(r)}=0$，因此和式中有很多项为 0。

§9.4 残疾退休给付及其精算现值

残疾退休给付的精算现值计算类似于确定给付计划的年老退休给付，即先确定年给付额，再求精算现值。

残疾退休金的年给付额通常由计划加入者在残疾发生时的年薪来确定，但可能会规定某个最低给付额。残疾退休金可能给付到某个确定年龄（例如 65 岁）时，转为年老退休给付。下面通过一个例子来说明其计算过程：某残疾退休金的年给付额等于计划加入者在残疾发生时的年薪、某个百分比、已经工作的年数乘积，但最低年给付额等于年薪、百分比、10 的乘积；计划加入者必须工作 5 年以上并在 65 岁以下残疾时才能获得残疾退休金。设 f 为上述百分比，那么对于年龄为 x 岁的新加入者，其年给付额表示如下：

$$R(x,0,t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 5 \text{ 或 } t\geqslant 65-x\\ 10\times f\times(ES)_{x+t}=10\times f\times(AS)_{x}\dfrac{S_{x+t}}{S_{x}}, & 5\leqslant t<10\\ t\times f\times(ES)_{x+t}=t\times f\times(AS)_{x}\dfrac{S_{x+t}}{S_{x}}, & 10\leqslant t<65-x\end{cases}\qquad(9-18)$$

如残疾退休金一直给付到计划加入者死亡，即中间不再转成年老退休给付，那么精算现值如下：

$$\int_{5}^{65-x}v^{t}\ {}_{t}p_{x}^{(\tau)}\ \mu_{x+t}^{(i)}R(x,0,t)\bar{a}_{x+t}^{i}dt\qquad(9-19)$$

上式又可近似地写成

$$\sum_{k=5}^{64-x}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p_{x}^{(\tau)}\ q_{x+k}^{(i)}R\left(x,0,k+\frac{1}{2}\right)\bar{a}_{x+k+1/2}^{i}\qquad(9-20)$$

（9－19）、（9－20）式与（9－12）、（9－13）式的区别在于：（9－19）、（9－20）式使用的是残疾终止力、残疾退休概率、相应的残疾年金精算现值

因子。

【例9－11】 某养老金计划提供的残疾退休给付是最后年薪的50%，但不能超过最后年薪的70%与从社会保险中获得的残疾收入额之差。加入者必须工作3年以上并在65岁以下因残疾退休时才能获得残疾退休给付。设在年龄 y 至 $y+1$ 岁（$30 \leqslant y < 65$）间因残疾退休的预期社会保险残疾收入为 I_y。对年龄30岁、年薪15 000元的加入者，求养老金计划中的残疾收入给付额的表达式。

解：当 $k=0,1,2$ 时，$R\left(30,\ 0,\ k+\frac{1}{2}\right)=0$。

当 $3 \leqslant k \leqslant 34$ 时，有

$$R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right)=\min\left\{7\,500\frac{S_{30+k}}{S_{30}},10\,500\frac{S_{30+k}}{S_{30}}-I_{30+k}\right\}$$

如上式右边小于0，那么取 $R\left(30,0,k+\frac{1}{2}\right)=0$，即仅能获得由社会保险提供的给付。

§9.5 解约给付及捐纳金的退还

在养老金计划中一般有两种类型的节约保障：（1）提供某个预期年金，（2）一次性退还捐纳金的积累值。

先考虑前一种类型。在加入计划一定年数后，加入者在解约时可以获得某个延期年金。例如，假设解约给付延期年金在60岁开始给付，年给付额为某比例 f、到解约时的工作年数、解约时的年薪的乘积；此外，工作10年以后才能获得这个年金，那么年给付额为

$$R(x,h,t)=\begin{cases}0, & h+t<10\\ f\times(h+t)\times(ES)_{x+h+t}, & 10\leqslant h+t<60-x\end{cases}$$

解约给付的精算现值近似地等于

$$\sum_{k=l}^{59-x-h} v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\ q_{x+h+k}^{(w)} R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)\ {}_{60-x-h-k-1/2|}\bar{a}'_{x+h+k+1/2} \qquad (9-21)$$

其中 $l=\max\{10-h,\ 0\}$。（9－21）式中使用 $\bar{a}'$，表示这个延期年金在60岁时的精算现值是以年老退休者生命表为基础进行计算的，即假设年老退休者生命表适用于解约者。

退还捐纳金的类型。对于员工需缴付捐纳金的养老金计划，如果计划加入者在有资格领取退休金之前解约，那么作为一次性给付，通常退还其捐纳金的积累值。这种一次性给付通常也给付于在工作期间死亡的员工的遗属。这里只考虑计算过去已缴捐纳金在解约时的积累值，这些捐纳金都

根据已知的年薪来确定。未来将要缴付的捐纳金在解约时的精算现值的计算较复杂，这里不做讨论。

用$(ATPC)_{x+h}$表示现年$x+h$岁的计划加入者按过去各年利率计算的已缴捐纳金的积累值，并假设该积累值还能以年利率j积累。那么在$x+h+t$岁解约时，这部分捐纳金的退还额由下式给出

$$B(x,h,t)=(ATPC)_{x+h}(1+j)^{t}$$

其精算现值近似地等于

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\ {}_{k}p_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(w)}(1+j)^{k+\frac{1}{2}} \tag{9-22}$$

其中β是有资格获得即期或延期退休给付的年龄，显然有$\beta>x+h$；假设到达年龄β之后不再有解约退还金。

如各年捐纳金的积累利率与现值所用的贴现利率相同，即$j=i$，那么(9－22）式可简化为

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1}{}_{k}p_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(w)}=(ATPC)_{x+h}\frac{l_{x+h}^{(w)}-l_{\beta}^{(w)}}{l_{x+h}^{(\tau)}}$$

其中$l_y^{(w)}$是年龄为y的$l_y^{(\tau)}$个计划加入者中在未来一年内解约的人数。

可以根据多元风险表进行精算现值的计算。

表9－1　　养老金函数表例表

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(i)}$	$q_x^{(r)}$	S_x
30	100 000	0.001	0.1999	0	0	1
31	79 910	0.001	0.1799	0	0	1.06
32	65 454	0.0011	0.1506	0	0	1.13
33	55 524	0.0011	0.1027	0	0	1.2
34	49 761	0.0012	0.0798	0	0	1.28
35	45 730	0.0014	0.0589	0.001	0	1.36
36	42 927	0.0015	0.0449	0.001	0	1.44
37	40 893	0.0016	0.035	0.0011	0	1.54
38	39 352	0.0018	0.03	0.0012	0	1.63
39	38 053	0.0019	0.026	0.0013	0	1.74
40	36 943	0.0021	0.022	0.0014	0	1.85
41	36 000	0.0023	0.02	0.0015	0	1.96
42	35 143	0.0026	0.018	0.0016	0	2.09
43	34 363	0.0028	0.016	0.0017	0	2.22
44	33 656	0.0031	0.015	0.0018	0	2.36

续表

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(i)}$	$q_x^{(r)}$	S_x
45	32 989	0.0034	0.014	0.002	0	2.51
46	32 349	0.0038	0.013	0.0022	0	2.67
47	31 734	0.0042	0.013	0.0025	0	2.84
48	31 109	0.0046	0.012	0.0028	0	3.02
49	30 506	0.0051	0.011	0.0031	0	3.21
50	29 919	0.0056	0.01	0.0034	0	3.41
51	29 350	0.0062	0.01	0.0038	0	3.63
52	28 763	0.0069	0.009	0.0042	0	3.86
53	28 185	0.0074	0.0089	0.0047	0	4.1
54	27 593	0.0082	0.0079	0.0052	0	4.35
55	27 006	0.0089	0.0079	0.0058	0	4.62
56	26 396	0.0098	0.0069	0.0064	0	4.91
57	25 786	0.0107	0.0069	0.0071	0	5.21
58	25 149	0.0118	0.0059	0.0079	0	5.53
59	24 505	0.0129	0.0049	0.0087	0	5.86
60	23 856	0.0131	0	0	0.1489	6.21
61	19 991	0.0149	0	0	0.0794	6.56
62	18 106	0.0157	0	0	0.1487	6.93
63	15 130	0.0179	0	0	0.0892	7.31
64	13 509	0.019	0	0	0.1485	7.7
65	11 246	0.0181	0	0	0.3955	8.08
66	6 594	0.0223	0	0	0.1975	8.48
67	5 145	0.0231	0	0	0.2958	8.91
68	3 504	0.0237	0	0	0.3941	9.35
69	2 040	0.024	0	0	0.4922	9.82
70	987	0.0172	0	0	0.9828	10.31

习　题

1. 假设对于年龄为30岁的新加入者，因考虑通货膨胀的影响及工作能力的提高，每年以5%增加工资。另外，假设在40岁、50岁和60岁时于原有工资上再增加10%。退休年龄为65岁。

（1） 在上述假设下构造一个薪金比例函数 S_{30+k}；

（2） 若开始年薪为 12 000 元，捐纳金按各年年薪的 10% 缴纳，求捐纳金精算现值的表达式。

2. 养老金计划的资助者每年为每个计划加入者缴纳其年薪超过某一定额部分的 10%。设当年定额为 10 000 元，并每年按 5% 增加。对现年 35 岁，年薪 25 000 元的加入者，求资助者为其缴纳的捐纳金的精算现值。

3. 1 月 1 日出生的现年 61 岁、年薪 40 000 元的养老金计划新加入者，每年生日加薪，年薪增长函数为 $S_k=(1.06)^k$。设退休发生在年初并在年薪增长之前，其他终止事件发生在年中，给定利率 $i=5\%$ 及如表 9－2 所示的养老金函数表：

表 9－2　　　　养老金函数表

x	$l_x^{(\tau)}$	d_x	w_x	r_x
61	100	8	0	0
62	92	12	0	0
63	80	0	8	0
64	72	0	0	12
65	60	0	0	6

其中 d_x、w_x、r_x 分别为 x 岁的死亡人数、退保人数、退休人数。除退休那年之外，捐纳金按年薪的 6% 在每年年初缴纳，求该加入者在 63 岁和 64 岁所缴捐纳金的精算现值。

4. 在第 3 题中，如加入者在工作期间死亡，其遗属可立即得到数额为 5 000 元乘以工作年数的一笔死亡给付。试求此死亡给付在 61 岁时的精算现值。

5. 在第 3 题中，如退休金的年给付额为最后两年平均年薪的 3% 乘以工作年数，求该加入者在 65 岁退休时的退休金年给付额。

6. 在 60 岁退休的计划加入者有三种年给付额选择：

（1） 工作期限 25 年以内每年 450 元，超过 25 年每年 350 元；

（2） 工作年数 ×（退休前 3 年平均年薪的 1% ＋ 退休前 3 年平均年薪超过 30 000 元部分的 0.5%）；

（3） 工作年数 ×（整个工作期平均年薪的 2% ＋ 整个工作期平均年薪超过 20 000 元部分的 1%）。

某加入者正好在 30 岁时加入计划，起始年薪为 10 000 元，每年增加 5%，求其在 60 岁退休时能得到的最大年给付额。

7. 在一个扣除计划中，退休年给付额为最后 3 年的平均年薪的 2% 乘以工作年数，减去最后 3 年平均年薪 25% 的社会保险年给付额的 35%。如

年薪在每年末增加，年薪增长函数 $S_{40+k}=(1.05)^k$，求在 30 岁加入计划、现年 40 岁、年薪 40 000 元的员工在 65 岁退休时的年给付额。

8. 某养老金保险的退休给付为每工作一年每月给付 20 元。某职工 30 岁参加养老金计划，60 岁退休，退休金每月发放一次。若 $\ddot{a}_{60}^{(12)}=10$；${}_{20}p_{40}=0.885$；$i=0.06$。计算 40 岁时未来给付的精算现值。

9. 一个 25 岁的新加入者，现年年薪是 12 000 元。在第 $k+1$ 年内退休时，某分段给付计划为其提供的年收入为：

年收入 = 工作整年数 ×（最后 3 年平均年薪不超过 15 000 $(1.04)^k$ 元部分的 1% + 最后 3 年平均年薪超过 15 000 $(1.04)^k$ 元部分的 1.5%）

给出给付额函数的表达式。

10. 某种扣除计划，其扣除额为工作年数乘以社会保险收入的 2%，但总额不超过社会保险收入的 50%。在扣除之前，年给付额为工作年数乘以最后 3 年平均年薪的 2%。在下列情况下，对年薪为 30 000 元的 40 岁的新加入者，写出其给付额公式。

（1）在 65 岁退休，预期的社会保险收入为 I_{65}；

（2）在 68 岁至 69 岁之间退休，预期的社会保险收入为 $I_{68.5}$。

11. 在例 9－8 中，如果所有的人都在 63 岁退休，那么精算现值如何简化？

12. 在第 11 题的条件下，试写出相应于 30 岁到 50 岁这段工作期的未来给付精算现值公式。

13. 某计划中，65 岁前的给付额为工作年数乘以最后 3 年平均年薪的 2%，65 岁后则为工作年数乘以最后 3 年平均年薪的 $1\frac{1}{3}\%$，对于 30 岁时加入计划、现年 50 岁，而年薪 36 000 元的加入者，如果最早退休年龄为 55 岁，限定退休年龄为 68 岁，求未来给付的精算现值。

14. 在上题中，如果在确定给付额时最多不超过 35 年工龄，试写出未来给付的精算现值公式。

15. 某全期平均计划提供的退休收入为加入者整个工作期薪金总额的 2%，最早退休年龄为 58 岁，限定退休年龄为 68 岁。对 30 岁开始工作、现年 50 岁的加入者，如过去总薪金为 400 000 元，而目前年薪为 36 000 元，写出下列各表达式：

（1）在 65 岁退休时的给付额；

（2）在 65 岁至 66 岁之间退休时的平均给付额；

（3）相应于过去工作期的退休给付的精算现值；

（4）相应于未来工作期的退休给付的精算现值。

16. 对于现年 50 岁、有 20 年工龄、年薪为 25 000 元的加入者，其残疾给付额的计算如例 9－11 所述。如该加入者在当年年中致残，而 $I_{50}=8\ 000$，

求残疾给付在致残时的精算现值。

17. 某年龄为35岁的加入者，其过去捐纳金的积累值为5 000元。如果继续参加计划，到40岁就有资格获得延期年金。假设捐纳金以每年6%的实际利率积累，求在40岁前解约时应退还的过去捐纳金的积累值的精算现值。

18. 年初正好65岁的年薪50 000元的养老金计划加入者，在其工作期间每年初缴付年薪的2%作为捐纳金。若 $i=6\%$，$S_{65+k}=(1.06)^k$，$k=1, 2, \cdots$，试根据本章表9－1计算当年及往后各年捐纳金在65岁时的精算现值。

19. 某公司为员工提供一个确定给付计划或一个确定缴费计划。在正常的退休年龄65岁，确定给付计划提供一个按月给付的退休年金，年给付额为最后5年平均年薪的25%；在确定缴费计划中，公司在每年末将为每个加入者存入相当于其年薪6%的捐纳金，其年给付额由账户积累额除以年金精算现值因子11.351确定。

如果：（1）某计划加入者在1月1日正好 x 岁，$x<60$；（2）年薪在1月1日是25 000元，以后每年将在1月1日加薪5%。（3）账户积累利率为5%。

试求：

（1）该计划加入者最后5年的平均年薪；

（2）到正常退休年龄时账户上的积累额；

（3）两种计划年给付额最接近的年龄 x。

20. 某养老金计划提供一个年给付额为最后3年平均工资的2%乘以工作年数的基本给付。如果加入者在65岁之前退休，可得到一个年给付额为基本给付额一半的给付到65岁的补充给付。最早退休年龄为60岁，限定退休年龄为70岁，对在70岁以前的退休者均假设在年中退休，有些加入者直到满70岁才退休，年薪在每年末增加。

已知：

$$\sum_{k=15}^{19} {}_3Z_{45+k} v^{k+1/2} \, {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} \bar{a}^{r}_{45+k+1/2:\overline{20-k-1/2|}} = 17.94$$

$$\sum_{k=15}^{19} \left(k+\frac{1}{2}\right) {}_3Z_{45+k} v^{k+\frac{1}{2}} \, {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} \bar{a}^{r}_{45+k+1/2:\overline{20-k-1/2|}} = 296.01$$

$$\sum_{k=15}^{24} {}_3Z_{45+k} v^{k+\frac{1}{2}} \, {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} \bar{a}^{r}_{45+k+1/2} = 165.88$$

$$\sum_{k=15}^{24} \left(k+\frac{1}{2}\right) {}_3Z_{45+k} v^{k+1/2} \, {}_kp_{45}^{(\tau)} q_{45+k}^{(r)} \bar{a}^{r}_{45+k+1/2} = 3\,151.94$$

$${}_3\tilde{Z}_{70} v^{25} \, {}_{25}p_{45}^{(\tau)} \bar{a}^{r}_{70} = 11.84$$

$$S_{45} = 20.00$$

对现年 45 岁、年薪 40 000 元、在 25 岁加入计划的人，计算：

（1） 基本给付在 45 岁时的精算现值；

（2） 补充给付在 45 岁时的精算现值；

（3） 相应于 25 岁到 45 岁这段工作期的给付在 45 岁时的精算现值。

21. 对一份残疾收入保险，假设：

（1） 如被保险人保持残疾状态，将获得每年 20 000 元的连续给付；

（2） 支付年数服从参数为 2 和 1 的 Gamma 分布；

（3） 支付立即开始；

（4） 贴现力 $\delta=0.05$。

计算当残疾发生时残疾给付的精算现值。

第十章 多种状态转换模型

学习目标

- ☐ 了解离散时间马尔可夫链，包括转移概率、状态分类、极限概率、非常返状态的逗留时间等基本知识
- ☐ 熟悉马尔可夫链在寿险中多种状态转换模型的应用
- ☐ 掌握状态转换下现金流的精算现值的计算方法，以及净保费和责任准备金的计算方法

§10.1 离散时间马尔可夫链

简单地讲，一系列随机变量构成一个随机过程，记为$\{X(t):t\in(0,\infty)\}$，其中t可视为时间参数。随机过程可理解为随机变量随着时间的变化。我们将仅考虑离散时间随机过程，此时时间参数t仅取整数值。对给定的时刻t，$X(t)$称为随机过程在时刻t的状态。

给定随机过程$\{X_n:n=0,1,2,\cdots\}$，设X_n的取值范围为$\{0,1,2,\cdots,m\}$，如果$X_n=i$，就称过程在时刻n时处于状态i。在给定$X_n=i$的条件下，我们想知道$X_{n+1}=j$的概率。假设此条件概率不依赖于n。

特别地，如果随机过程$\{X_n\}$在$n+1$时刻处于状态j的概率只依赖于在n时刻所处的状态，而与n时刻以前所处的状态无关，那么称$\{X_n\}$为马尔可夫链。

10.1.1 转移概率

对马尔可夫链，以下概率称为转移概率

$$P_{ij}=Pr\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\} \tag{10-1}$$

显然有

$$\sum_{j=0}^{m}P_{ij}=1 \tag{10-2}$$

定义转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{10-3}$$

【例 10－1】 以下矩阵 P 是某个马尔可夫链的转移概率矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.80 & 0.20 & 0 \\ 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.40 & 0.40 & 0.20 \end{pmatrix}$$

（1）该马尔可夫链有几个不同的状态？

（2）设当前状态为 2，下一时刻处于状态 0 的概率是多少？

（3）过程在第 5 次到达状态 2，下一时刻处于状态 0 的概率是多少？

（4）设当前状态为 1，经过两个时间周期后，过程处于状态 2 的概率是多少？

解：（1）转移概率矩阵表明该马尔可夫链有三个不同状态，记为 0，1，2。

（2）概率为 $P_{20}=0.40$。

（3）由前面转移概率的假设，这里的概率仍为 $P_{20}=0.40$。

（4）记向量（p_n，q_n，r_n）为在时刻 n 时过程处于状态 0，1，2 的概率。因为初始状态为 1，所以

$$(p_0,q_0,r_0)=(0,1,0)$$

从而

$$(p_1,q_1,r_1)=(0,1,0)\mathbf{P}=(0.30,0.60,0.10)$$
$$(p_2,q_2,r_2)=(p_1,q_1,r_1)\mathbf{P}=(0.46,0.46,0.08)$$

因此在时刻 2 时，过程处于状态 2 的概率为 0.08。

注意到$(p_2,q_2,r_2)=(0,1,0)\mathbf{P}^2$。

【例 10－2】 某财险公司把保单持有人分为三类：低风险、中等风险、高风险。在每年年末，根据一年内的索赔记录，驾驶员被重新分类。图 10－1 是类别转换的示意图。试给出转移概率矩阵。

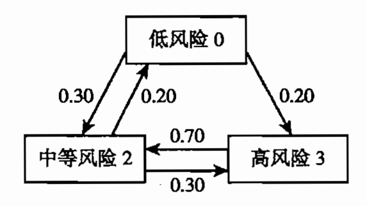


图 10－1　类别转换的示意图

解： 直接由图 10－1 得到转移概率矩阵如下

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.50 & 0.30 & 0.20\\ 0.20 & 0.50 & 0.30\\ 0 & 0.70 & 0.30\end{pmatrix}$$

【例 10－3】 （随机游动）该马尔可夫链有无穷多个状态，状态空间为$\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$。转移概率表示为

$$P_{i,i+1}=p \tag{10-4a}$$

$$P_{i,i-1}=1-p \tag{10-4b}$$

当 $p>0.5$ 时，最终过程将趋向于正无穷远。当 $p<0.5$ 时，最终过程将趋向于负无穷远。而当 $p=0.5$ 时，过程将漫无目标地游动。如果一直持续下去，过程将无穷多次返回零点。

10.1.2 多步转移概率

转移概率矩阵描述了一步转移的概率。现在考虑 n 步转移概率，它是指如下概率

$$P_{ij}^{(n)}=Pr\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\} \tag{10-5}$$

相应地，n 步转移概率矩阵记为 $\mathbf{P}^{(n)}$。由马尔可夫性可以证明

$$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\cdots\mathbf{P} \tag{10-6}$$

【例 10－4】 某个马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.60 & 0.30 & 0.10\\ 0.50 & 0.30 & 0.20\\ 0.30 & 0.40 & 0.30\end{pmatrix}$$

当 $n=4$ 时刻时，过程处于状态 0。计算当 $n=6$ 时刻时，过程处于状态 1 的概率。

解： 首先计算 $\mathbf{P}^2$，得到

$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix}0.54 & 0.31 & 0.15\\ 0.51 & 0.32 & 0.17\\ 0.47 & 0.33 & 0.20\end{pmatrix}$$

所求的概率就是第一行第二列的元素，即 0.31。

10.1.3 状态分类

根据状态之间的互相转换，可以对马尔可夫链进行分类。首先给出一些定义。

如果从状态 i 出发，经过有限步转移，可以到达状态 j，那么就称状态 i 可以到达 j。进一步，如果状态 j 也可以到达 i，那么就称状态 i 和 j 是相通的。注意到 $P_{ii}^{(0)}=1$，所以状态 i 和自身是相通的。如果状态 i 和 j 是相通

的，而且状态 j 和 k 是相通的，可以证明状态 i 和 k 也是相通的。因此，相通关系是等价关系。

由相通等价关系，彼此相通的状态构成一个等价类。如果一个马尔可夫链只包含一个等价类，那么就称此马尔可夫链是不可约的。

给定状态 i，以 r_i 表示过程从 i 出发，经有限步返回 i 的概率。如果 $r_i=1$，就称状态 i 是常返的。如果 $r_i<1$，就称状态是非常返的。对常返状态 i，从 i 出发，过程会无穷多次返回 i。对非常返状态 i，从 i 出发，过程只有有限多次返回 i。

如果 $P_{ii}=1$，就称状态 i 是吸收状态。在精算模型中吸收状态的例子之一就是死亡。

为说明以上定义，考虑如下转移概率矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.90 & 0.10 & 0\\ 0.30 & 0.50 & 0.20\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

注意：

（1）状态 2 是吸收状态，这是因为 $P_{22}=1$。

（2）从状态 0 出发，可以到达状态 2。另一方面因为从状态 2 不能到达状态 0，所以状态 0 和 2 不相通。

（3）状态 0 和 1 相通，所以它们构成了一个等价类。

（4）对应于转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 的马尔可夫链是可约的。这是因为它包含了两个等价类，即 $\{0,1\}$ 和 $\{2\}$。另一方面，对应于如下转移概率矩阵 $\mathbf{Q}$ 的马尔可夫链是不可约的。

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0.90 & 0.10 & 0\\ 0.30 & 0.50 & 0.20\\ 0 & 0.001 & 0.999\end{pmatrix}$$

【例 10－5】 某个马尔可夫链当前处于非常返状态 i，$r_i=0.70$。

（1）从状态 i 出发，过程不会返回 i 的概率是多少？

（2）马尔可夫链恰好 $n-1$ 次回到状态 i 的概率是多少？

（3）以 X 表示马尔可夫链返回 i 的次数，X 是随机变量。求 X 的分布。

解：（1）按定义，所求的概率为 $1-r_i=0.30$。

（2）回到状态 i 有 $n-1$ 次，然后不再返回状态 i，概率为 $r_i^{n-1}\cdot(1-r_i)=(0.70)^{n-1}\cdot(0.30)$

（3）X 服从几何分布，概率函数为 $p(n)=(r_i)^n\cdot(1-r_i),n=0,1,2,\cdots$。$X$ 的期望值为

$$E[X]=\frac{r_i}{1-r_i} \tag{10-7a}$$

出于一些考虑，引入变量 N，它表示过程处于状态 i 的次数。如果初始状态为 0，那么 N 包括初始次数。因此 $N=X+1$。过程处于状态 i 的期望次数为

$$E[N]=E[X]+1=\frac{1}{1-r_i} \tag{10-7b}$$

【例 10-6】 在例 10-5 中，过程处于状态 i 的期望次数是多少？

解： 由（10-7b）式得

$$E[N]=\frac{1}{1-r_i}=\frac{1}{1-0.70}=3.33$$

对于例 10-3 引入的随机游动，可以证明：当 $p=0.50$ 时，所有的状态都是常返状态。而当 $p\neq 0.50$ 时，所有的状态都是非常返状态，而且

$$r_i=2\cdot\min(p,1-p) \tag{10-8}$$

【例 10-7】 在一系列游戏中，参加人每次赢 1 元的概率为 0.4375，输 1 元的概率为 0.5625。如参加人当前只有 1 元，经过足够多次游戏后，参与人的收益恢复到 1 元的概率有多大？

解： 构造一个随机游动，$p=0.4375$。设初始状态为 0，那么所求的概率为

$$r_0=2\cdot\min(0.4375,0.5625)=0.875$$

【例 10-8】 在例 10-7 中，求参加人收益出现 1 元的次数（包括初始次数）的期望值。

解： 由（10-7b）式即得

$$E[N]=\frac{1}{1-r_0}=\frac{1}{1-0.875}=8$$

下面给出另外一种计算 $E[N]$ 的方式。引入示性随机变量 I_n 如下：

$$I_n=\begin{cases}1 & X_n=i\\ 0 & X_n\neq i\end{cases}$$

注意到 $I_0=1$，那么

$$N=I_0+I_1+\cdots \tag{10-9a}$$

$$E[N]=E[I_0]+E[I_1]+\cdots \tag{10-9b}$$

注意到 $I_n=1$ 表示在时刻 n 时过程处于状态 i 这一事件，该事件概率为 $P_{ii}^{(n)}$，因此

$$E[I_n]=P_{ii}^{(n)} \tag{10-10}$$

由（10-9b）和（10-10），即得

$$E[N]=\sum_{n=0}^{\infty}E[I_n]=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ii}^{(n)} \tag{10-11}$$

对常返状态

$$E[N]=\sum_{n=0}^{\infty}P_{ii}^{(n)}=\infty \tag{10-12a}$$

而对非常返状态

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty \tag{10-12b}$$

10.1.4　极限概率

本节内容围绕下例展开：

【例 10－9】 某城市天气变化可用马尔可夫链描述，它有如下特征：

（1）每天的天气是三种状态之一：晴、云、雨。

（2）如果当天是晴，那么下一天各以 50% 的概率出现云、雨。

（3）如果当天是云，那么下一天出现晴、云、雨的概率分别为 0.25，0.25，0.50。

（4）如果当天是雨，那么下一天出现晴、云、雨的概率分别为 0.25，0.50，0.25。

给出关于天气变化的转移概率矩阵。

解： 以状态 0，1，2 分别表示晴、云、雨，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \end{pmatrix}$$

现在考虑以下问题：经过很长时间后，平均来说，出现晴的频率是多少？换言之，如果选很久之后的一天（如一年以后），那么这一天出现晴的概率有多大？为回答这个问题，需要引入状态 0 的极限概率，记为 π_0。同样引入 π_1 和 π_2。

对满足一定条件的马尔可夫链，可以证明，对所有的状态 i 和 j，$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ 存在，而且极限与 i 无关。记

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$

而且（π_0，…，π_m）满足下列方程

$$(\pi_0, \cdots, \pi_m) = (\pi_0, \cdots, \pi_m) \cdot \mathbf{P}$$

回到例 10－9 中的问题，这里有

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) \cdot \mathbf{P} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \tag{10-13a}$$

或者

$$\pi \cdot \mathbf{P} = \pi \tag{10-13b}$$

约束条件为

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \tag{10-14}$$

求解得到（π_0，π_1，π_2）=（0.20，0.40，0.40）。

由（10－13a）－（10－13b）和（10－14）即知，π 是与矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值 1 相对应的特征向量的单位化向量。

【例 10－10】 计算例 10－9 中的（π_0，π_1，π_2）。

解： 求解（10－13）和（10－14）式，得到（π_0, π_1, π_2）=（0.20，0.40，0.40）。因此，经过很长时间后，平均来说，有 40% 的天数是晴天。

注意到由（10－13）得到的三个方程有一个是多余的，可以删去一个。

§10.2 在非常返状态的逗留时间

假设马尔可夫链包含至少一个吸收状态，那么经过有限步转换后，每个非吸收状态会到达某个吸收状态。过程不管从哪个状态出发，总会到达吸收状态，这类过程称为吸收马尔可夫链。我们考虑以下两个问题：

（1）如初始状态 i 是非常返状态，那么在到达某个吸收状态前，过程到达非常返状态 j 的期望次数。

（2）如初始状态 i 是非常返状态，那么在到达某个吸收状态前，过程所需要的转换步数。

10.2.1 基本矩阵 Q

假设马尔可夫链包含至少一个吸收状态，而且非吸收状态都是非常返的。设有 n 个状态，对状态编号，使得 $\{0, 1, \cdots, t-1\}$ 是非常返状态，$\{t, \cdots, n-1\}$ 是吸收状态。以 **S** 表示转移概率矩阵 **P** 中对应于非常返状态的子矩阵。马尔可夫链的基本矩阵 **Q** 定义为

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \tag{10-15}$$

其中 **I** 是单位阵。

【例 10－11】 某马尔可夫链包含四个状态 {0，1，2，3}，其中状态 0 和 1 是非常返的，状态 2 和 3 是吸收状态，转移概率矩阵如下

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.50 & 0.25 \\ 0.20 & 0.20 & 0 & 0.60 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求对应的基本矩阵 **Q**。

解： 首先，对应的矩阵 **S** 为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.20 & 0.20 \end{pmatrix}$$

从而

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 1/3 & 5/4 \end{pmatrix}$$

有了基本矩阵 **Q**，就可以方便直接地解决本节开始的两个问题。对第一

个问题，答案是基本矩阵 **Q** 的元素 Q_{ij}。对第二个问题，答案是 $\sum_{j=0}^{t-1} Q_{ij}$。注意到 $Q_{ii} \geqslant 1$，这是因为从 i 出发到达 i 的次数包含初始次数。

在例 10－11 中，假设初始状态为 1，那么在到达吸收状态之前，过程到达状态 0 的期望次数为 $Q_{10}=1/3$。同理，假设初始状态为 1，那么在到达吸收状态之前，过程到达状态 1 的期望次数为 $Q_{11}=5/4$。因此，假设初始状态为 1，那么在到达吸收状态之前，过程所需要的转换步数为 $1/3+5/4=19/12$。

10.2.2　到达非常返状态 j 的概率

设状态 i 和 j 都是吸收马尔可夫链的非常返状态。设当前状态为 i，现在考虑过程能够到达 j 的概率，记为 r_{ij}。注意到 $r_{ii}=r_i$。为得到 r_{ij}的表达式，引入示性变量 δ_{ij}

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如 } i=j \\ 0, & \text{如 } i\neq j\end{cases} \tag{10-16}$$

按定义，$(1-r_{ij})$ 是过程不能到达 j 的概率。对 Q_{ij}，下述关系成立

$$Q_{ij}=E\,[\text{到达 } j \text{ 的次数} \mid \text{能到达 } j]\cdot r_{ij}+ E\,[\text{到达 } j \text{ 的次数} \mid \text{不能到达 } j]\cdot(1-r_{ij}) \tag{10-17a}$$

考虑（10－17a）式右边第一个条件期望表达式。当 $i\neq j$ 时，它正是 Q_{jj}。当 $i=j$ 时，需要加上初始次数。统一处理两种情形，有一个方便的形式：$\delta_{ij}+Q_{jj}$。

对（10－17a）式右边第二个条件期望表达式。当 $i\neq j$ 时，它是 0。当 $i=j$ 时，考虑到初始次数，它是 1。两种情形下可统一写成 δ_{ij}。

因此，（10－17a）式变为

$$Q_{ij}=(\delta_{ij}+Q_{jj})\cdot r_{ij}+\delta_{ij}\cdot(1-r_{ij}) \tag{10-17b}$$

化简变为

$$Q_{ij}=\delta_{ij}+Q_{jj}\cdot r_{ij} \tag{10-17c}$$

$$r_{ij}=\frac{Q_{ij}-\delta_{ij}}{Q_{jj}} \tag{10-18}$$

特别地，当 $i\neq j$ 时，

$$r_{ij}=\frac{Q_{ij}}{Q_{jj}} \tag{10-19a}$$

当 $i=j$ 时

$$r_{ii}=\frac{Q_{ii}-1}{Q_{ii}} \tag{10-19b}$$

【例 10－12】　在例 10－11 中，计算 r_0，r_1，r_{01}，r_{10}。

解： 在例 10－11 中，

$$Q=\begin{pmatrix}4/3 & 0\\ 1/3 & 5/4\end{pmatrix}$$

直接计算，得到

$$r_0=r_{00}=\frac{1}{4},r_{01}=0,r_{10}=\frac{1}{4},r_1=r_{11}=\frac{1}{5}$$

10.2.3 到达吸收状态 j 的概率

对例 10 - 11 中的转移概率矩阵进行分块，得到

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.25 & 0 & 0.50 & 0.25\\ 0.20 & 0.20 & 0 & 0.60\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$

对一般的吸收马尔可夫链的转移概率矩阵，有类似的分块。最后得到矩阵 **S**，**T**，**0**，**I**，其中

(1) **S** 是 $t\times t$ 方阵

(2) **T** 是 $t\times(n-t)$ 矩阵

(3) **0** 是 $(n-t)\times t$ 矩阵

(4) **I** 是 $(n-t)\times(n-t)$ 方阵

考虑从非常返状态 i 出发、到达吸收状态 j 的概率。这个问题可以通过计算矩阵乘积 **QT** 得到。

【例 10 - 13】 在例 10 - 11 中，当前状态为 1，计算到达吸收状态的概率。

解： 直接计算得到

$$\mathbf{QT}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.50 & 0.25\\ 0 & 0.60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

当前状态为 1，那么被状态 2 吸收的概率为 1/6，被状态 3 吸收的概率为 5/6。

§10.3 多状态模型

涉及到多元风险模型的很多精算问题可以在多状态框架下建模。例如，对残疾保险，保险人对每个被保险人加以分类，状态可分为正常（active）、残疾（disabled）、死亡（deceased）。一个当前处于正常状态的被保险人以后可能会到达残疾状态或死亡状态。类似地，一个当前处于残疾状态的被保险人以后可能会到达正常状态或死亡状态。甚至于对单个生命的死亡模

型也可以看作为一个二状态模型，此时状态是生存和死亡，死亡状态是吸收状态。

分析多状态多元风险模型的基本工具是马尔可夫过程。

【例 10－14】 保险公司为雇主提供团体残疾保险。当雇员处于残疾状态时，每月保险公司支付 500 元。保险公司应用三状态马尔可夫链对每份保单建模，时间单位为月。

以状态 0，1，2 分别表示正常、残疾、死亡。设转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.993 & 0.002 & 0.005\\ 0.001 & 0.949 & 0.050\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

图 10－2 给出了该马尔可夫链的示意图。

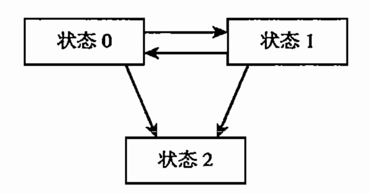


图 10－2　残疾保险马尔可夫链

假设一个雇员的初始状态为 0，计算到雇员死亡为止保险公司预期支付的总额。

解： 由 10.2.1，从状态 0 出发，处于状态 1 的月数的期望值为 Q_{01}，其中 **Q** 为马尔可夫链的基本矩阵，由下式给出

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.993 & 0.002\\ 0.001 & 0.949\end{bmatrix}\right)^{-1}\approx\begin{bmatrix}143.662 & 5.634\\ 2.817 & 19.718\end{bmatrix}$$

因此 $Q_{01}=5.634$，保险公司预期支付的总额为

$$500\times 5.634=2\ 817.00$$

【例 10－15】 在例 10－14 的模型中，假设每个正常状态的雇员按月缴纳均衡净保费，但在残疾状态不缴纳保费。不考虑利率的影响。

（1）计算月缴均衡净保费；

（2）对处于正常状态的雇员，计算净保费准备金；

（3）对处于残疾状态的雇员，计算净保费准备金。

解：（1）由例 10－14 的基本矩阵 **Q**，即知 $Q_{00}=143.662$ 为处于状态 0 的期望月数。应用平衡原理，可得月缴均衡净保费为

$$P=\frac{2\ 817}{143.662}=19.61$$

（2）由于转移概率是常数，那么在处于正常状态的任意时刻，未来的期望支付和期望保费是相等的。从而，净保费准备金为 0。

（3）对处于残疾状态的雇员，处于残疾状态的期望月数是 19.718，而回到正常状态的期望月数是 2.817。此时，净保费准备金为

$$500\times19.718-19.61\times2.817=9\ 803.92$$

另一个可以借助于多状态模型加以分析的有趣的专题是 CCRC（continuing care retirement community）模型。CCRC 是对老年人提供永久住所和照料的单位。CCRC 包括独立生活单元（ILU）、临时照料场所（TNF）、永久照料场所（PNF）。处于临时照料场所的个人可能会返回独立生活单元。但处于永久照料场所的个人将一直在那，直到死亡。因此 CCRC 中的个人所处的状态可通过四状态马尔可夫链建模。状态分别如下：

状态 0：个人处于独立生活单元

状态 1：个人处于临时照料场所

状态 2：个人处于永久照料场所

状态 3：死亡。（状态 3 是吸收状态）

图 10－3 给出了 CCRC 模型的示意图。

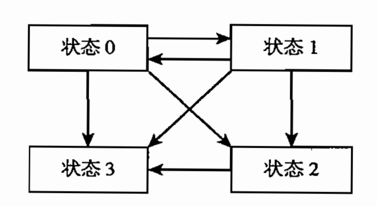


图 10－3　CCRC 模型的示意图

【例 10－16】 在 CCRC 模型中，假设时间单位为月。在开始时，所有的老年人都处于状态 0。在处于状态 0，1，2 时，每月的开支分别为 1 200 元，2 500 元，3 500 元。而当到达状态 3 时，一次性开支为 1 000 元。不考虑利率的影响。设转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.96 & 0.02 & 0.01 & 0.01\\ 0.28 & 0.62 & 0.05 & 0.05\\ 0.00 & 0.00 & 0.92 & 0.08\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（1）对刚进入 CRCC 的老年人，计算未来的期望开支的总额。

（2）对当前处于状态 1 的老年人，计算未来的期望开支的总额。

（3）假设监管部门要求 CRCC 持有的准备金是所有的期望开支的 70%。当老年人从状态 0 直接到达状态 2 时，计算准备金的减少量。

解：（1）由基本矩阵 **Q**，得到马尔可夫处于状态 0，1，2 的月数。这里

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1} = \left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.96 & 0.02 & 0.01\\0.28 & 0.62 & 0.05\\0.00 & 0.00 & 0.92\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\approx \begin{bmatrix}39.58 & 2.08 & 6.25\\29.17 & 4.17 & 6.25\\0 & 0 & 12.50\end{bmatrix}$$

当初始状态为 0 时，未来的期望开支的总额为

$$1\,200\times39.58+2\,500\times2.08+3\,500\times6.25+1\,000=75\,571$$

（2） 当初始状态为 1 时，未来的期望开支的总额为

$$1\,200\times29.17+2\,500\times4.17+3\,500\times6.25+1\,000=68\,304$$

（3） 当状态直接由 0 变为 2 时，从状态 2 出发，马尔可夫处于状态 2 的月数为 12.50。因此未来的期望开支的总额为

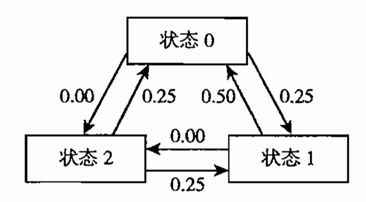
$$3\,500\times12.50+1\,000=44\,750$$

从状态 0 直接到达状态 2 时，准备金的减少量为

$$0.70\times(75\,571-44\,750)=23\,115$$

习　题

1. 某个三状态的马尔可夫链的转移概率由下图确定



另外 $P_{00}=0.75$，$P_{11}=0.50$，$P_{22}=0.5$。

（1） 给出转移概率矩阵 **P**。

（2） 假设初始状态向量为 $\pi_0=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。计算状态向量 π_2。

（3） 如果在时刻 10 的状态为 1，计算在时刻 12 时处于状态 1 的概率。

（4） 如果在时刻 2 的状态为 2，计算状态向量 π_4。

（5） 给出该过程的状态等价类，并说明状态的常返或非常返性。

（6） 对非常返状态 i，计算 r_i。

（7） 设过程的初始状态为 2，计算过程处于状态 2 的期望次数。

（8） 设过程的初始状态为 2，计算过程能够到达状态 0 的概率。

2. 某城市每天内的天气有雨和晴两种状况。雨天和晴天的变化构成一个马尔可夫链。如当天是雨天，那么下一天还是雨天的可能性是 40%。如

当天是晴天，那么下一天还是晴天的可能性是80%。

(1) 给出转移概率矩阵 **P**。

(2) 如当天是雨天，计算三天后是雨天的概率有多大?

(3) 计算长期来说雨天的概率（即很久以后的某天是雨天的概率）。

(4) 随机选择很久以后的不同的两天，那么两天都是雨天的概率有多大?

(5) 随机选择很久以后的相邻的两天，那么两天都是雨天的概率有多大

3. 对习题2中的模型，保险人同意对一年以后举行婚礼的某天不会有雨承保。婚礼定在星期五，但如有特殊情况，可推迟到星期六，甚至星期天。如未来的三天之内都有雨，保险人同意补偿5万元。设年利率为5%，计算该保险的趸缴保费。

4. 某财险公司每年对1 000名投保的驾驶员分类，共分成三类：高风险、中等风险、低风险。这三类状态（记为0，1，2）之间的转换构成一个马尔可夫链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.30 & 0.70 & 0\\ 0.20 & 0.30 & 0.50\\ 0.10 & 0.20 & 0.70\end{pmatrix}$$

保险公司对三类驾驶员确定的年度保费分别为1 200，600，400。

(1) 在时刻0时，所有的驾驶员都属于中等风险类。那么在第3年初保险公司期望收取的保费是多少?

(2) 经过很多年后，保险公司每年期望收取的保费是多少?

5. 考虑四状态的马尔可夫链，基本矩阵如下

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1}=\begin{pmatrix}1.6 & 1.2 & 0.8 & 0.4\\ 1.2 & 2.4 & 1.6 & 0.8\\ 0.8 & 1.6 & 2.4 & 1.2\\ 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6\end{pmatrix}$$

以 $T=\{1,2,3,4\}$ 表示非常返状态。

(1) 设过程初始状态为2，计算过程在到达吸收状态之前到达状态4的期望次数。

(2) 设过程初始状态为4，计算过程在到达吸收状态之前处于状态4的期望次数。

(3) 设过程初始状态为2，计算过程在到达吸收状态之前总能到达状态4的概率。

6. 某个被保险人的状况可以用三状态马尔可夫链来描述，状态0表示正常，状态1表示残疾，状态2表示死亡。每年内状态之间的转移可用如

下转移概率矩阵描述

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.85 & 0.10 & 0.05\\ 0.15 & 0.75 & 0.10\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1) 对当前正常的个体，计算在死亡之前发生残疾的概率。

(2) 对当前残疾的个体，计算在死亡之前恢复正常的概率。

(3) 对当前正常的个体，计算直到死亡之前的期望年数。

(4) 对当前残疾的个体，计算直到死亡之前的期望年数。

(5) 计算出现残疾时，残疾持续时间的期望年数。

(6) 对当前正常的个体，计算发生残疾的次数的期望。

7. 某地规定，对在新年夜醉酒驾驶者，从 1 月 1 日起暂时禁止驾驶。在规定时间内，对这些驾驶者，如被发现驾驶，将吊销驾照，一年后允许驾驶。已知每年有 5% 的驾驶者被暂时禁止驾驶，而这些驾驶者中 40% 被发现驾驶。如果人口保持不变，驾驶者之间相互独立，驾驶状态的变化只发生在 1 月 1 日。计算驾驶者被暂时禁止驾驶的极限概率。

8. 假设出租司机只在 A 和 B 两地运行。如在 A 地，那么有乘客去 B 地的概率为 0.80。如在 B 地，那么有乘客去 A 地的概率为 0.30。不同类型运行路线的期望利润如下

运行路线类型	期望利润
A 地	1.00
B 地	1.20
从 A 地到 B 地	2.00
从 B 地到 A 地	2.00

计算长期来看每次运行的期望利润。

9. 一台机器的可能状态记为 A，B，C，D。每年内状态之间的转换可用一个马尔可夫链来描述，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.8 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0.75 & 0 & 0 & 0.25\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

设机器的初始状态为 A。如三年后机器状态为 A，那么需支付 500 元。给定贴现因子 $v=0.9$，计算未来可能开支在时刻 0 时的精算现值。

10. 一名教练在赛前可以对队员进行高强度和低强度两类训练。如果团队在上局赢了，那么之后为高强度和低强度的可能性相同。如果团队在上局输了，那么之后的训练总是高强度的。另外，经过低强度和高强度训

练后，下局赢的概率分别为0.40和0.80。从长远来看，教练采用高强度训练的频率是多少？

11. 长期护理保险精算师应用四状态马尔可夫链对被保险人建模，状态分别为：正常（从未发生残疾）、残疾（在长期护理机构）、康复（曾经发生残疾）、死亡。所有的被保险人在投保时都处于正常状态。状态的转移只发生在年末，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.94 & 0.02 & 0.00 & 0.04\\ 0.00 & 0.40 & 0.30 & 0.30\\ 0.00 & 0.06 & 0.82 & 0.12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（1）对新参保的个人，未来处于各个非常返状态的期望年数是多少？新参保的个人预期生存年数是多少？

（2）对当前处于残疾状态的个人，未来处于各个非常返状态的期望年数是多少？

（3）对当前处于康复状态的个人，未来处于残疾状态的期望年数是多少？

（4）对新参保的个人，在6年末人处于正常状态的概率是多少？

12. 以下三状态马尔可夫链用来对订购某种杂志的个人进行建模：状态1，2，3分别表示生存并订阅、生存未订阅、死亡。状态的转移只发生在年末，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.65 & 0.32 & 0.03\\ 0.25 & 0.72 & 0.03\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

设某人在年初订阅了杂志，计算此人未来处于生存未订阅状态概率。

13. 在12题中，对年初订阅杂志的个人，计算未来订阅杂志的期望年数。

14. 在工作日上班时，员工的计算机处于以下三种状态之一：状态1表示运行；状态2表示一天关机；状态3表示连续两天关机。状态的转移只发生在工作日下班时。假设状态的转移可用三状态马尔可夫链来描述，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.975 & 0.025 & 0.00\\ 0.90 & 0.00 & 0.10\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

计算员工在上班时计算机处于运行状态的极限概率。

15. 患有某种疾病的个人可划分为三类状态：状态1表示严重，状态2表示缓和，状态3表示恢复或死亡。状态的转移只发生在年末。

对处于严重状态的患者，30%的人在下年初处于缓和状态，10%的人在下年初或者恢复、或者死亡。

对处于缓和状态的患者，20%的人在下年初处于严重状态，30%的人在下年初或者恢复、或者死亡。

对处于恢复状态的个人，对疾病就有免疫力。因此转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.60 & 0.30 & 0.10\\ 0.20 & 0.50 & 0.30\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

假设处于严重状态患者和缓和状态患者的治疗成本分别为10和1。对当前年初处于严重状态的患者，计算预期治疗费用的总额。

第二篇 寿险精算实务

第十一章 人寿保险的主要类型

学习目标

☐ 了解人寿保险的主要类型，包括传统人寿保险和新型人寿保险的基本分类

☐熟悉新型人寿保险中分红保险、投资连结保险、万能保险的主要特征以及我国的监管规定。了解新型保险产品发展的社会背景，加深理解社会变化对产品创新的影响

§11.1 传统人寿保险

11.1.1 定期寿险

定期寿险指以死亡为给付保险金条件，且保险期限为一定年限的人寿保险。该年限可以约定为一固定年限，如保险期限为十年、二十年等，也可以约定为从投保时至某一特定年龄（如至六十岁）。简单地讲，定期寿险在合同中约定一定期间为保险期限，如被保险人在保险期限内死亡，保险人即给付受益人约定的保险金；如果被保险人在保险期限届满时仍然生存，保险合同即行终止，保险人无给付义务，也不退还已收的保险费。对于被保险人而言，定期寿险最大的优点是可以用极为低廉的保险费获得一定期限内较高程度的保险保障，而不足之处在于如被保险人在保险期限届满时仍然生存，则不能得到保险金的给付，而且已缴纳的保险费不再退还。保险公司在设计定期寿险时可以不设定现金价值，即退保时不能获得退保金。

11.1.2 终身寿险

终身寿险指以死亡为给付保险金条件，且保险期限持续到死亡时的人寿保险。终身寿险可看做是一种不定期的死亡保险，即保险合同中并不规定保险期限，保险期间自合同有效之日起，至被保险人死亡为止。无论被保险人何时死亡，保险人都负有给付保险金的义务。对于被保险人来说，

终身保险的最大优点是可以得到永久性保障，而且有获得退保金的权利。如投保人中途退保，可以得到一定数额的现金价值（或称为退保金）。终身保险按照缴费方式可分为：（1）普通终身保险，在保单有效期间内需要持续分期缴费。（2）限期缴费终身保险，其保险费在规定期限内分期缴付，缴费期限之后不再缴付保险费，但仍享有保险保障。缴纳期限可以规定为一定的固定年限，如缴费期限为五年、十年等，也可以规定缴费到某一特定年龄（如缴费至五十岁）。（3）趸缴终身保险，在投保时一次性缴清保险费，这种也可以看作是限期缴费方式的一种极端形式。

11.1.3　两全保险

两全保险指在保险期间内以死亡或生存为给付保险金条件的人寿保险。两全保险也称为生死合险，是指将定期死亡保险和生存保险（生存保险是指以被保险人在保险期满或合同约定时刻仍生存为给付保险金条件的人寿保险）联合起来的保险形式。对于两全保险，被保险人在保险合同规定的年限内死亡、或在合同约定时点仍生存这两种情况下，保险人均按照合同给付保险金。两全保险是储蓄性极强的一种保险，两全保险的净保费由风险保险费和储蓄保险费组成，风险保险费用于当年死亡给付，储蓄保险费则逐年积累，既可用于中途退保时支付退保金，也可用于生存给付。由于两全保险既保障死亡又保障生存，因此，两全保险不仅能使受益人得到保障，同时也能使被保险人本身享受一定的保险合同利益。

11.1.4　年金保险

年金保险指以生存为给付保险金条件，按约定分期给付生存保险金，且分期给付生存保险金的间隔不超过一年的人寿保险。年金保险的主要形态有：

1. 按缴费方式划分。年金保险可以分为：（1）趸缴年金。趸缴年金是在投保时由投保人一次性缴清保费的年金保险。即保险费一次性缴清后，于约定时间开始，由年金受领人按期领取年金。（2）期缴年金。分期缴付保费的年金保险称为期缴年金，即由投保人分期缴付保险费，然后于约定时间开始，由年金受领人按期领取年金的年金保险，而初次年金领取日通常在缴费期间之后。

2. 按给付开始日期划分。年金保险可以分为：（1）即期年金。合同成立后，保险人即按期给付年金，这种年金称为即期年金。由于即期年金在购买后保险公司就开始给付，保费通常采用趸缴形式，称为趸缴即期年金。（2）延期年金。合同成立后，经过一定时期或达到一定年龄后才开始给付的年金称为延期年金。延期年金的保险期间可以划分为两个部分：累积期间，即从投保人开始缴费到保险公司开始给付的期间；给付期间，即保险

公司向年金领取人给付年金的期间。

3. 按给付方式（或给付期间）划分。年金保险可以分为：（1）终身年金。年金受领人在生存时可以一直领取年金，直到死亡为止，这种年金称为终身年金。（2）定期生存年金。以被保险人在约定期间内生存为给付条件，如被保险人在该约定期限内死亡，则年金给付立即停止；如被保险人在该约定期限届满时仍然生存，则给付在该期限届满时终止。这种年金被称为定期生存年金。（3）最低保证年金（又称为 n 年确定期年金）。定期生存年金的受领人会由于被保险人过早死亡而过早丧失领取年金的权利，最低保证年金正是为了解决这一问题而产生的。最低保证年金又分为两种：一种是确定给付年金，即规定了一个最低保证年数，在规定期间内无论被保险人生存与否均可得到年金给付。另一种是退还年金，即当年金受领人死亡而其年金领取总额低于所缴保费时，保险人以现金方式一次或分期退还其差额。

4. 按被保险人数划分。年金保险可以分为：（1）个人年金。以一个被保险人生存作为年金给付条件的年金称为个人年金。（2）联合年金。以两个或两个以上的被保险人均生存作为年金给付条件的年金称为联合年金，即年金的给付在数个被保险人中首例死亡发生时即停止。（3）最后生存者年金。以两个或两个以上的被保险人中至少尚有一个生存作为年金给付条件且给付金额不发生变化的年金称为最后生存者年金，即年金的给付持续到最后一例死亡为止，且给付金额不随被保险人死亡而改变。（4）联合及生存者年金。以两个或两个以上的被保险人中至少尚有一个生存作为年金给付条件，但给付金额随着被保险人数的减少而进行调整的年金称为联合及生存者年金，即年金的给付持续到最后一例死亡为止，但给付金额根据仍存活的被保险人数进行相应的调整。

5. 按给付额是否变动划分。年金保险可以分为：（1）定额年金，每次按固定数额给付的年金称为定额年金。这种年金的给付额是固定的，不随投资收益水平的变动而变动。（2）变额年金，变额年金的累积价值和每次给付金额将随着独立投资账户的投资业绩而调整。这种年金的设计用来克服定额年金在通货膨胀条件下保障水平降低的缺点。

§11.2 分红保险

11.2.1 分红保险的概念

分红保险是指保险公司将其实际经营结果优于定价假设所产生的盈余，按一定比例向保单持有人进行分配的人寿保险产品。这里的保单持有人是

指按照合同约定，享有保险合同利益及红利请求权的人。

分红保险最早来源于相互制保险公司的产品设计，由于在相互制保险公司，投保人不仅具有投保客户的性质，还具备有相互制保险公司股东的身份，因此在保险产品设计中将公司盈利按一定的比例在客户中进行分配就是十分必要和合理的了。在后来，出于与相互制保险公司竞争的需要，一些股份制保险公司也开始开发类似的带有分红特征的保险产品。股份制保险公司开发分红产品时，为保证对分红保单持有人的公平，一般要求分红保险产品与非分红保险产品，以及分红保险产品与其所附加的非分红保险产品必须分设账户，独立核算。

分红产品虽然与传统产品存在分红的差异，但分红产品的责任形态与传统产品基本一样，也可开发成两全保险、终身寿险、年金保险、定期寿险等形态，都具有保险利益确定的特点，由于分红产品开发过程中主要的利差来源是利差，因此一般对储蓄因素比较少的定期寿险没有分红产品。

11.2.2　分红保险的主要特点

1. 保单持有人享受经营成果。分红保险不仅能够提供合同约定的各种保障，同时保险公司每年要将分红险种产生的部分盈余以红利的形式分配给保单持有人。目前中国保监会规定保险公司应至少将分红业务当年度可分配盈余的70%分配给客户。这样投保人就可以与保险公司共享经营成果，与不分红保险相比增加了投保人的获利机会。

2. 保单持有人承担一定的风险。由于每年保险公司的经营状况不一样，客户所能分到的红利也会不一样。在保险公司经营状况良好的年份，保单持有人会分到较多的红利；但如果保险公司的经营状况不佳，保单持有人能分到的红利就会比较少，甚至没有。因此，分红保险使保险公司和保单持有人在一定程度上共同承担了风险。

3. 定价的精算假设比较保守。寿险产品在定价时主要以预定死亡率、预定利率和预定费用率三个因素为依据，这三个预定因素与实际情况的差距直接影响到寿险公司的经营成果。对于分红保险，由于寿险公司要将部分盈余以红利的形式分配给客户，所以一般在定价时对精算假设估计较为保守，导致保单价格较高，从而在实际经营过程中可能产生更多的可分配盈余（或红利）。

4. 保险给付、退保金中含有红利。分红保险的被保险人身故后，受益人在获得保险金额时，还可以得到未领取的累积红利及其利息。在满期给付时，被保险人在获得保险金额的同时，还可以得到未领取的累积红利及其利息。分红保险的保单持有人在退保时，也可领取未领取的累积红利及其利息。

11.2.3 保单红利

分红产品从本质上说是一种保户享有保单盈余分配权的产品，即将寿险公司的盈余，如死差益、利差益、费差益等，按一定比例分配给保单持有人。分配给保户的保单盈余称为保单红利。

1. 利源。分红保险的保单红利实质上是保险公司盈余的分配。盈余是保单资产份额高于准备金的部分。每年由公司的精算等相关部门计算盈余中可作为红利分配的数额，并由公司董事会基于商业判断予以决定，此决定分配的数额称之为可分配盈余。盈余（或红利）的产生是由很多因素决定的，但最为主要的因素是利差益、死差益和费差益。

死差益：对于包括死亡保险金给付责任的寿险，死差益是由于实际死亡率小于预定死亡率而产生的利益；利差益：当保险公司实际投资收益率高于预定利率时，则产生利差益；费差益：当公司的实际营业费用少于预计营业费用时所产生的利益。除了以上三个主要来源以外，还有其他的盈余来源。包括：

（1）失效收益。寿险合同中途失效时，如果保险公司支付给保单持有人的解约金小于保单所积存的资产份额，则保险公司将获得收益。

（2）预期残疾给付、意外给付、年金给付额等与实际给付额的差额。

（3）预期利润。

2. 红利分配。根据我国《个人分红保险精算规定》中的要求：红利的分配应当满足公平性原则和可持续性原则。

红利分配的公平性原则包含两个方面：一是分红产品经营的结果在保险公司股东与客户之间的公平分配；二是分配给客户的红利在客户之间的分配是公平的。这两个公平性的要求在我国是依赖于以下几个制度设计来保证的。保险公司股东与客户之间公平的实现依赖于两个制度，第一个制度是《个人分红保险精算规定》要求保险公司每一会计年度向保单持有人实际分配盈余的比例不低于当年可分配盈余的70%，第二个制度是要求分红账户需独立核算。这两个制度要求较好地确定了保险公司股东与投保人对分红业务盈余的分配权利关系。客户与客户之间的公平是依赖于要求可分配盈余在客户之间的分配要采用盈余贡献法的原则，这样保证了不同的保险客户对盈余的分配是相对公平的。这里要强调一个分配过程是“相对公平”的概念，因为虽然分红制度设计的目标是追求分配过程的公平性，但由于要考虑到分配过程的可操作性，一些地方不可避免地要求采用简化的处理方式。

红利分配的可持续性原则体现在分红精算规定允许保险公司持有一定的分红特别储备。该规定允许保险公司每年在核算出分红账户盈余之后，

可以并不将所有盈余在客户与股东之间进行分配，可以保留一部分盈余形成分红特别储备，这些保留下来的分红特别储备在分红账户经营情况不佳的情况下能够继续保持一定的分红水平。由于分红储备最终都要以可分配盈余的形式进行分配，因此从长期来看，保险公司并不是把当期盈余都在当期全部分配仍然符合公平性的原则。但由于分红特别储备改变了分红账户盈余分配的时间，对不同期间的客户而言，保留过多的分红特别储备将带来不公平的问题，因此公司分红储备的水平应保持在适当的水平。

红利分配有两种方式：（1）现金红利。直接以现金的形式将盈余分配给保单持有人；（2）增额红利。在整个保险期限内每年以增加保额的方式分配红利。目前这两种红利分配方式在我国都存在，由于现金红利的方式最早是由北美国家采用的，有时也被称为“美式分红”，增额红利的分配方式最早是由英国保险企业采用，有时也被称为“英式分红”，但无论采用哪种红利方式，红利的来源都是分红业务经营所产生的盈余。

§11.3　万能保险

11.3.1　万能保险的含义

万能保险是一种缴费灵活、保额可调整、非约束性的寿险。保单持有人在缴纳一定量的首期保费后，也可以按自己的意愿选择任何时候缴纳任何数量的保费，只要保单的账户价值足以支付保单的相关费用，有时甚至可以不再缴费。而且，保单持有人可以在具备可保性前提下，提高保额，也可以根据自己的需要降低保额。

从万能保险经营的流程上看，保单持有人首先缴纳一笔首期保费，首期保费有一个最低限额，首期的各种费用支出首先要从保费中扣除。其次，根据被保险人的年龄、保险金额计算的死亡给付分摊额等费用，要从保费中扣除。死亡给付分摊是不确定的，而且常常低于保单的预计最高水平。进行了这些扣除后，剩余部分就是保单最初的账户价值。这部分价值通常是按保险公司确定的结算利率累积到期末，成为期末账户价值，保险公司确定结算利率时一般要参照万能账户的投资收益情况。为避免保单过早终止，许多万能保险在保单的早期年度会收取一定的退保费用，账户价值扣除退保费用就是投保人退保时可以领到的部分，此即当期保险合同现金价值。

保单的第二个周期（通常一个月为一周期），期初的保单账户价值为上一周期期末的账户价值额。在这一周期，保单持有人可以根据自己的情

况缴纳保费，如果首期保费足以支付第二个周期的费用及死亡给付分摊额，在第二周期保单持有人就可以不缴纳保费。本期的死亡给付分摊额及费用分摊则要从上期期末账户价值余额及本期缴纳的保费中扣除，余额就是第二期期初的现金价值余额。这部分余额按照新投资利率累积至本期末，成为第二周期的期末现金价值余额。这一过程不断重复，一旦账户价值不足以支付死亡给付分摊额及费用，又没有新的保费缴纳，该保单就失效。

万能保险的经营透明度高。保单持有人可以了解到该保单的内部经营。保单持有人可以得到有关保单的相关因素（如保费缴纳、死亡给付、投资收益、费用率、现金价值）之间相互作用所产生的各种预期结果。保单账户价值每年随保费缴纳情况、费用估计、死亡率及结算利率的变化而变化。净风险保额与账户价值之和就是全部的死亡给付额。保单经营的高透明度也并不意味着保单持有人能对保单价值做出精确估计，而是可以了解保单基金的支配情况。万能保险具有高透明度的一个重要因素是保单的账户价值与净风险保额是分别计算的，即具有非约束性。

11.3.2 万能保险产品的起源

万能保险产品的概念最早出现在20世纪70年代，与传统保险产品和分红保险产品相比，它的发展时间较短，但在北美市场，万能保险产品的占比已超过了传统保险产品和分红保险产品。万能保险产品的出现受到了以下社会环境变化的影响。

首先是市场利率的波动。由于利率水平的波动特别是大幅上升，使得原有的确定利率产品明显不能满足市场需求，传统保险产品设计中所隐含的3%到4%的利率水平在利率水平大幅上升时无法应对通货膨胀的冲击。同时如果在产品设计中隐含过高的利率水平又将使保险公司面临较大到风险，长期的高利率保证是保险公司无法承担的风险。

二是共同基金的快速发展为保险产品设计提供了新的思路。如果说传统的保险产品在金融行业的竞争对手是银行，是银行存款产品的话，随着金融市场的发展，特别是二战后证券市场的发展，共同基金的快速发展使保险公司面临新的竞争压力。而共同基金的账户价值概念又为万能保险产品的设计提供了较好的参考。在我国保险市场，随着基金的发展，保险公司在开发储蓄产品时也面临同样的问题。

三是社会、经济环境的变化。这些变化包括工作的流动性增大、家庭住址变动的增加、社会财富的增加等，这些都对传统对保险产品提出了挑战。投保人社会状态的更加不稳定性，使得保险客户对保险产品的灵活性需求大大增加，因为他们需要更加频繁地根据自己缴费能力的变化调整缴费水平，需要根据家庭状况的变化不断调整保险保障水平。社会财富在二

战后的繁荣期经历了快速的增长，如何让这些财富保值、增值也越来越成为客户的需求，投资的要求变得更为迫切，保险公司不能仅仅满足于为客户提供保障的需求了。万能保险的灵活性和账户价值的概念都很好地契合了这些需求。

11.3.3　万能保险产品的主要特征

1. 死亡给付模式。万能保险主要提供两种死亡给付方式，投保人可以任选其一，而且给付方式也可依据保单持有人意愿随时改变。这两种方式习惯上称为 A 方式和 B 方式。A 方式是一种均衡给付的方式；B 方式是直接随保单现金价值的变化而改变的方式。

在 A 方式中，死亡给付额固定，净风险保额每期都进行调整，使得净风险保额与现金价值之和成为均衡的死亡给付额。这样，如果现金价值增加了，则净风险保额就会等额减少。反之，如现金价值减少了，则净风险保额就会等额增加。这种方式与其他传统的具有现金价值的保单相类似。

在方式 B 中，规定了死亡给付额为均衡的净风险保额与现金价值之和。这样，如果现金价值增加了，那么死亡给付额会等额增加。

《个人万能保险精算规定》中规定，在万能保险合同有效期内，如被保险人身故，保险公司可按照身故时该保险年度的保险金额给予保险金，也可按照保险金额与当时个人账户价值之和作为身故给付。在保险合同有效期内，风险保额应大于零。

2. 保费缴纳。万能保险的投保人可以用灵活的方法来缴纳保费。保险公司一般会对每次缴费的最高和最低保费做出规定，只要符合保单规定，投保人可以在任何时间不定额地缴纳保费。大多数保险公司仅规定第一次保费必须足以涵盖第一个月的费用和死亡成本，但实际上大多数投保人支付的首次保费会远远高于规定的最低金额。

这种灵活的缴费方式也带来了万能保险容易失效的缺点，为了解决这一问题，保险公司的一般做法是根据保单计划所选择的目标保费，向投保人寄送保费通知书，以提醒其缴费。另外投保人一般也会同意签发其银行账户每月预先授权提款单据。另一种做法是保险公司按投保人规划的保费金额向投保人寄送保费账单，投保人按账单金额缴纳保费。

3. 结算利率。保险公司应当为万能保险设立单独账户。在单独账户中，不得出现资产小于负债的情况。一旦资产小于负债，保险公司应当立即补足资金；同时，因结算利率低于实际投资收益率而产生的收益也应被转出单独账户。

万能保险的保单可以提供一个最低保证利率。

《个人万能保险精算规定》中规定，万能保险的结算利率不得高于单

独账户的实际投资收益率，二者之差不得高于2%。

单独账户的实际收益率低于最低保证利率时，万能保险的结算利率应当是最低保证利率。

保险公司可以自行决定结算利率的频率。

4. 费用收取。万能保险保单只可收取以下几种费用：

（1）初始费用，即保费进入个人账户之前所扣除的费用。

（2）风险保险费，即保单风险保额的保障成本。

（3）保单管理费，即为了维持保险合同有效向投保人收取的服务管理费。该费用可以是固定的，也可以是按比例提取的。

（4）手续费，保险公司可在提供部分领取等服务时收取，用于支付相关的管理费用。

（5）退保费用，即在保单中途退保或部分领取时保险公司收取的费用，用于弥补尚未摊销的保单获得成本。我国《个人万能保险精算规定》中规定，退保费用在第一保单年度不得超过领取部分个人账户价值的10%，保单生效5年后该项费用应降为零。

§11.4 投资连结保险

11.4.1 投资连结保险的概念

我国保险监管规定中定义的投资连结保险是指包含保险保障功能并至少在一个投资账户拥有一定资产价值的人身保险产品。投资连结保险的投资账户必须是资产单独管理的资金账户。投资账户应划分为等额单位，单位价值由单位数量及投资账户中资产或资产组合的市场价值决定。投保人可以选择其投资账户，投资风险完全由投保人承担。除有特殊规定外，投资连结保险的投资账户是独立的，即与保险公司管理的其他资产或其他投资账户之间不得存在债权、债务关系，也不承担连带责任。投资连接保险也是在新的社会环境下保险公司满足客户投资理财需求的一个重要创新。

投资连结保险产品的保单现金价值与独立投资账户（或称“基金”）资产相匹配，现金价值直接与独立投资账户资产投资业绩相连，一般没有最低保证。大体而言，独立账户的资产免受保险公司其他负债的影响，资本利得或损失一旦发生，无论其是否实现，都会直接反映到保单的现金价值上。不同的投资账户可以投资在不同的投资工具上，比如股市、债券、货币市场等。投资账户可以是外部现有的，也可以是公司自己设立的。在约定条件下，保单持有人可以在不同的基金间自由转换，而不需支付额外的费用。

中国保监会认可的投资连结保险产品应具备以下特点：（1）该产品必须包含一项或多项保险责任；（2）该产品至少连结到一个投资账户上；（3）保险保障风险和费用风险由保险公司承担；（4）投资账户的资产单独管理；（5）保单价值应当根据该保单在每一投资账户中占有的单位数及单位价值确定；（6）投资账户中对应某张保单的资产产生的所有投资净收益（损失），都应当划归该保单；（7）每年应当至少确定一次保单的保险保障；（8）每月应当至少确定一次保单价值。

《个人投资连结保险精算规定》中还规定："投资连结保险产品及投资账户均不得保证最低投资回报率"；"在保险合同有效期内，风险保额应大于零。"

11.4.2　投资连结产品的主要特征

1. 投资账户设置。投资连结保险均设置单独的投资账户。保险公司收到保险费后，按照事先的约定将保费的部分或全部分配至投资账户，并转换为投资单位。投资单位是为了方便计算投资账户的价值而设计的计量单位。投资单位按照一定的方法确定价格，保险公司根据某一投资账户的投资单位价格和分配给该账户的保费计算投资单位数。

2. 保险责任和保险金额。投资连结保险作为保险产品，其保险责任与传统产品类似，不仅有死亡给付、残疾给付、生存领取等基本保险责任，一些产品还加入了豁免保险费、失能保险金、重大疾病等保险责任。

在死亡保险金额的设计上，存在两种方法：一种是给付保险金额和投资账户价值两者较大者（方法 A），另一种是给付保险金额和投资账户价值之和（方法 B）。方法 A 的死亡给付金额在保单年度前期是不变的，当投资账户价值超过保险金额后，随投资账户价值波动。方法 B 的死亡给付金额随投资账户价值而不断波动，但风险保额（死亡给付金额与投资账户价值之差）保持不变。

3. 保险费。目前投资连结保险大多引入了一定的灵活缴费机制，并且有不同的设计方式。一种方式是在固定缴费基础上增加保险费假期（Premium Holiday），允许投保人不必按约定的日期缴费，而保单照样有效，避免了因为超过 60 天宽限期而导致的失效。另外还允许投保人在缴纳约定的保险费外，可以随时支付额外的保险费，增加了缴费的灵活性。另一种方式是取消了缴费期间、缴费频率、缴费数额的概念，即投保人可随时支付任意数额（有最低数额的限制）的保险费，并按约定的计算方法进入投资账户。这种方式对于客户来说灵活性最高，但降低了保险公司对保费支付的可控性及可预测性，同时也提高了对保险公司内部操作系统的要求。

4. 费用收取。与传统非分红保险及分红保险相比，投资连结保险在费

用收取上相当透明。保险公司扣除的费用应详细列明其性质和使用方法。根据中国保监会的规定，投资连结保险产品仅可收取以下费用：

（1）初始费用，即保险费进入个人投资账户之前所扣除的费用。

（2）买入卖出差价，即投保人买入和卖出投资单位的价格之间的差价。

（3）风险保险费，即保单风险保额的保障成本。

（4）保单管理费，即为维持保险合同有效而向投保人收取的服务管理费用。该项费用在首年度与续年度可以不同。

（5）资产管理费，按账户资产净值的一定比例收取。

（6）手续费，保险公司可在提供部分领取和账户转换等服务时收取，用以支付相关的费用。

（7）退保费用，即在保单中途退保或部分领取时收取的费用，用以弥补尚未摊销的保单获得成本。我国《个人投资连结保险精算规定》中规定，退保费用的收取不得高于投保人持有的单位价值或者部分领取对应的单位价值的以下比例：

保单年度	比例（%）
第一年	10
第二年	8
第三年	6
第四年	4
第五年	2
第六年及以后	0

习　题

1. 简述普通型人寿保险的主要类型。
2. 简述分红保险的特点。
3. 简述万能保险的特点。
4. 简述投资连结保险的特点。

第十二章　特殊年金与保险

学习目标

- ☐ 了解特殊形式的年金与保险的精算现值、净保费、毛保费及责任准备金的处理方法
- ☐ 掌握特殊年金中最低保证年金、分期退还年金、现金退还年金精算现值的计算方法
- ☐ 熟悉家庭收入保险、退休收入保单、变额保险产品、可变计划产品等的设计

§12.1　特殊形式的年金

本节我们将讨论如何计算特殊形式年金的精算现值。这里将考察支付期可能长于年金受领人剩余寿命或者含有死亡给付的若干年金保单，这些保单产生于寿险保单的赔付选择权，也可能产生于退休金计划或个人年金保单。以下重点讨论连续支付年金，并通过类比得出年付 m 次年金的相应结果。

12.1.1　最低保证年金（n 年确定期年金）

以连续支付的年金为例，n 年最低保证年金保证支付期为 n 年。随后，如年金受领人仍活着，则继续支付直至死亡。当支付额为 1 时，其现值随机变量为：

$$Z=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{n}|}, & T\leqslant n\\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T>n\end{cases} \tag{12-1}$$

精算现值为：

$$E[Z]=\int_0^n \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}dt+\int_n^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}dt \tag{12-2}$$

用当前支付法可得到精算现值为：

$$\bar{a}_{\overline{n}|}+\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x dt=\bar{a}_{\overline{n}|}+{}_{n|}\bar{a}_x \tag{12-3}$$

$$=\bar{a}_{\overline{n}|}+\bar{a}_x-\bar{a}_{x:\overline{n}|} \tag{12-4}$$

上述精算现值记为 $\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}}$，即：

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}}=\bar{a}_{\overline{n}|}+{}_nE_x\,\bar{a}_{x+n} \tag{12-5}$$

对于年付 m 次的离散年金，则有：

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} + a_x^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \tag{12-6}$$

$$= a_{\overline{n}|}^{(m)} + {}_nE_x a_{x+n}^{(m)} \tag{12-7}$$

12.1.2 分期退还年金

最低保证年金的一种特殊形式为分期退还年金，它保证年金受领人（或受益人）以年金的形式分期领回已缴的毛保费（考虑费用）。设趸缴毛保费为 G，附加费是毛保费的 r 倍，年金的年支付额（率）为 1，则 G 应满足：

$$G = G \cdot r + \bar{a}_{\overline{G}|} + {}_GE_x \bar{a}_{x+G}$$

$$G \cdot (1-r) = \bar{a}_{\overline{G}|} + {}_GE_x \bar{a}_{x+G} \tag{12-8}$$

用整数值 G 尝试并进行插值可解得毛保费 G 的近似值（G 可能是非整数），相应的年金是 G 年最低保证年金。

12.1.3 现金退还年金

另一种年金称为现金退还年金，当年金受领人死亡时，如已领取的年金（不计利息）低于所缴毛保费，则该年金立即将差额一次性支付给受益人。设年金的年支付额（率）为 1，G 是趸缴毛保费，T 是死亡时间，那么现值随机变量为：

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} + (G-T)v^T, & T \leqslant G \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T > G \end{cases} \tag{12-9}$$

精算现值为：

$$E[Z] = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt + \int_0^{G} (G-t)v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt$$

$$= \bar{a}_x + G\bar{A}_{x:\overline{G}|}^{1} - (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{G}|}^{1} \tag{12-10}$$

对分期退还年金来说，当附加费是毛保费 G 的 r 倍时，毛保费 G 应满足下面的（12-11）式：

$$G \cdot (1-r) = \bar{a}_x + G\bar{A}_{x:\overline{G}|}^{1} - (\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{G}|}^{1} \tag{12-11}$$

【例 12-1】 对于在年金领取者 (x) 死亡后继续支付 n 年的连续年金，计算精算现值。

解： 设 T 是 (x) 的死亡时间，给付现值变量为：

$$Z = \bar{a}_{\overline{T+n}|}$$

年金的精算现值为：

$$\int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t+n}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt$$

分部积分后得：

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \int_0^{\infty} v^{t+n}\, {}_tp_x dt = \bar{a}_{\overline{n}|} + v^n \bar{a}_x$$

§12.2　家庭收入保险

12.2.1　n 年家庭收入保险

若被保险人在 n 年内死亡，则开始提供年金给付，直至第 n 年。这种年金的现值为：

$$Z=\begin{cases} v^{T}\bar{a}_{\overline{n-T}|}, & T\leqslant n \\ 0, & T>n \end{cases} \tag{12-12}$$

年金的精算现值为：

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^n v^t \bar{a}_{\overline{n-t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|}\cdot {}_nq_x - \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|}\cdot {}_nq_x - (\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}\cdot {}_np_x) \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ &= \int_0^n v^t\, {}_tq_x\, dt \end{aligned} \tag{12-13}$$

（12－13）式可解释为：对满足 $t<n$ 的 t，只有当（x）死亡时才有给付。

12.2.2　年付 m 次的家庭收入保单

年付 m 次的家庭收入保单有两种形式。一种为年金给付从被保险人死亡所在的 $1/m$ 年区间末开始，这里给付时间的衡量都是从保单签发日开始的。这种保单的精算现值为：

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} - a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \tag{12-14}$$

另一种年金给付从被保险人死亡时立即开始，每隔 $1/m$ 年给付一次，而且在时刻 n 前的最后一次给付进行零数调整。设死亡时刻为 t，$n-t=k+j/m+s$（$0\leqslant s<1/m$），在时刻 $n-s$ 的最后零数给付额为：

$$\frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{\overline{s}|} = \frac{1-v^s}{d^{(m)}}$$

从而年金给付在时刻 t 的现值为：

$$\ddot{a}_{\overline{k+j/m}|}^{(m)} + v^{k+j/m}\frac{1-v^s}{d^{(m)}} = \frac{1-v^{n-t}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{n-t}|}^{(m)}$$

由此导出精算现值为：

$$\int_0^n v^t \ddot{a}_{\overline{n-t}|}^{(m)}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = \frac{\delta}{d^{(m)}}\int_0^n v^t \bar{a}_{\overline{n-t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = \frac{\delta}{d^{(m)}}(\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot {}_nq_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) \tag{12-15}$$

最后一次零数给付金额为 $(1-v^s)/d^{(m)}$，与 s 很接近。例如当 $n=20$，$m=12$，$t=10.8$，$k=9$，$j=2$ 时，设利率 $i=0.06$，那么

$$s=n-t-k-\frac{j}{m}=\frac{1}{30}=0.03333$$

$$\frac{1-v^s}{d^{(12)}}=0.03338$$

【例 12－2】 某种向 40 岁人签发的保单提供年支付为 1 的连续年金如下：当被保险人在 65 岁之前死亡时，提供家庭收入保险至 65 岁，或至少支付 10 年（如死亡时刻较后）；当被保险人在 65 岁还活着，提供至少确定给付 10 年的生存年金（即 10 年保证年金）。求精算现值。

解： 由题意，该年金的现值随机变量为：

$$Z=\begin{cases}\bar{a}_{\overline{25-T}|}v^T, & 0<T\leqslant 15\\ \bar{a}_{\overline{10}|}v^T, & 15<T\leqslant 25\\ \bar{a}_{\overline{10}|}v^{25}, & 25<T\leqslant 35\\ \bar{a}_{\overline{T-25}|}v^{25}, & T>35\end{cases}$$

精算现值为：

$$\int_0^{15}\bar{a}_{\overline{25-t}|}v^t\,{}_tp_{40}\,\mu_{40+t}dt+\int_{15}^{25}\bar{a}_{\overline{10}|}v^t\,{}_tp_{40}\,\mu_{40+t}dt$$
$$+\int_{25}^{35}\bar{a}_{\overline{10}|}v^{25}\,{}_tp_{40}\,\mu_{40+t}dt+\int_{35}^{\infty}\bar{a}_{\overline{t-25}|}v^{25}\,{}_tp_{40}\,\mu_{40+t}dt$$

另一方面，用当期支付法，考虑在时间 t 的给付条件及相应的概率，如表 12－1 所示：

时　刻	给付条件	概　率
$0<t\leqslant 25$	(40) 已死亡	$1-{}_tp_{40}$
$25<t\leqslant 35$	(40) 在 $t-10$ 时活着	${}_{t-10}p_{40}$
$t>35$	(40) 还活着	${}_tp_{40}$

那么精算现值为：

$$\int_0^{25}v^t(1-{}_tp_{40})dt+\int_{25}^{35}v^t_{(t-10)}p_{40}dt+\int_{35}^{\infty}v^t\,{}_tp_{40}dt$$

在第二个积分中做变量替换 $t-10=s$，可得

$$\int_{25}^{35}v^{s+10}\,{}_sp_{40}ds=v^{10}(\bar{a}_{40:\overline{25}|}-\bar{a}_{40:\overline{15}|})$$

最后所求的精算现值为：

$$\bar{a}_{\overline{25}|}-\bar{a}_{40:\overline{25}|}+v^{10}(\bar{a}_{40:\overline{25}|}-\bar{a}_{40:\overline{15}|})+\bar{a}_{40}-\bar{a}_{40:\overline{35}|}$$

§12.3　退休收入保单

这里介绍的退休收入保单是一种两全保单，其特征是满期给付高于保险金额，满期给付用于提供定额年金收入。因为责任准备金趋于满期给付，从某一时刻起，责任准备金将超过保险金额。当责任准备金超过保险金额时，要求死亡给付等于责任准备金。

对于完全连续模型，设保险金额为 1 个单位，$1+k$ 是在时刻 n 的满期给付，$\bar{P}$ 是年保费。如 a 是责任准备金等于 1 的时刻，则保险给付额 b_t 为：

$$b_t=\begin{cases}1, & t\leqslant a\\ {}_t\bar{V}, & a<t\leqslant n\end{cases}$$

用过去法公式给出在时刻 a 的责任准备金，有：

$$1={}_a\bar{V}=\bar{P}\bar{s}_{x:\overline{a}|}-{}_a\bar{k}_x=\frac{\bar{P}\bar{a}_{x:\overline{a}|}-\bar{A}^{1}_{x:\overline{a}|}}{{}_aE_x} \tag{12-16}$$

另外，责任准备金满足的微分方程为：

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}=\bar{P}+\delta\,{}_t\bar{V}-\mu_{x+t}(b_t-{}_t\bar{V}) \tag{12-17}$$

当 $t\geqslant a$ 时，$b_t={}_t\bar{V}$，（12－17）式右边最后一项消失，得到如下微分方程：

$$\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}-\delta\,{}_t\bar{V}=\bar{P}$$

两边乘以积分因子 $v^t=e^{-\delta t}$，

$$v^t\left\{\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}-\delta\,{}_t\bar{V}\right\}=v^t\bar{P}$$

$$\frac{d}{dt}(v^t\,{}_t\bar{V})=v^t\bar{P}$$

在（a，t）上积分，就得

$$v^t\,{}_t\bar{V}-v^a\,{}_a\bar{V}=\bar{P}\bar{a}_{\overline{t-a}|}\cdot v^a$$

最后得到

$$v^{t-a}\,{}_t\bar{V}={}_a\bar{V}+\bar{P}\bar{a}_{\overline{t-a}|},\quad t\geqslant a \tag{12-18}$$

由假设 ${}_a\bar{V}=1$，${}_n\bar{V}=1+k$ 得到：

$$1=(1+k)v^{n-a}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{n-a}|} \tag{12-19}$$

综合（12－16）与（12－19），有：

$$\bar{P}=\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{a}|}+{}_aE_x\,v^{n-a}(1+k)}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}+{}_aE_x\,\bar{a}_{\overline{n-a}|}} \tag{12-20}$$

从（12－16）式可解出：

$$\bar{P}=\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{a}|}+{}_{a}E_{x}}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}}=\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{a}|}) \tag{12-21}$$

从而

$$\bar{P}=\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}}-\delta \tag{12-22}$$

类似地，从（12－19）式可解出：

$$\begin{aligned}\bar{P}&=\frac{(1+k)\ v^{n-a}}{\bar{a}_{\overline{n-a}|}}-\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-a}|}}\\&=\frac{k}{\bar{s}_{\overline{n-a}|}}-\left(\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n-a}|}}-\frac{1}{\bar{s}_{\overline{n-a}|}}\right)\\&=\frac{k}{\bar{s}_{\overline{n-a}|}}-\delta\end{aligned} \tag{12-23}$$

比较（12－22）式与（12－23）式，得出 a 满足的条件：

$$\frac{\bar{s}_{\overline{n-a}|}}{\bar{a}_{x:\overline{a}|}}=k \tag{12-24}$$

由（12－24）可计算出 a，然后由（12－22）式得到 $\bar{P}$。

对于责任准备金，当 $t<a$ 时用过去法，而当 $t\geqslant a$ 时用未来法较为方便，即：

$$_{t}\bar{V}=\begin{cases}\bar{P}\bar{s}_{x:\overline{t}|}-{}_{t}\bar{k}_{x}, & t<a\\(1+k)v^{n-t}-\bar{P}\bar{a}_{\overline{n-t}|}, & a\leqslant t\leqslant n\end{cases} \tag{12-25}$$

完全离散的模型与此相似，只不过其中 a 是满足${}_{a}V\leqslant 1$ 且${}_{a+1}V>1$ 的整数。

§12.4 变额保险产品

12.4.1 变额年金

在积累期内，基金以一次性或周期性缴纳保费的方式进行累积，其利率取决于基金的投资表现。积累期内的死亡给付通常等于基金份额，退保给付（解约价值）通常是基金份额减去一定的解约费用。如不考虑退保，在积累期内基金份额的递推方程可由如下（12－26）式给出

$$[F_{k}+\pi_{k}(1-c_{k})-e_{k}](1+i'_{k+1})=F_{k+1}+q_{x+k}(b_{k+1}-F_{k+1}) \tag{12-26}$$

其中：

F_k 是在时刻 k 的基金份额；π_k 是在时刻 k 的毛保费；c_k 是保费 π_k 中用于费用开支的百分比；e_k 是不与保费成比例的费用；b_{k+1}是在时刻 k 至时刻 $k+1$ 内发生的死亡在时刻 $k+1$ 的给付金额；i'_{k+1}是从时刻 k 至时刻 $k+1$ 内

的实际净投资收益率（扣除了投资费用）。

在积累期内，（12－26）式右边的第二项等于0，因此，基金只按利息（即投资收益率）积累。

在退休时，已有的基金份额用于购买缴清年金，后者的计算按预定的死亡率基础及假设投资收益率（assumed investment return，AIR）计算。如果假设的投资收益率 AIR 较低，那么初始的年金支付相对基金份额来说也比较低，但年金的支付额预期具有某种增加的形式，以抵消部分通货膨胀影响。记 AIR 为 i，在时刻 k 之后一年的实际投资收益率记为 i'_{k+1}，如在时刻 k 向活着的年金受领人支付的年给付额记为 b_k，则在时刻 k 未支付前的责任准备金就是 $b_k\ddot{a}_{x+k}$，这里 x 是退休年龄，k 是从退休开始计算的时间。基金份额的递推方程为：

$$(b_k\ddot{a}_{x+k}-b_k)(1+i'_{k+1})=b_{k+1}p_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1}\quad k=0,1,2,\cdots \tag{12-27}$$

注意到如下关系式成立

$$(\ddot{a}_{x+k}-1)(1+i)=p_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1} \tag{12-28}$$

两式相除得到：

$$b_{k+1}=b_k\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{12-29}$$

因此当 $i'_{k+1}>i$ 时，给付水平将提高。注意到较高的 AIR 会导致给付额降低。

由（12－29）式给出的结果对其他给付选择权也成立。对年付 m 次的情况也可以稍做修改而得到。首先考虑按月调整给付额的情形，一年中第1与第2个月的年金值相互关系的公式为：

$$\left(\ddot{a}^{(12)}_{x+k}-\frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)={}_{1/12}p_{x+k}\ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12}\quad k=0,1,2,\cdots \tag{12-30}$$

而基金份额的递推方程可表示成：

$$\left(b_k\ddot{a}^{(12)}_{x+k}-\frac{b_k}{12}\right)\left(1+\frac{i'^{(12)}_{k+1}}{12}\right)={}_{1/12}p_{x+k}b_{k+1/12}\ddot{a}^{(12)}_{x+k+1/12} \tag{12-31}$$

两式相除得到：

$$b_{k+1/12}=b_k\frac{1+i'^{(12)}_{k+1}/12}{1+i^{(12)}/12} \tag{12-32}$$

对年付 m 次但给付水平按年调整的情形，也成立同样结果。在按月给付条件下，由

$$(\ddot{a}^{(12)}_{x+k}-\ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|})(1+i)=p_{x+k}\ddot{a}^{(12)}_{x+k+1} \tag{12-33}$$

$$(b_k\ddot{a}^{(12)}_{x+k}-b_k\ddot{a}^{(12)}_{x+k:\overline{1}|})(1+i'_{k+1})=p_{x+k}b_{k+1}\ddot{a}^{(12)}_{x+k+1} \tag{12-34}$$

可得到与（12－29）相同的结果：

$$b_{k+1}=b_k\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{12-35}$$

以下介绍变额寿险。变额寿险的种类非常多，以下讨论三种不同的设计，并以半连续终身寿险为例，在每年初调整保额。

12.4.2 完全变额人寿保险

第一种设计称为完全变额寿险，其给付金额根据投资结果变化，且保费也同比例变化。设初始给付金额为 1，保费为 $P(\bar{A}_x)$。在保单期间 $(k-1,k)$ 的期末准备金为 $b_k \cdot {}_kV(\bar{A}_x)$，$b_k$ 是在 $(k-1,k)$ 内的给付额，则在时刻 k 的下一期应缴保费为 $b_k \cdot P(\bar{A}_x)$，一年的保险成本为 $b_k \cdot \bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}$，那么下式成立：

$$[b_{k\,k}V(\bar{A}_x) + b_kP(\bar{A}_x) - b_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}](1+i'_{k+1}) = p_{x+k}b_{k+1\ k+1}V(\bar{A}_x) \tag{12-36}$$

另一方面，

$$[{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}](1+i) = p_{x+k\ k+1}V(\bar{A}_x) \tag{12-37}$$

两式相除，可得：

$$b_{k+1} = b_k\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{12-38}$$

它与变额年金的（12－29）式很相似。

12.4.3 固定保费的变额人寿保险

第二种设计为固定保费的变额寿险，它与完全变额设计的不同点在于净保费保持固定。设初始保额为 1，保费为 $P(\bar{A}_x)$，那么保额的变化满足如下关系：

$$[b_k\,{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}](1+i'_{k+1}) = p_{x+k}b_{k+1\ k+1}V(\bar{A}_x) \tag{12-39}$$

结合（12－37）式，可得到：

$$b_{k+1} = b_k\left[\frac{{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x)/b_k - \bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}}{{}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - \bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{12-40}$$

（12－39）式左边第一个因子可写成：

$$(b_k-1)\,{}_kV(\bar{A}_x) + {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\,\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|} \tag{12-41}$$

这表明固定净保费同时支持初始保额 1 和依赖于实际投资回报的给付额增加量 b_k-1，总的给付额就是 b_k。

12.4.4 缴清保险增额

第三种设计中给付额的增量以缴清保险的方式出现，保费只支持初始保额水平 1。基金份额方程为：

$$\begin{aligned}&[(b_k-1)\bar{A}_{x+k} + {}_kV(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x) - b_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}](1+i'_{k+1})\\ &= p_{x+k}[(b_{k+1}-1)\bar{A}_{x+k+1} + {}_{k+1}V(\bar{A}_x)]\end{aligned} \tag{12-42}$$

在（12－42）式左边中，$(b_k-1)\bar{A}_{x+k}$是保额增量b_k-1的趸缴净保费（这也是缴清保险增量的含义）。（12－42）式左边化简为：

$$\{b_k(\bar{A}_{x+k}-\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|})-[\bar{A}_{x+k}-{}_kV(\bar{A}_x)-P(\bar{A}_x)]\}(1+i'_{k+1})$$

$$=[b_k\,{}_1E_{x+k}\bar{A}_{x+k+1}-P(\bar{A}_x)(\ddot{a}_{x+k}-1)](1+i'_{k+1})$$

$$=[b_k\,{}_1E_{x+k}\bar{A}_{x+k+1}-P(\bar{A}_x)({}_1E_{x+k}\ddot{a}_{x+k+1})](1+i'_{k+1})$$

$$=p_{x+k}\bar{A}_{x+k+1}\left[b_k-\frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

应用责任准备金的缴清保险公式：

$${}_{k+1}V(\bar{A}_x)=\left[1-\frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\bar{A}_{x+k+1}$$

（12－42）式右边化简后为：

$$p_{x+k}\bar{A}_{x+k+1}\left[b_k-\frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]$$

最后整理化简后的（12－42）式，得到保额的递推关系：

$$b_{k+1}-\frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}=\left[b_{k+1}-\frac{P(\bar{A}_x)}{P(\bar{A}_{x+k+1})}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i} \tag{12－43}$$

这种产品的优点在于，如果经过实际投资收益较好的几年，从而导致$b_k>1$，那么即使以后的实际投资收益率i'回落到AIR，b_{k+1}也会保持不变。

§12.5　可变计划产品

在20世纪70年代初，世界上许多保险公司开始提供若干种在保额、保费及保险计划等方面有广泛选择权的保单。死亡保险金的小额增加一般不需要新的可保性证明，但大额增加则需要这种证明。可供选择的计划包括各类均衡保费定额给付的定期计划，特别地包括终身缴费的及限期缴费的终身寿险。

一种特殊的红利选择权是将红利直接加入现金价值中，增大的现金价值则可以展延定期计划的期限或增加终身计划的给付额。这些产品称为可变计划，下面通过一些具体的例子予以说明。

12.5.1　可变计划实例

这里假设毛保费G与净保费P之间有如下关系：

$$0.8G=P \tag{12－44}$$

另假设使用一年定期修正（FPT）方法计算责任准备金与不丧失保单

利益。定义$_0V=-E_0$，这里E_0是第一年费用超额补贴。根据一年定期修正责任准备金修正方法，$_1V=0$。在完全离散基础下，有：

$$_0V+P=vq_xb \tag{12-45}$$

$$E_0=-_0V=P-vq_xb \tag{12-46}$$

其中b是初始死亡保额，P是初始净保费。设h是缴费年限，那么：

$$_0V+P\ddot{a}_{x:\overline{h}|}=bA^1_{x:\overline{j}|} \tag{12-47}$$

其中，在定期计划下，$j=h$；在限期缴费终身寿险计划下，$j=\omega-x$。责任准备金用过去法公式可表示为：

$$_kV=\frac{_0V+P\ddot{a}_{x:\overline{k}|}-bA^1_{x:\overline{k}|}}{_kE_x} \tag{12-48}$$

【例 12-3】 考虑35岁签发的初始毛保费与保险金分别为1 000元与120 000元的保单，试用中国寿险业经验生命表男女混合表CL1（2000~2003）及4%利率，求E_0和$_5V$。

解：由（12-44）得$P=800$，于是

$$\begin{aligned}E_0&=-_0V=P-120\ 000vq_{35}\\&=800-120\ 000\times\frac{1}{1.04}\times 0.001194=662.23\end{aligned}$$

另外，$\ddot{a}_{35:\overline{5}|}=4.6185,A^1_{35:\overline{5}|}=0.006090,{}_5E_{35}=0.81627$，

$$_5V=\frac{-662.23+800\ddot{a}_{35:\overline{5}|}-120\ 000A^1_{35:\overline{5}|}}{_5E_{35}}=2\ 819.86$$

在变更保额或保费之时，可要求新的责任准备金$_kV'$等于在变更之前的一年定期修正责任准备金$_kV$。新的净保费P'，保额b'与责任准备金V'的关系与（12-47）式相似：

$$_kV'+P'\ddot{a}_{x+k:\overline{h}|}=b'A^1_{x+k:\overline{j}|} \tag{12-49}$$

与（12-48）式类似，对$g=1, 2, \cdots$，有：

$$_{k+g}V'=\frac{_kV'+P'\ddot{a}_{x+k:\overline{g}|}-b'A^1_{x+k:\overline{j}|}}{_gE_{x+k}} \tag{12-50}$$

【例 12-4】 在例12-3中保单持有人希望在5年后将毛保费变更为2 000元，保险金额改为15万元。求原保单签发10年后的责任准备金。

解：由假设$_5V'={}_5V=2\ 819.86,P'=1\ 600$，

另外，$\ddot{a}_{40:5}=4.61347,A^1_{40:\overline{5}|}=0.008740,{}_5E_{40}=0.81382$，代入（12-50）式，得到

$$_{10}V'=\frac{2\ 819.86+1\ 600\ddot{a}_{40:\overline{5}|}-150\ 000A^1_{40:\overline{5}|}}{_5E_{40}}=10\ 835.30$$

【例 12-5】 在例12-3中，如保单持有人希望在5年后将毛保费改为2 000元，计划改为最多缴至60岁为止的终身寿险，求新的保额。

解：此时$P'=1\ 600$，由

$$2\ 819.86 + 1\ 600\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = b'A_{40}$$

代入 $A_{40}=0.24529$，$\ddot{a}_{40:\overline{20}|}=13.824$，得到 $b'=101\ 669.1$。

【例 12－6】 在例 12－3 中，如保单持有人希望将保额改为 15 万元，计划改为到 65 岁为止的定期寿险，求新的毛保费。

解： 由

$$2\ 819.86 + 0.8G'\ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 150\ 000A^{1}_{40:\overline{25}|}$$

代入 $A^{1}_{40:\overline{25}|}=0.06766$，$\ddot{a}_{40:\overline{25}|}=15.7399$，得到 $G'=582.05$。

12.5.2 另一种设计

第二种设计是将变额寿险与前面可变计划保单相结合，引入基金份额的同时保险计划的概念相对弱化，灵活性增强。此外，这里更关注风险额度（风险净额）而非给付金额。风险额度可以在第 $k+1$ 个保单年度之初确定，记为 r_k，并用它导出基金份额的递推方程。以下分析以年度模型为例，不过在实践中月度或更频繁的计算较为常见。基金份额的递推方程为

$$({}_kF + G - E - r_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|})(1+i'_{k+1}) = {}_{k+1}F \qquad (12-51)$$

这里只按利息积累。在发生死亡的情形下，保单持有人既收到年初的基金份额 ${}_kF + G - E - r_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}$，也得到在死亡发生时按利息调整的风险额度。对风险额度的选择可使总保额维持在某个近似水平上。保单持有人对毛保费 G 以及风险额度 r_k 的选取具有很大的灵活性，而保险人通常也给予一些保证。通常，i'_{k+1} 至少等于某个最低利率 i，而风险成本一般不超过 $r_k\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{1}|}$，其中 1 年定期保险的趸缴净保费以利率 i 及法定责任准备金计算中使用的死亡表为基础进行计算。

（12－52）式中的费用 E 常具有以下几种形式：（1）对所有毛保费按相同百分比收取；（2）作为解约费用，或者按照第一年保费的一个比例收取（该比例对不同的退保年度逐年递减），或者按照手续费（如每次退保 25 元）收取；（3）每份保单统一收费，或者只在第 1 年收取，或者每个保单年度平均收取较低的数额；（4）表示为第一年的收费，按每千元保额为单位收取。

如上所述，这种设计的重点不在保险计划。在任何时间，类似于例 12－3及例 12－4 所使用的计算可用于决定隐含于任何特殊形式的保费与给付、当前风险成本、费用、利率及责任准备金。

§12.6 个人寿险中的残疾给付

普通人寿保险合同中一般都附有残疾给付条款。例如，在全残或丧失

工作能力后，可获得每千元保额 5 元或 10 元的月收入补偿，或者得到豁免今后保费的保险利益。保单持有人在全残后通常须经过 3、6 或 12 个月的等待期后方可获得残疾给付，但有时给付可追溯至等待期。残疾给付可能在寿险保单到期之前结束，一般的结束年龄为 60 或 65 岁。然而对于年金形式的给付，无论是残疾收入还是豁免保费，通常在一个更高的年龄终止，通常是寿险保单到期日或缴清日。

12.6.1 残疾收入给付

假设 (x) 在 y 岁前残疾，在残疾后 m 个月开始，可获得月收入为 1 000元的残疾给付，直至 u 岁，则残疾收入的精算现值为：

$$12\ 000\sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k}\ {}_{k}p_{x}^{(\tau)} v^{1/2} q_{x+k}^{(i)} v^{m/12}\ {}_{m/12}p_{[x+k+1/2]}^{i}\ \ddot{a}_{[x+k+1/2]+m/12:\overline{u-k-1/2-m/12}|}^{(12)i} \qquad (12-52)$$

这里，$[x+k+1/2]$ 表示致残年龄（选择年龄），$x+k+(1/2)+m/12$ 表示有资格领取的年龄。

（12 －52）式在实践中通常有一些简化。首先，可设损失 i（即残疾）只有当致残后生存到等待期 m 个月末时才被认为发生，如致残后在等待期内死亡，可作为损因 d（即死亡）对待。这样，残疾者的生存因子 ${}_{m/12}P_{[x+k+1/2]}^{i}$由于已计入 $q_{x+k}^{(i)}$而不必在（12 －52）式中出现。

其次，用连续年金精算现值：

$$\bar{a}_{[x+k+1/2]+m/12:\overline{u-x-k-1/2-m/12}|}^{i}+\frac{1}{24} \qquad (12-53)$$

近似（12 －52）式中的按月给付年金的精算现值。（12 －53）式可从以下几个方面得到确认：与按月给付年金相比，连续年金失去每月给付额 1/12 的大约 1/2 个月的利息。在因死亡或康复而终止的情况下，还失去部分给付；这部分给付在生存到年龄 u 的情况下并不失去。因此连续年金用月给付的 1/2 作调整是方便的，甚至可能是保守的。

第三个近似涉及用标准的一元风险表代替死亡与残疾二元风险表，以及近似公式：

$$\begin{aligned} q_{x+k}^{(i)} &= \int_{0}^{1} {}_{t}p_{x+k}^{\prime(d)}\ {}_{t}p_{x+k}^{\prime(i)}\ \mu_{x+k+t}^{(i)} dt \\ &\approx {}_{1/2}p_{x+k}^{\prime(d)} \int_{0}^{1} {}_{t}p_{x+k}^{\prime(i)}\ \mu_{x+k+t}^{(i)} dt \\ &= {}_{1/2}p_{x+k}\, q_{x+k}^{\prime(i)} \end{aligned} \qquad (12-54)$$

将以上简化应用于（12 －53）式可得精算现值的近似：

$$12\ 000\sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+1/2}\ {}_{k}p_{x}\cdot({}_{1/2}p_{x+k})\cdot q_{x+k}^{\prime(i)}\cdot v^{m/12}\cdot(\bar{a}_{[x+k+1/2]+m/12:\overline{u-k-1/2-m/12}|}^{i}+1/24) \qquad (12-55)$$

定义换算函数：$D_x=v^x l_x$

$$\bar{C}^i_x = v^{1/2}\,{}_{1/2}p_x q'^{(i)}_x D_x \tag{12-56}$$

$$^{u}\bar{C}^i_x = \bar{C}^i_x v^{m/12}\bar{a}^i_{[x+1/2]+m/12:\overline{u-x-1/2-m/12}|} \tag{12-57}$$

$${}_y\bar{M}^i_x = \sum_{z=x}^{y-1}\bar{C}^i_z \tag{12-58}$$

$${}^u_y\bar{M}^i_x = \sum_{z=x}^{y-1}{}^u\bar{C}^i_z \tag{12-59}$$

引用这些记号，（12－56）式残疾收入给付的精算现值可写成：

$$\frac{12\,000\,{}^u_y\bar{M}^i_x + 500v^{m/12}\,{}_y\bar{M}^i_x}{D_x} \tag{12-60}$$

12.6.2　豁免保费利益

设豁免的保费 P 每年分 g 次终身支付，并且给付追溯至等待期，即等待期内缴付的保费在等待期末退还。与残疾收入给付的主要区别在于，豁免保费利益是始于等待期结束后第一个缴费日的年付 g 次年金。如假定在一年中伤残均匀发生，从等待期末到下次缴费日平均期为$\frac{1}{2g}$，则等待期之后豁免保费的精算现值为：

$${}_{1/(2g)|}\ddot{a}^{(g)i}_{[x+k+1/2]+m/12} \approx \bar{a}^i_{[x+k+1/2]+m/12} \tag{12-61}$$

追溯的豁免保费给付额平均约为（$m/12$）P。当保费连续缴付或 m 是 g 的整数倍时，这比较清楚。为观察一下其他情形可能发生的情况，考虑半年缴费且等待期为 4 个月的情况。如果等待期结束于下次缴费日之前的 2 个月内，那么在等待期内未缴保费；否则在等待期内缴纳了保费（1/2）P。在一年中伤残均匀分布的假设下，平均的追溯给付额为：

$$\left[\frac{2}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\right]P = \frac{4}{12}P$$

应用这里以及前面讨论残疾收入给付时的简化，豁免保费利益的精算现值可表示成：

$$P\sum_{k=0}^{y-x-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_x\,{}_{1/2}p_{x+k}\,q'^{(i)}_{x+k}v^{m/12}\left(\bar{a}^i_{[x+k+1/2]+m/12} + m/12\right) \tag{12-62}$$

用换算函数表示为：

$$P\left({}^u_y\bar{M}^i_x + \frac{m}{12}v^{m/12}\,{}_y\bar{M}^i_x\right)/D_x \tag{12-63}$$

这些给付对应的年净保费可通过平衡原理得到。例如，对于保费及其免缴给付持续至 65 岁而寿险缴清到 75 岁的保单，免缴给付的年净缴保费${}_{65-x}\pi_x$ 由下面的（12－64a）式决定

$${}_{65-x}\pi_x \times \ddot{a}_{x:\overline{65-x}|} = \frac{P\left({}^{75}_{65}\bar{M}^i_x + \frac{m}{12}v^{m/12}\,{}_{65}\bar{M}^i_x\right)}{D_x} \tag{12-64a}$$

这里 P 是全残后豁免的年保费（寿险）。（12－64a）式可改写成：

$$ {}_{65-x}\pi_x = \frac{P\left({}_{65}^{75}\bar{M}_x^i + \frac{m}{12} v^{m/12}\ {}_{65}\bar{M}_x^i\right)}{N_x - N_{65}} \tag{12－64b} $$

相应的责任准备金可用保费差公式表示：

$$ {}_kV = \left({}_{65-x-k}\pi_{x+k} - {}_{65-x}\pi_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{65-x-k}|} \tag{12－65} $$

残疾生命的期末责任准备金是在被保险人已具有伤残资格的假定下，未来残疾给付的精算现值。豁免保费或残疾收入给付应乘以适合残疾者的生存年金精算现值。这个值考虑了致残年龄、伤残持续时间、以及残疾受益终止时间。

习　题

1．假设每年内死亡服从均匀分布，证明（12－6）中精算现值表示为：

$$ \frac{i}{i^{(m)}}\left[a_{\overline{n}|} + v^n\ {}_np_x\ a_{x+n} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d^{(m)}}\right)v^n\ {}_np_x\ A_{x+n}\right] $$

2．证明（12－1）中定义的 Z 和每年支付 1 的 n 年延期连续生命年金有相同的方差。

3．对部分现金立即偿还年金，设现值随机变量为：

$$ Z^{\cdot} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} + (\rho G - T)v^T, & T < \rho G, 0 < \rho < 1 \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T \geqslant \rho G \end{cases} $$

证明对部分现金立即偿还年金，（12－11）式可写成：

$$ G \cdot (1 - r) = \bar{a}_x + \rho G\bar{A}^1_{x:\overline{\rho G}|} - (\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{\rho G}|} $$

4．证明：对例 12－1 中的 Z 有：

$$ Var[Z] = \frac{v^{2n}[{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2]}{\delta^2} $$

5．假设 Z 按（12－12）式定义，证明：

$$ Var[Z] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2} $$

6．一份保单从（x）死亡日期开始提供每年为 1 的连续确定年金。如死亡发生在保单签发后的 15 年内，则年金支付到保单签发后的 20 年年底；如死亡发生在保单签发后 15 至 20 年内，则年金支付 5 年。保单签发 20 年后终止。给出趸缴净保费的表达式。

7．某份保单规定：如被保险人在 20 年末还活着时可得 1 000 元；如在保单签发后的 20 年内死亡，则每月可得 10 元的收入直至 20 年末，该收入的第一笔支付在死亡的月末，保单签发 20 年后则无支付。给出 x 岁时的年

缴净保费公式。

8. 证明：

$$\bar{a}_{\overline{n}|}-\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}-v^{n}{}_{n}q_{x}}{\delta}$$

9. 证明：对一个退休收入保单，记 $a=h+r$，其中 $h=[a]$，$0<r<1$，则在第 $h+1$ 保单年度内死亡均匀分布的假设下下式成立：

$$\bar{a}_{x:\overline{a}|}=\bar{a}_{x:\overline{h}|}+{}_{h}E_{x}\frac{(\delta-q_{x+h})\bar{a}_{\overline{r}|}+v^{r}rq_{x+h}}{\delta}$$

10. 证明：

$$(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1)\ (1+i)\ =p_{x}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}+q_{x}\ddot{a}_{\overline{n-1}|}$$

11. （1）把（12－40）式写成下列等价形式：

$$b_{k+1}=\left[b_{k}-\frac{(b_{x}-1)P(\bar{A}_{x})}{{}_{1}E_{x+k\,k+1}V(\bar{A}_{x})}\right]\frac{1+i'_{k+1}}{1+i}$$

（2）如在（1）的公式中，$i'_{k+1}=i,k=0,1,2,\cdots$，及 $b_{0}=1$，证明 $b_{k+1}=1$，$k=0,1,2,\cdots$。

（3）如在（1）的公式中，对其中某个 $k>0,i'_{k+h}=i,h=0,1,2,\cdots$，证明 b_{k+h}将收敛到 1。

12. 假设离散模型的终身寿险第 $k+1$ 年的死亡给付 b_{k+1}等于 $F_{k+1}+(1-{}_{k+1}V_{x})=1+(F_{k+1}-{}_{k+1}V_{x})$，其中，基金份额 F_{k} 满足递推方程：

$$(F_{k}+P_{x})(1+i'_{k+1})=q_{x+k}\cdot b_{k+1}+p_{x+k}\cdot F_{k+1}$$

这里，i'_{k+1}为第 $k+1$ 年投资率，保费 P_{x} 和准备金${}_{k}V_{x}$ 以利率 i 为基础。

（1）证明该递推方程可写成：

$$(F_{k}+P_{x})(1+i'_{k+1})-q_{x+k}(1-{}_{k+1}V_{x})=F_{k+1}$$

并解释该方程。

（2）如 $i'_{k+1}=i,k=0,1,2,\cdots$，证明：$F_{k+1}={}_{k+1}V_{x}$。

（3）证明：$b_{k+1}=b_{k}+(F_{k}+P_{x})i'_{k+1}-({}_{k}V_{x}+P_{x})i$。

第十三章 寿险定价概述

学习目标

- □ 了解寿险定价的基本原则和过程
- □ 掌握寿险定价的主要方法，包括净保费加成法、资产份额法、宏观定价法
- □ 熟悉定价假设及影响定价假设的因素变化对定价的影响

§13.1 定价的基本原则

寿险定价要遵循一系列的原则，如充足性、合理性、公平性、可行性、稳定性及弹性等。下面分别予以说明。

1. *充足性原则*。是审慎的精算原理和法律要求的首要原则。它是指保险费率应高至足以弥补预计发生的各项赔付以及有关的费用。如果费率不充足，就会导致保险人难以仅依赖收取的保险费来履行未来保险赔付的义务，进而影响保险人的盈利能力和偿付能力，最终可能使被保险人的利益受到损害。因此寿险产品的费率不能太低，合理的费率水平应足以补偿保险赔付以及经营活动中的费用开支，并能给保险人带来合理的利润。寿险费率要包含预计的赔付成本、保单管理费用、理赔费用等。若实际的赔付成本大于预计的赔付成本，则表明费率在赔付成本这一项是偏低的，除非保险人在费用上的节省足以弥补这种损失，否则将会减少保险人的预期利润，乃至导致亏损、偿付能力降低、破产。对于寿险公司来说，预期的理赔成本中主要的部分是根据生命表来计算的。由于各公司的客户群、承保水平、管理效率的不同，即便使用了同样的生命表，为同一个产品制定了相同的费率，对某些公司来说具有充足性，而对另外的公司而言却可能没有充足性。

2. *合理性原则*。是指寿险产品的平均费率水平应该和预计发生的各项赔付及费用水平相匹配，保险人获得一个恰当的利润水平。如果保险人利用垄断、信息不对称、或者投保人的不了解，通过收取过高的费率而获得超出常规水平的利润，这时保险监管部门可以介入，责令保险人降低费率。但在一个竞争充分的市场中，这种情况通常不会出现。一方面投保人会对保险产品有正确的认知和价值评判，另一方面市场竞争的力量也会使得费率水平达到相对合理的水平。

3. 公平性原则。该原则是指保险人对被保险人所承担的保险保障和赔付责任应该和投保人所缴纳的保费对等。公平性原则是针对每个被保险人而言，合理性原则只针对某个险种的平均费率水平而言。比如根据生命表可查出30岁的男性一年内的平均死亡概率，但具体到不同工作性质、不同生活习惯的人，其死亡概率却不一定相同。如建筑工人与公司职员由于工作性质的不同，面临的风险不同，死亡概率也不同。吸烟的人与不吸烟的人，其死亡概率也不同。保险核保的作用之一就是根据每个被保险人的实际情况，将其划分到不同的风险类别中，然后使用不同风险类别所对应的保险费率。这种风险分类的做法力图在一定程度上追求个体的费率公平性，但实务中，绝对精确和详细的划分也是难以做到的，因而公平性是相对的。

4. 可行性原则。每一个寿险产品在开发和定价时都有其预定的目标客户群，费率的厘定不仅仅要考虑赔付的需要，以及合理性、公平性的原则，还要考虑目标客户群的特征以及其缴纳保费的能力，这样才能提高行销的可行性。比如针对农村欠发达地区设计的寿险产品，就要以低保障、低费率为主，符合客户的保费支付能力。而为发达地区高端客户设计的险种，则可以提供高额的、丰富的保障，并收取高保险费。

5. 稳定性原则。该原则是指保险费率在短期内应该是相对稳定的，这样既有利于保险经营，又有利于投保人续保。如在缴费期内降低费率，就会让投保人有退保而重新购买一份新保单的倾向，以获得新的较低的费率，同时也容易招致老客户的不满。若保险费率有不断上涨的趋势，客户则会产生购买长期保单的倾向，这种超越其真实保险需求的行为有投机的成分，也与保险的宗旨相违背。另外，时常波动的费率会使投保人难以确定保费的预算，增加投保人的不安全感，有损保险公司的形象。

6. 弹性原则。该原则是指保险费率要随着实际情况的变化而有所变化。比如由于经济的发展、医疗科技的进步、人们生活水平的提高和对更健康生活方式的追求，人的寿命有延长的趋势；由于技术的进步、管理方式和思想的变化，保险公司的费用水平在不断变化；投资收益率也会随着市场环境的变化而发生变化。因而从长期来看，寿险费率必然随着外部环境的变化而需要不断调整，以保持费率的充足、合理、公平。

§13.2　险种开发和定价过程

定价是险种开发过程中的一个环节。险种开发过程中，外部的社会和经济环境、客户特征和偏好、公司内部的承保能力、管理效率、系统支持能力等，是进行险种定价的重要考虑因素。

1. 险种开发概述。寿险公司的险种开发必须综合考虑众多的因素。险种开发是公司经营的重要内容，是实现公司目标的前提。开发的险种必须能体现公司的特点、公司的企业文化，符合公司的价值取向，并和公司的长期战略规划相吻合。寿险产品的开发必须是建立在对经济和社会环境、市场状况、客户特征和偏好深入了解的基础上。寿险产品的开发、设计和定价要同时满足营销人员、公司股东和社会大众的需要，并在三者之间取得平衡。

产品开发是一个连续的过程，它包括产品形态的构思、评价和选择、设计和定价、修改和审批等多个环节，最后形成一种适销的、符合公司盈利标准的产品，并上市销售。产品上市销售并不是开发过程的终结，保险公司还要定期对产品在销售、管理过程中遇到的问题进行监控和分析，并根据销售量、管理成本、经验分析的结果对产品进行修改，或者开发新的替代产品。

险种开发通常以项目的形式组织实施。这类项目可能是建立一个新的业务线，也可能是对现有产品线的扩展，或者是对现有产品的修改。但寿险公司必须仔细综合考虑其产品布局，以便既能降低管理成本，又能更好地满足客户的需求。

2. 险种开发流程。一旦寿险产品开发项目启动，针对新产品开发的流程大体可分为以下几个环节：

（1）产品形态构思。新产品形态的思路来源包括由销售渠道提供的根据客户或销售人员对现有产品的反馈、经验分析的结果、同业产品的启发、政策法规的导向等。

（2）产品可行性分析。是新产品开发项目前期的重要工作，其分析结果将被写入产品可行性分析报告以供公司管理层决策参考。产品可行性分析报告主要分析该产品能否符合公司策略、适应客户需求、合法合规、符合内部运营和系统支持能力、符合公司产品盈利性标准、投入产出合理性，并对产品的主要风险点进行提示。

（3）管理层审批。由于寿险产品的长期性，每一个新产品的上市，保险公司都必须在系统中记录相关信息，提供相应的服务，长达数年甚至上百年，因而保险公司对于新产品开发的决策通常比较谨慎。管理层通过产品可行性分析报告来做出是否开发该产品的决策。

（4）产品设计和实施。一旦产品可行性报告的内容获得管理层批准，具体的产品定价、规则制定、条款撰写、电脑系统准备、行销方案规划、培训安排、再保险安排等工作将按部就班地开始执行。

（5）产品上市。当新产品定价、条款撰写完毕，且相关规则、系统等后台支持工作也全部准备就绪后，再完成保险监管机关针对新产品的审批

或备案，新产品就可以上市销售了。

（6）产品上市后的工作。产品上市后，保险公司将对该产品的销售量、管理成本、经验分析的结果定期追踪，而这些追踪得到的信息又将成为下一轮产品开发形态构思的参考。从这个意义上讲，产品开发工作也是一个不断循环的过程。

3. *险种开发和定价要考虑的因素。*寿险公司的险种开发和定价必须综合考虑众多的因素，其中主要包括：

（1）外部环境。险种开发必须反映出社会、经济、法律等外部环境的特征和变化。这些外部因素包括社会和文化特征、资本市场成熟程度、可供使用的投资工具、税收的支持或限制、法律法规的要求。理想的情况是寿险公司的市场研究部门不断地检查外部环境的变化，并预测其发展趋势，以便公司能够把握新的机会，开发新的产品，调整现有的产品组合，适应变化了的情况。

（2）市场竞争情况。寿险公司的竞争对手不仅来自于同行业，还来自于其他行业。寿险公司同业的竞争会明显影响到寿险产品的开发设计。同业竞争还可能发生在对代理人、经纪人的代理费用、承保和客户服务等方面。当主要同业竞争对手推出新产品，威胁到本公司市场份额时，寿险公司必须尽快做出反应，以免在市场竞争中落后。

（3）目标客户群的特征和偏好。由于社会经济发展程度、文化的差异，不同国家、不同地区、不同职业背景的人通常对保险产品的需求、偏好、购买力均不相同，把握好目标客户群的这些特征是产品成功的关键。

（4）销售人员的需求。所有的产品都是通过销售人员最终销售给客户，因而新产品应能符合销售人员的需求，并能给销售人员带来合理的佣金收入。如果销售人员喜欢一款产品，那么这个产品成功的概率就会很大。如果销售人员不喜欢一款产品，那么就很难期望这款产品能获得成功。

（5）对现有产品的影响。每一个保险产品都不是孤立地存在的，它和保险公司的现有产品之间大多存在或多或少的替代或补充关系。事先仔细考虑新产品对现有产品的影响，将有助于公司构建一个合理和完善的产品体系。

（6）公司内部因素。新产品开发时要考虑的公司内部因素包含公司的经营策略、产品策略、企业文化、运营和管理能力、系统支持能力、财务状况等因素。

4. *产品的定价过程。*产品定价是产品开发流程的一个环节。实务中，寿险费率不仅仅根据利率、死亡率、发病率、续保率、费用率、预期利润

率等因素的假设而简单计算，寿险费率必须能体现出多种多样的、有时甚至是相互矛盾的公司管理层、股东、销售人员、客户（现有的或潜在的）等各方的要求，同时还要受到整个公司财务状况、偿付能力的限制。因而，寿险定价是一项非常复杂的工作，最终的费率确定体现了对诸多因素的平衡考虑。

寿险公司的定价通常由精算人员来完成，最终将由总精算师进行批准。尽管不同产品、不同公司的定价方式可能存在差异，但一般的定价过程都包括：（1）定价方式和定价模型的选择；（2）精算假设的选定；（3）确定初步费率；（4）进行利润测试；（5）调整并确定最终费率；（6）撰写产品定价报告；（7）总精算师审核签字。

大多数寿险公司产品的价格是建立在最优估计的精算假设及预期的利润率之上的。最优估计假设可以来自保险监管机关发布的数据、行业统计数据、再保公司的经验数据、同业公司类似产品的经验数据、公司自己的统计数据等。寿险产品的定价过程中会涉及对产品的费率、佣金率、销售费用率、投资要求、预期分红水平进行规划，而这些内容会分别涉及到客户、销售人员、销售渠道、投资部门的利益，也影响到产品的利润率。例如：

（1）过高的费率会使得该产品和同业产品相比失去竞争力。

（2）过低的佣金会使得销售人员销售动机减弱。

（3）销售渠道总是期望得到较高的销售费用。

（4）产品太过于依赖投资会使得投资部门的压力增大。

（5）客户对于分红水平的合理预期要在定价中予以考虑。

（6）过低的费率、过高的佣金和费用会使得产品达不到盈利性要求。

（7）过于激进的投资收益率预期会使得产品的投资风险增加。

因此，定价过程通常是一个不断反复调整和平衡的过程，当对各方面的因素均进行适当的修正和平衡后，产品的定价过程才能顺利地完成。

§13.3 寿险产品定价方法

保险费率是保险人计算保险费的依据，它是保险人向被保险人收取的每单位保险金额的保险费，通常都用每1 000元保险金额对应的年缴保险费来表示。对于一些特殊的没有一个固定的保险金额的险种，例如，提供一个医疗保障计划的医疗险，有时候也用每“份”对应的保险费来表示。寿险产品的定价就是确定合理的保险费率。费率的合理性直接关系到保险公司的经营利润和竞争地位。

国际上寿险产品定价方法到现在为止经历了两个发展阶段：第一阶段是1960年以前，以毛保费公式为代表的净保费加成法；第二阶段是1960年之后开始流行的资产份额定价法以及由其演变出的其他定价方法。

13.3.1　净保费加成法

1. 净保费加成法概述。人寿保险的保费由净保费和附加保费构成。净保费是指保险人提供保险保障的成本。在计算净保费时，一般只考虑死亡率和利率因素。附加保险费又可细分为附加费用和利润。附加费用主要用于弥补保险人管理保单、支付佣金和手续费的成本。

净保费加成法首先根据精算现值相等的原则，建立净保费和保险保障成本之间的等式。然后在维持精算现值相等的原则下，把附加费用和预期利润也包含进公式中，从而可得到总保费和保险保障成本、附加费用、预期利润之间的等式。

在实际计算中，为了简化计算过程，可以使用一些公式和换算函数。以投保时年龄为 x 的被保险人，保险期限为 n 年，缴费期为 m 年，保险金额为1 000元的两全险为例，如记净保费为 NP_x，则需缴纳的年缴净保费为 $NP_x = 1\ 000 \cdot A_{x:\overline{n}|}/\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$，其中 $A_{x:\overline{n}|}$表示年龄 x 的人购买 n 年期、保险金额为1元的两全险的一次趸缴净保费，$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$是年龄 x 的人支付 m 年、每年初支付额为1元的生命年金的精算现值。

在确定了净保费后，利用精算现值相等的原则，把附加费用和预定利润分摊到每一年的保费中就得到了毛保费。

随着寿险业务的发展，特别是新产品的不断涌现以及市场竞争的激烈，在产品定价中对附加费用和预计利润的考虑方式变得更加灵活，净保费等价公式也演变成更复杂的毛保费等价公式，即毛保费的精算现值等于未来保险给付、附加费用和预定利润的精算现值。开始时，保险公司在未来保险给付项目中只考虑死亡率因素，即精算数学中的单重模型；后来，有些保险公司将疾病率、失效因素也考虑到该等式中，并采用多重模型。在计算机技术未普及之前，为简化计算，换算公式是产品定价中通常采用的方法。随着计算机技术的普及，精算人员可以更自由地通过更复杂的公式来构建保费计算公式，只要维持精算现值相等的原则即可。这样的好处是可以处理更复杂的附加费用结构、包含疾病率和失效率等多重因素的情形。

【例13－1】　某终身寿险，保险金额为1 000元，其费用分配如表13－1所示。

表 13－1　　费用分配

分类	第一年			续年			
	每份保单	每1 000元保额	保费百分比（%）	每份保单	每1 000元保额	保费百分比（%）	
						2～9年	10年以上
1. 保单获得费	30	5	80				
2. 保单维持费	2	0.25		2	0.25	10	5
3. 营业费用	4	0.25	2	4	0.25	2	2
合计(1、2、3)	36	5.5	82	6	0.5	12	7
4. 理赔费用	每份保单18元，再加上每1 000元保额2元						

假设其保费缴纳以及前三项费用支出均在保单年度初，死亡给付及理赔费用发生在保单年度末，则在不考虑退保和利润的情况下，根据精算等价原则计算毛保费 G，可得

$$G\cdot\ddot{a}_x=1\ 020\cdot A_x+[(41.5+0.82\cdot G)+6.5\cdot a_x+0.12\cdot G\cdot a_{x:\overline{8}|}+0.07\cdot G\cdot {}_{9|}\ddot{a}_x] \tag{13-1}$$

对（13－1）式整理可得

$$G=\frac{1\ 020\cdot A_x+41.5+6.5\cdot a_x}{\ddot{a}_x-0.82-0.12\cdot a_{x:\overline{8}|}-0.07\cdot {}_{9|}\ddot{a}_x} \tag{13-2}$$

2. *应用换算表进行定价。*

（1）换算表的基本概念。为计算人身保险的保险费、现金价值和准备金，我们把运算过程中有规律的数值预先计算并编制成表格，便于随时查表并代入计算，从而简化繁复的运算过程，这种表格即为换算表。换算表编制的基础是生命表和现值表的综合数值，有连续换算表和离散换算表两种类型，其内容通常由以下7项中的某几项组成：

①x 表示年龄；②D_x 表示 x 岁的生存人数与 x 年贴现因子数值的乘积；③N_x 表示从 D_x 开始，把以后各年直到 D_ω 的数值加总之和，其中 ω 为极限年龄；④S_x 表示从 N_x 开始直到 N_ω 的数值加总之和；⑤C_x 表示 x 岁的死亡人数与 $x+1$ 年贴现因子数值的乘积；⑥M_x 表示从 C_x 开始，把以后各年直到 C_ω 的数值加总之和；⑦R_x 表示从 M_x 开始直到 M_ω 的数值加总之和。

其中，D_x,N_x,S_x,C_x,M_x,R_x 称为换算符号或换算函数。由 D_x,N_x,S_x 和年龄 x，或 C_x,M_x,R_x 和年龄 x 组成的表称为换算函数表，简称换算表。

（2）换算表的基本公式：

$$D_x=v^x\cdot l_x \qquad C_x=v^{x+1}\cdot d_x$$

$$N_x=\sum_{k=0}^{\omega-x}D_{x+k} \qquad M_x=\sum_{k=0}^{\omega-x}C_{x+k}$$

$$S_x=\sum_{k=0}^{\omega-x}N_{x+k} \qquad R_x=\sum_{k=0}^{\omega-x}M_{x+k}$$

上述模型均为在一元风险模型生命表中的换算符号，也可以推广到包含死亡与疾病的二元风险模型中。即用近似的一元风险模型生命表代替二元风险表，得出近似的一元死亡率，重新定义换算符号，用新的换算符号求得费率。

在实务中，可以假设死亡在一年内是均匀分布的，连续模型的换算函数可以通过离散模型的换算函数来表示，或直接用近似的方法表示，即定义 $\overline{C}_x = v^{x+1/2} \cdot d_x$。有了换算函数，可以直接计算寿险产品的保费。

（3）换算表的应用。对于例 13－1，可以用换算表进行重新计算，由基本公式可知：

$$G \cdot \frac{N_x}{D_x} = 1\,020 \cdot \frac{M_x}{D_x} + \left[(41.5 + 0.82 \cdot G) + 6.5 \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} + 0.12 \cdot G \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+9}}{D_x} + 0.07 \cdot G \cdot \frac{N_{x+9}}{D_x} \right] \quad (13-3)$$

由（13－3）式可得

$$G = \frac{1\,020 \cdot M_x + 41.5 \cdot D_x + 6.5 \cdot N_{x+1}}{N_x - 0.82 \cdot D_x - 0.12 \cdot (N_{x+1} - N_{x+9}) - 0.07 \cdot N_{x+9}} \quad (13-4)$$

净保费加成法最主要的优点是只进行有限的计算，当给定了保费的基本假设：死亡率、利率、费用和利润附加时，费率可以很容易地计算出来。对于简单的寿险产品，这种方法是极其有效和可行的。

净保费加成法在缺少有效计算工具时是适用的。但是这种方法的缺点也是明显的：

① 其最大的缺点是与利润联系不紧密，没有表明每个保单年度利润的变化；

② 当寿险合同具有比较复杂的保险金给付，或者要求使用变化的利率和利润附加时，这种方法的计算是极其复杂的，在没有计算机技术的帮助下是很难完成的；

③ 对于一些新型险种，如变额寿险、分红保险、万能寿险等，这种方法并不适用；

④ 无法使保险公司以此为根据进行相应的分析，如新业务对资本金的要求，新业务的增长对公司总体偿付能力造成的影响，以及在不同情形下的预计利润水平变化等。

由于不能把握未来各项定价假设的变化情况及其对利润的影响，因而采用净保费加成法厘定费率时通常采取较为保守的假设，从而使制定的费率趋于偏高。

13.3.2　资产份额定价法

资产份额定价法是根据构成总保险费的几个基本因素，选择一个试验

性保险费，通过利润测试进行检验，判断是否满足保险公司的利润目标，如果其结果与公司的利润指标相差很远，则更换新的保费重新进行计算，使得在新的保费假设下能够与公司的利润目标更为接近。在很多情况下，可以计算保费的变化对利润产生的影响，从而在对一个试验保费进行计算后可以直接解出能够达到期望利润指标的最终保费。称其为资产份额定价法，是因为这种方法与资产份额有密切联系。资产份额类似于一个收支账户：每年的保险费和利息作为收入增加账户余额，死亡保险金、生存给付金、退保金、红利和费用作为支出减少账户余额。年末的账户余额分摊到年末全部有效保单上，可得出每张有效保单的账户余额，就是每张有效保单对应的资产份额。资产份额扣除为保单提存的准备金，就是保单的累积盈余。当年末的累积盈余减去上年末累积盈余在当年末的积累值，就是这张保单在当年的利润。

用简化的公式可表述为：

$$\text{年末资产份额}=\frac{\begin{array}{c}[(\text{年初资产份额}+\text{当年总保费}-\text{期初费用})\\ \times(1+\text{利率})-\text{保险给付额}-\text{期末费用}]\end{array}}{(1-\text{本年度内死亡概率}-\text{本年度内退保概率})}\qquad(13-5)$$

其中，

1. 资产份额、总保费、费用和保险给付额都按有效保单计算。第一个保险年度初的资产份额为 0。

2. 保险给付额主要由死亡给付金、生存给付金、退保给付和红利支出等构成，这些给付额均为期望值。

3. 期初费用主要是承保和保单维持发生的费用，期末费用主要由处理死亡给付、生存给付、退保给付和红利支出的费用构成。

根据利润指标进行定价是目前国际上经常使用的方法，有些定价目标是通过对利润指标的规定来体现的。例如，每年末的资产份额必须等于现金价值（或准备金）再加上一个边际，某些方法规定资产份额在保单生效 20 年后必须等于现金价值的一定比例，如 110%。由于寿险业务，特别是个人长期寿险业务第一年的保单获得费用很大，通常造成第一年利润为负值，所以有些方法的利润目标是在规定年数内使得累计的利润现值大于或等于零，计算现值的利率通常反映了投资者的资本成本并考虑一定的风险附加。

从保险公司的经营过程很容易看出，保险公司的所有者为了申请注册保险公司并使其正常运行，必须提供必要的资本金，这也是各国保险法的规定。作为回报，股东就有权利分享公司的利润。由于股东对回报的要求，每张保单在定价时应包含一定的利润附加。此外，当公司累积的有效保单数量增长时，必须有相应的盈余（或所有者权益）增长使保险公司具有充足的偿付能力。如果某些事件影响到公司的盈余，利润必须用来作为必要

的补充。同时，给股东的利润分配还可以看成是保险公司承担的一种费用。

在定价过程中，保险公司经常会考虑价格是否合理、是否有效、其标准是什么？价格对于投保人来讲，并不总是很重要的指标，只要价格与其竞争对手相比是合理的，这个价格就可以被投保人接受。但是对于大额保单和定期寿险保单，价格通常是一个非常重要的决定因素。价格对于代理人来讲是极其重要的，他们喜欢好的、具有竞争力的产品。虽然价格的微小差异不会导致代理人离开他们喜欢的保险公司，但是低保费对于保险经纪人来讲则有所不同，保险经纪人为其客户的利益往往会在不同的保险公司之间进行比较，最终选择价格较低的公司进行投保。

利润指标要求的下调使得保险公司有机会制定出更低的价格，从而使寿险产品更具竞争性。有时保险公司会降低每单位保单的利润要求，并期望通过扩大业务量，来提高其总体利润，但在某些情况下，降低的利润要求并不一定会引起业务量的变化，这主要依赖于客户对价格变化的敏感性，同时还要考虑价格的相对影响。如果价格减少10%，那么对于一个不具竞争力的价格与一个具有竞争力的价格来说，产生的效果是不同的。保费大规模下降会引起业务量的增长，但当其他公司也推出相应措施时，这种增长就会很快停止。随着竞争的不断激烈，保险公司可能会变得更加依赖通过调整利润指标来制定更具吸引力的价格。减少利润是销售策略的重要部分，但对其销售量必须有所控制。如果保险公司的业务量主要集中在这种低利润的产品上，保险公司会面临很大风险，如果长期如此，将危及保险公司的财务状况和偿付能力水平。如果公司的有效业务较多，这个问题会暂时被隐藏起来，但随着低利润的新业务的销量不断扩大，有效业务的利润将逐步被稀释，盈利性不足的问题最终会显露出来，在那个时候再进行调整，恐怕为时已晚。

在资产份额定价法中有很多不同的利润指标，主要包括：

（1）利润现值占保费现值的比例，其中利润现值等于未来各年度末利润值的精算现值，现值计算时使用的利率为股东要求的投资回报率，或者风险贴现率。

（2）利润现值占风险成本现值的比例，每年的风险成本定义为预期死亡成本的一个比例加上有效保单准备金的一个比例。

（3）n 年后的资产份额等于现金价值或准备金的一个比例。一般来讲比例大于100%，而通常为20年或30年。

（4）n 年内的利润现值为正值，换句话说，产品必须在 n 年内实现正利润，n 一般为5～10年。如果资产份额逐年累积和贴现采用相同的利率，这等价于 n 年末的资产份额超过准备金，这里 n 称为盈亏平衡年。

（5）内部回报率不低于某个数值，如12%。该内部回报率为使得包含

初年度亏损在内的各年度利润的现值之和等于零时，所使用的贴现利率，通常在计算内部回报率时仅使用前20年或30年的利润数据。

（6）上述利润目标的组合，例如：

① 利润现值至少等于保费现值的10%

② 年投资回报率至少为12%

③ 盈亏平衡年小于5

在其他条件已知的情况下，选择一组试验性的总保费就可通过预测未来各年度的现金流，得到各保单年度的预期利润，然后通过对比预期利润水平和保险人的利润目标之间的差距，对总保费水平进行调整。如果预期利润水平未达到保险人的利润目标，就调高总保费水平，再重新进行测算。经过数次调整之后，最终可以得到一组既能满足公司利润目标，又能兼顾市场竞争力的、公平的、合理的费率。

与净保费加成法相比，资产份额定价法的优点在于：

① 在使用定价模型进行利润预测时，各保单年度的保费、给付额、利率、贴现率都可以不同，可以适用于较为复杂的产品并满足测算要求。

② 保费水平的确定直接与利润挂钩，有利于保险人了解产品的整体盈利性。

③ 资产份额定价模型能用于利润测试，有助于保险人了解影响利润的主要因素，并可以筛选出产品的主要风险点，以便在日后的经营管理中加以重点关注。

④ 资产份额定价模型可以预测产品的未来现金流，有助于保险人了解产品的利润趋势，以及对资本金的要求。

⑤ 随着计算机技术的发展和普及，资产份额定价法的复杂计算已经变得更容易处理，保险人可以通过编制计算机程序，来方便快捷地进行总保费计算和保单的利润测试。

⑥ 应用资产份额定价法要为每份保单模拟一个账户，因而更能符合万能保险、变额寿险、投资连结保险等新型险种的特征和定价的需要。

⑦ 资产份额定价模型可以用来对每份保单的盈余进行核算，从而可以用于红利分配管理中，如预测未来红利水平，计算每年度的实际应发红利，计算保单终了红利等。

资产份额定价法以其自身优势广为保险人接受，目前国内保险公司也一般使用资产份额定价法，或在其基础上进行一定的引申和改良。尽管资产份额定价法得到广泛使用，但这种方法也存在一些缺陷，如：

1）资产份额定价法从产品的单位利润出发，如采用的费用假设为分摊到每张保单上的费用。如果产品的实际销售量和预期差异较大，则定价中每张保单分摊的费用就变得不准确，而基于此假设预测的利润和确定的价

格就变得不合理。

2）资产份额定价法不能反映具体的投资信息和风险情况。资产份额定价法中表达资本回报的只有投资收益率，无法反映任何无风险和有风险投资的动态信息。这些信息包括：投资品种、投资的预期收益、收益率波动、流动性等情况。

3）资产份额定价法无法给出直接的投资决策、销售量要求等方面的参考信息。

13.3.3　宏观定价法

1. *宏观定价法概述*。如何给保险产品合理定价，这是每一家商业保险公司在开发新险种或对原有保险产品进行改进时都会碰到的重要问题。定价正确与否，关系到保险公司经营的成败。在国外保险业中，经过多年的实践，形成了一些习惯的定价方法，如资产份额定价法，目前国内保险公司一般也沿用这些做法。然而，在保险市场的竞争日益激烈的今天，一些新的定价方法应运而生，其中一种就是由 Shane A. Chalke 在 20 世纪 90 年代初提出的“宏观定价法”，即试图根据不同的销售量水平制定不同的价格，使公司获得最大利润。

传统定价方法大体上有三个特征：

第一，产品的利润以每单位获利多少来衡量。这里的单位可以是每千元保额、每千元保费、每 1 元保费的现值等。然而，对保险公司来说最重要的是要知道公司能从某种产品中获得多少总利润，用公式表示为：

$$产品总利润=每单位利润\times售出的单位 \tag{13-6}$$

需要注意的是：

由于市场供求关系，销售量与产品的价格往往成反比；如果我们提高单位利润，通常产品的价格也随之升高，而售出的单位会减少，这样公司所得的总利润可能反而下降。由此可见，单位利润的高低并不能代表公司所获得的总收益。

第二，在确定价格时采用费用相加的方法。通常单位价格由下面的公式确定：

$$单位价格=单位产品的成本+单位产品的利润目标 \tag{13-7}$$

但问题在于如何选定单位产品的利润目标。正如前面所说，公司追求的是公司总利润最大而不是单位利润最大，那么究竟应该把单位产品的利润定为何种水平时才能使总利润达到最大呢？现有的方法对此不能提供答案，因而通过费用相加来确定价格也就遇到了困难。

第三，非边际费用将由销售的所有产品进行分摊。所谓非边际费用即固定费用，是指由于开发这种产品本身而带来的公司总费用的增加部分。

例如，在设计一种新的养老金险种时，需要开发一套新的养老金计算机管理系统，由此产生的费用就是非边际费用。非边际费用与产品的价格及销售量没有直接的关联，因而公司总利润何时达到最大也与这种非边际费用无关。总利润可以由以下的公式得到：

$$总利润 = P \times Q - ME \times Q - NME \tag{13-8}$$

其中，P 为每单位价格；Q 为售出的单位数；ME 为每单位的边际费用；NME 为总的非边际费用。

Q 显然与 P 有关，设 Q 是 P 的函数，记为 $Q = f(P)$，那么：

$$总利润 = P \times f(P) - ME \times f(P) - NME \tag{13-9}$$

如选取价格 P 使总利润达到最大，则应使上式的一阶导数为零，即：

$$f(P) + f'(P) \times P - f'(P) \times ME = 0 \tag{13-10}$$

上式与 NME 无关，可见使总利润达到最大的价格与非边际费用无关。而传统的定价方法在计算价格时将非边际费用分摊到销售的产品中，从利润最大化原则角度来看，这是不合适的。

宏观定价法正是针对传统定价法的不足之处而做出改进，并且重新构造了定价的整个决策过程。对传统定价法的改进体现为以下三点：

（1）定价不是从产品的单位利润出发，而是根据总利润最大化的原则，始终以总利润作为判断产品本身及其价格优劣的标准。

（2）传统方法采用成本费用相加的方法来确定价格，对所提出的价格只是简单的拒绝或接受；而宏观定价法则给出一系列价格，对每一个价格考虑若干种销售方案，并计算出每一“价格/销售量”组合下的总体利润，从中选取总体利润最大的一组，得到最优价格。

（3）宏观定价法未将非边际费用列入分析，而是只考虑边际费用。

宏观定价法的决策过程也与传统定价法不同。传统定价法是采用开放式的决策观点，当产品的特征及其市场定位确定之后，由精算部门提出产品的价格及利润目标，再由业务部门与精算部门共同沟通和讨论是否合理。如果讨论一致后得到管理层批准，则进行产品的详细设计；如果不能通过，则推翻原方案，提出新方案再进行讨论。在此过程中，精算部门与业务部门常会产生分歧矛盾，精算部门由于对单位利润目标负责，倾向于希望产品的价格高些；而业务部门则对销售全权负责，常希望价格低一些以便于推销。它们之间往往很难达成一致，常常相持不下，要经过多次循环往复，有时需要提请上级领导进行“拍板”才能定下来，这就降低了决策的效率。

宏观定价法改进了决策过程，在一定程度上解决了业务部门和精算部门之间的分歧。例如，当更新已有的产品时，宏观定价法通常采用“从最小利润出发”的方法。也就是说，把原有产品的总体利润设定为最小利润目标，由精算部门提出一系列产品的“价格/销售量”组合，计算其相应

的总体利润，从这些组合中去掉那些总体利润小于最小利润目标的组合，剩下来的就是其利润均能超过公司利润目标的组合。在此基础上由业务部门来选择那些他们认为在销售过程中有可能达到的组合，再从中选取预期利润较高的一组。一般说来业务部门在选择时，不会选择价格很低的方案，因为那样可能意味着销售目标要求也会很高。而在设计一种新产品时，由于不存在原有产品作为“最小利润目标”，就先由精算部门提出一系列“价格/销售量”组合及其相应的利润，再由业务部门选出那些他们认为销售额有可能达到且投入的销售力量相差不多的组合，再从中选取利润最高的一组。

2. *宏观定价法的一般过程。*由于各家保险公司的经营理念、利润目标有可能不同，所以不同公司的宏观定价过程可能存在着一些差异。下面是宏观定价的一般过程。

（1）确定产品参与市场竞争时所具备的特点，如高比例的首年度佣金。

（2）确定产品的至少四种不同的价格体系，其中应有一种与业务部门的期望相同，一种与市场上已有的类似产品价格体系相同，第三种比业务部门期望的价格高，第四种比业务部门期望的价格低。

（3）将产品的形态、保障内容、特点等与市场上已有的类似产品进行比较。

（4）确定每单位的边际费用，其中包括与受理、承保、发单、邮寄等直接相关的费用。在此阶段暂不考虑电脑系统、管理、宣传等一些与承保、发单不直接相关的费用。

（5）确定不同的佣金制度体系，和前面的价格体系一样，它至少包括四种体系，一种和市场上已有的产品类似，另外三种分别高于、低于、等于业务部门期望的体系。

（6）预测将来的业务进展情况，对销售量与年龄分布以及在产品寿命期间销售情况做出假设。

（7）确定与每单位产品不直接相关的非边际费用，如产品的开发费用、电脑系统开发费用、管理费用等。

（8）建立预测模型，建立“产品价格/销售量/佣金”组合，计算每一种组合下的总利润，并确定最小利润目标。

（9）召开业务部门、精算部门、管理层等方面共同参与的会议，进行决策，决定产品的价格与佣金水平，可能会有三种结果。一是确定了产品的价格与佣金，然后进行产品的详细设计，计算产品的责任准备金、保单价值，进行电脑系统开发及制定相应的核保规则等。二是讨论中发现还有一些遗留问题需要进一步研究，问题解决之后再重新召开决策会议。三是发现设计的产品不可行，放弃此种产品的开发，重新寻找其他可行的产品，

开始一个新的产品开发过程。

宏观定价法是在实践的基础上对传统定价方法的改进。它的优点在于在充分考虑总利润的前提下，使产品的价格达到最优，从而保证公司的稳健运行；另外它还在一定程度上缓解了精算部门和业务部门之间的分歧，使他们之间的利益趋向一致。定价不再仅是精算部门的责任，而是通过精算部门与熟悉市场动态、了解客户需求的业务部门共同制定出合理的价格，来确保公司预期的利润目标的实现。

这种定价方法在理论上很合理，但在实施中却比较困难。业务部门通常销售多款产品，对全部产品的销售量可以给予承诺，但对其中单一产品的销售量的预测通常较难。一款产品通常销售多年，使用多长时间内的销售量来进行定价，也是一个容易引起争议的地方。除了销售量难以预测以外，在边际费用和非边际费用的确定方面，也难以找到一些简单便捷的标准以使其对不同的产品都保持合理。因此，理论上更加合理的宏观定价法在现阶段还难以推广应用。但针对少数特定的产品，宏观定价法会比传统的定价方法更容易给管理层提供决策参考。

§13.4 定价的各种假设

定价中的各种假设远比定价方法及公式重要，计算结果是否有效，几乎完全取决于定价假设是否符合实际。可以说，有什么样的假设，就会有什么样的结果。定价过程中假设因素的确定的确是既困难又有一定的风险，因为对未来不能准确预测，因而各种因素的假设具有一定的概率特征。

13.4.1 影响定价假设的因素

影响定价假设的因素很多，这里仅从经济和社会环境、公司特点、市场特点及产品特点等方面进行说明。

1. *经济和社会环境*。定价假设的第一步是对当前经济和社会环境状况进行评价，并对其未来发展趋势进行预测。

投资品种的多少和法规的限制、债券及股票市场的状况、市场平均投资收益率水平等将影响寿险公司的利率假设；经济衰退伴随着失业率的增长将导致伤残率、失效率等的增长；人口及其结构变化将改变寿险公司的产品状况和市场状况；计算机技术的飞速发展又为产品开发及营销计算机化提供了良好的条件等。

2. *公司特点*。寿险公司的特点将会极大地影响定价假设的选择，公司经营的各个方面的思想可以反映出其特点。需要根据这些特点来决定定价假设，例如：（1）利润目标对公司的重要性。（2）保费增长目标对公司的

重要性。（3）股东权益对公司的重要性。（4）公司管理的保守程度。（5）公司短期及长期目标的重点。（6）公司的类型：股份公司还是相互公司等。

如果保费增长是公司首要目标的话，由于保险监管机关对偿付能力的要求，资本金的数量就成了业务规模的制约因素。如果公司自身没有可靠的死亡率数据、失效率数据、费用数据的话，就只能利用外部的数据。如公司承保的自留额较低，很多保单都会进行再保险，则在定价时就要将再保险的成本和理赔摊回考虑进去。另外，所利用的定价方法和公式也在某种程度上决定了定价假设的选择。

3. 市场特点。寿险公司面对的市场是在不断变化的；寿险公司应该考察市场变化对各种定价假设的影响，特别是在决定开辟新的市场或新的险种情况下。寿险公司应考虑到各种市场因素的变化对定价因素的影响，即使寿险公司本身并没有变化，但外界的竞争环境会发生变化。寿险公司需要考虑的与市场相关的因素包括：

销售机构：如分公司、支公司、总代理或仅仅由总公司直售。

推销队伍：专业代理人、兼业代理人、个人代理人、经纪人、利用信函、电话、网络直接销售，或其他方式。

营销培训：对代理人员的培训，包括招募新的代理人，并对其进行推销技巧、公司产品等方面的培训等。

销售方法：进行多方面的分析和比较，包括保障需求、理财需求、现金流规划、资产管理、险种选择、产品利益演示及不同险种的价格比较等。

目标市场：对个人寿险来说，需要分析和了解目标市场的经济发展水平、保费规模、年龄分布、职业特征、地域分布、保险目标、保险需求、保费支付能力和支付方式等。对团体保险来说，需要分析和了解目标市场的规模、团体所在行业、公司类型及现有福利计划等。

内部改进：如果寿险公司通过改进服务使客户满意程度提高，就会明显减少失效率。这样，既可以使未来的销售变得容易，也有利于保户续保，在长期内是有利的，内部的改进包括承保、保全、理赔等各个环节的工作。

其他：如广告的种类（包括市区、市郊、农村等的定位）、定价策略、核保标准等。

4. 产品特点。寿险公司所开发的产品各方面的特点也将影响寿险公司的定价假设。包括：

产品的类型：如分红保单的定价假设比不分红保单的定价假设更加保守。

保障内容：如以死亡为保障内容与以生存为保障内容的定价假设不同。

保险期限：如保险期限的长短对于利率假设会产生很大的影响。

缴费方式：如保费递减的定期保险的失效率要低于均衡保费对应的失效率，而保费递增的险种的失效率往往很高。

投资风险分担方式：如普通型寿险产品与投资连结类的寿险有很大的区别。

再保险：再保险是那些对自留额限制较严格的公司在定价时需要考虑的因素，也是对某种产品、某一类大额保单需要考虑的因素。如有自留额限制的险种费率的确在很大程度上依赖于再保险的安排。

保单选择权：保单选择权包括退保、保单借款、自动垫交、减额缴清、保额变更、缴费年期变更等。有些保单选择权对于寿险产品的利润影响很大，需要在定价时谨慎考虑。例如，退保金的大小对于失效率会产生影响，若某险种初期现金价值高，就会导致较高的初期失效率。

13.4.2 定价假设

在定价过程中考虑的因素很多，而且这些因素对于不同的产品或不同的客户群会有所不同，本部分仅对定价假设中的死亡率、利率、费用率、失效率、件均保额等进行说明。

1. 死亡率。寿险业的经验生命表是死亡率假设的基础。1997 年 4 月 1 日我国颁布了第一张中国寿险业经验生命表，即《中国人寿保险业经验生命表（1990—1993）》，简称 CL（1990—1993）。1999 年颁布的《人寿保险精算规定》中规定，保险公司在厘定保险费时，预定死亡率应当采用此表所提供的数据。2005 年 12 月 22 日，保监会颁布了《中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）》，即中国第二张寿险业生命表，简称：CL（2000—2003）。同时在同期发布的《关于修订精算规定中生命表使用有关事项的通知》中，规定保险公司可以自行决定定价用生命表，即保险公司在厘定保险费时，预定死亡率可以采用中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）所提供的数据，也可以采用公司自身的经验数据或来自其他途径的数据。

寿险公司自身的经验死亡率对定价的死亡率假设是十分重要的，而且各公司之间的经验死亡率差别可能是很大的。在实务中，死亡率假设表现出不同的特点，例如：

（1）死亡率假设因险种不同而不同，如偏重死亡保障的保险和偏重生存给付的保险、终身寿险和定期寿险之间的死亡率假设可能有所不同。

（2）对于同一个险种的不同类别的客户群，死亡率假设也会有所不同，除了年龄、性别等因素外，有时还要考虑其他因素，如吸烟者与不吸烟者、保险金额的大小等。

（3）对于有较严格核保要求的险种，保单生效后，前几年的死亡率假设可以包含一定的核保选择因子，如首年 60%、第 2 年 80%、第 3 年及以

后为100%。

（4）寿险定价中，通常首先基于标准生命表进行定价，然后利用标准生命表的一定比例，如125%、150%、200%等计算非标准体各个等级对应的费率表。对经核保评定为标准体的客户适用标准体费率，而对核保评定为非标准体的客户，则适用于对应等级的非标准体费率。

（5）对于年金等具有长寿风险的产品，在定价时还须考虑死亡率改善的因素。死亡率的改善对于不同种类的寿险产品价格的影响不同。

（6）死亡率假设有时也与保险金额有关。

（7）通常，定期寿险对于死亡率假设的变动较为敏感，而两全保险对于死亡率假设的变动不敏感，因为死亡和生存两个因素在一定程度上互相抵消了。

2. 利率。寿险公司的利率假设可以看作是保单持有人未来的收益率，也可看作是单纯根据死亡率计算的保费的进一步折减。寿险大多是长期险，寿险公司假设的利率能否实现，要看未来实际投资收益，因此，利率假设必须十分慎重。精算人员一般在确定假设利率之前要与投资部门进行协商，他们能提供本公司及其他公司过去的投资收益情况及对未来投资收益情况的预测。通过与投资部门的研究，精算人员对未来短期及长期的投资收益情况有个大致的了解。

利率假设对于保险公司的定价十分重要，特别是对于储蓄成分比较多的传统寿险，由于定价利率在保单有效期内是固定不变的，相当于是一种保证，因此这些险种的利率风险通常较高。因此，寿险公司在进行利率假设时都是十分谨慎的，常常采用较为保守的态度，即选择偏小一点的定价利率。一般情况下，在选择利率假设时应该考虑：

（1）利率假设的基础是公司的投资收益水平。

（2）不同保障范围的产品的利率假设可以不同，如长期寿险和短期寿险、保障型产品和储蓄型产品。

（3）投资风险分摊机制不同也会影响利率假设，如分红寿险和不分红寿险、万能寿险和投资连结保险。

（4）利率假设在整个保险期间一般是均衡的，但有时也可以是不均衡的。

（5）利润和价格对利率敏感的产品，其利率假设应更谨慎；而定期寿险这一类对利率不敏感的产品，利率假设时的自由度则较大。

3. 失效率。定价中考虑的失效率通常包含客户主动退保，以及客户未正常缴费而导致保单终止的情形，同时也包含减额缴清、展期等保单未能正常持续下去的情形。一般而言，失效率假设基于公司自身的经验数据，而各公司之间由于管理方式、管理流程、服务水平、品牌等各种差别而使

失效率大相径庭。如果公司经验数据有限，可以找与公司经营状况相类似公司的经验数据，再根据险种、年龄、性别、保额等因素进行调整。即使是本公司的经验数据，在使用时仍需做适当的调整。险种变化、销售人员的变化、外部环境的变化等都会对未来的失效率产生影响。

对某些新的险种，失效率假设只能基于精算人员的判断估计。这种判断、估计越多，就越需要仔细测试该险种在各种不同失效率下的利润等情况，以便清楚了解当精算人员的判断出现偏差时对公司经营的影响。

保单失效率受公司内外部众多因素的影响：

（1）保单年度。保单失效率随保单年度的增加而降低。当然，也有例外情况，如保费递增的定期寿险的失效率，常常是随保单年度的增加而提高。

（2）被保险人投保时的年龄。十几岁至二十几岁的被保险人保单失效率较高，而 30 岁以上的被保险人随年龄增加保单失效率会降低。

（3）保额。大额保单的失效率通常较低，但对保费递增的大额保单，失效率可能会随时间推移而升高。

（4）保费支付频率。一般缴费频率越高，失效率相对越高。

（5）保费支付方式。通过信用卡扣款或者银行自动转账的保单，失效率相对较低。

（6）性别。当其他情况相同时，女性的保单失效率通常要比男性的低。

（7）险种类型。不同险种类型的失效率各不相同，如保费递增定期寿险、均衡保费定期寿险、保费递减定期寿险、个人年金、直接信函推销的保单、不同现金价值水平的险种的失效率通常各不相同。

在定价过程中，失效率假设一方面要考虑到合理性、准确性，另一方面也要考虑到实务操作的简便。实务中通常使用的失效率假设一般仅仅和险种类型、保单年度相关。

4. 费用率。费用率一般随险种类型的不同而不同。同时各公司间的差异很大，虽然大的公司比小的公司总是有较低的单位费用率，但并不完全是规模经济的结果，有时也是由于管理流程、运营效率、费用管控力度的不同所致。

在确定费用率时，先计算总的费用，然后通过一定程序把总费用分摊到每一张保单上。对于规模比较大的公司，可以把全部费用分摊到每一张保单上，每张保单的单位费用之和完全等于总费用。但对于一些规模较小，或新成立的公司，定价中使用的费用率通常是假定公司进入一定规模后持续经营时的单位费用率。

定价中使用的单位费用率，通常表现的形式包括：每张保单一个固定金额、保额的一定比例、保费的一定比例、管理费的一定比例、理赔金额

的一定比例、每次退保或理赔时的一个固定金额、每张到期保单的一个固定金额等。

保险公司的费用类型很多，下面给出了费用的一种分类及其相关的单位。这不是唯一的分法，公司可合并简化或划分更加细致。

（1）保单获得费用。保单签发费用：以签发的每张保单为单位。

承保费用：一种方式是将承保支出按每张保单合并考虑、按保费的一定比例考虑或按每千元保费的一定额度考虑；另一种方式是建立每张保单费用的一个矩阵，各费用根据被保险人的年龄、保额及各种承保限制的变化而变化。

其他保单获得费用：如总公司和地区分公司的营销推动、产品开发、培训代理人、广告宣传的费用，这些费用通常按保费的一定比例计算。

（2）佣金和手续费。代理人佣金：按保费的一定百分比计算。

代理人的其他报酬：如奖金、竞赛、奖励、研讨会、员工福利、社会保险、税金等，这些费用按保费或佣金的一定比例计算。

（3）保单维持费用。与保费相关的：如银行转账费用、会计处理费用、佣金的管理费用等，按单位保费的一定比例计算。

其他维持费用：如精算评估、客户服务、电脑系统处理保单记录费用等，按每张有效保单计算。

保费收入税：按保费一定比例计算。

（4）保单终止费。退保费用：以每例退保为单位，计算费用。

无现金价值失效费用：以每张无现金价值失效保单为单位。

死亡给付费用：以每次死亡给付为单位或以每千元死亡给付为单位。

到期费用：以每张到期保单为单位。

在实务的定价过程中，通常将上述各类费用设计为固定费用、保费的比例和保额的比例，以便于处理和计算。

5. 件均保额。某些费用呈现出每张保单一个固定金额的特征，如保单打印费、退保和理赔费用、系统处理保单记录的费用等。但定价时，最终计算出来的保费却是以每1 000元保额为单位的，因此这些固定金额的费用在定价中，要通过合理的方式转化为保额或保费的一定比例。一个件均保费或件均保额较大的险种，每张保单在定价中分摊的固定金额的费用就较低。而对于一些件均较小的保单，一些固定的费用（如保单打印费用）都会成为影响价格的重要因素。件均保额的假设通常根据公司其他类似产品或者同业产品的情况来确定。

习　题

1. 简述寿险定价的基本原则。
2. 简述寿险公司产品开发的过程。
3. 简述净保费加成法的定价过程。
4. 简述资产份额定价法的一般过程。
5. 简述宏观定价法的一般过程。
6. 试比较本章介绍的三种定价方法的优缺点。
7. 简述影响定价假设的因素。
8. 试述死亡率、利率、失效率、费用率、件均保额对定价的影响。

第十四章　资产份额定价法

学习目标

- □ 熟悉资产份额定价法的具体计算过程、利润指标的衡量
- □ 掌握资产份额定价模型中基于大量相同保单和基于一张保单的计算方法
- □ 熟悉各种因素假设对现金流的影响，会使用 Excel 进行敏感性分析和情景测试
- □ 了解保费变化对利润的影响，掌握保费调整的计算方法

§14.1　资产份额定价的计算过程

14.1.1　一些基础概念的说明

资产份额定价是针对同时签发的大量完全相同保单，预测未来每个时间点的现金流，并计算在未来每个时间点的资产过程。要预测未来的现金流，就要考虑到保费、费用、赔付、退保、期望红利、投资收益率等因素，最终计算出未来每个时间点的有效保单的资产总额，分摊到单位保额的每张有效保单上，就是单位保额有效保单对应的资产份额。资产份额代表的是资产，期末准备金代表的是负债，两者都是对保单年度末的有效保单而言的。盈余即是资产份额与准备金之间的差额。由于这些盈余是随着保单年度的增加，逐年变动累积而成，也称为累积盈余。

每个保单年度，累积盈余的变化量，称为本期损益。本期损益中有一部分是上期末累积盈余产生的利息，本期损益中扣除这部分利息后的余额，就是本期的利润，它可以理解为本期业务自身的运行所产生的营运损益。

在计算过程中，需要区分两个概念，一个是签发时的所有保单，一个是各期末剩余的有效保单。对于同时签发的大量相同保单，随着时间推移，在随后的保单年度内，其中一些投保人死亡或退保，每年末剩余的有效保单数量在不断减少。例如，设在某年内签发了 1 万张相同的新保单，在随后的保单年度内，每年末剩余的有效保单数量如表 14 - 1 第 5 列所示。为讨论简便，假设当初仅仅签发了 1 份新保单，从期望的角度，未来各保单年度末剩余的有效保单数如表 14 - 1 第 6 列所示。

表 14－1　　　　有 效 保 单 数

保单年度	期初有效保单数	死亡率	失效率	当年生存概率	期末有效保单数	仅签发 1 张保单时平均期末有效保单数
	(1)	(2)	(3)	(4) = [1 - (2)] * [1 - (3)]	(5) = (1) * (4)	(6) = (5)/10 000
1	10 000	0.00096	0.15	0.8492	8 492	0.8492
2	8 492	0.00102	0.10	0.8991	7 635	0.7635
3	7 635	0.00109	0.08	0.9190	7 016	0.7016
4	7 016	0.00118	0.07	0.9289	6 518	0.6518
5	6 518	0.00127	0.06	0.9388	6 119	0.6119
6	6 119	0.00137	0.05	0.9487	5 805	0.5805
…	…	…	…	…	…	…

在使用资产份额定价法预测未来的现金流时，为了模型的简便，通常基于单位保额来进行计算，单位保额一般表述为每 1 000 元保险金额。而在实际销售时，每张保单的保险金额可能是 1 000 元的一定倍数，所以“每张保单”和“每单位保额保单”这两个概念是不相同的。在资产份额定价模型中，我们通常以单位保额作为各项数值计算的基础，同时使用“件均保额”这个变量，把一些和每张保单相关的参数通过单位保额加以转换。例如，同时新签发了 100 张保额为 5 000 元的保单，在一定年数后还剩余 40 张保单，如使用单位保额的概念来表述，等同于签发了 500 张单位保额保单，在一定年数后还剩余 200 张单位保额有效保单。

在构建资产份额定价模型时，我们既可以针对大量的（如 1 万张）单位保额保单来计算，也可以基于期望的基础，仅针对新签发的 1 张单位保额保单来计算。如果采用前者，未来各年度末的单位保额有效保单数量在死亡和退保因素的影响下，逐年减少，理解起来相对容易一些。如采用后者，未来各年度末剩余的单位保额有效保单数量则是基于期望的概念，而且对于不同年度末的每张单位保额有效保单，需要通过精算折现因子换算后才能比较，相对复杂一些。在本节第 3 小节的计算中，如无特别说明，则均采用前者。基于每年度末每张单位保额有效保单的资产份额的计算，将在第 4 小节中简要说明，以便进行比较。

需要注意的是：现金价值因子和准备金因子总是表述为期末每张单位保额有效保单对应的数值。

资产份额定价法涉及对未来年度保单现金流的预测，在计算机技术普遍应用之前，为简化计算，通常仅计算到 20 年或 30 年。但随着计算机技术的进步和普及，资产份额定价法可以计算至最长的保单年度，如终身寿

险则计算到生命表的最大年度。

14.1.2 现金流计算项目和基本计算公式

用资产份额定价法预测保单每年的现金流并进行利润测试时，主要考虑以下项目。这些项目是对常见项目的罗列，对不同险种是有所不同的，实务中可能将其中一些项目合并或拆分。

（1）保费收入；（2）再保险成本（如再保险分出比例较大时，则考虑此项）；（3）投资收入；（4）佣金和手续费；（5）管理费用；（6）保险给付（含死亡给付、伤残给付、疾病给付、生存给付、退保给付、满期给付等）；（7）保单红利（这里把红利与保险给付并列进行处理，在计算累积盈余之前先扣除）；（8）税金；（9）期末准备金；（10）期末累积盈余；（11）当期损益；（12）当期利润；（13）股东利润分配；（14）期初资产份额 AS_0（签发保单时刻，$AS_0=0$）；（15）期末资产份额 AS_1（股东利润分配之前）；（16）期末资产份额 AS_2（股东利润分配之后）。

通过上述各个项目，可以进行如下计算：

① 总收入 = 保费收入 - 再保险成本 + 投资收入

② 总支出 = 佣金和手续费 + 管理费用 + 保险给付 + 保单红利 + 税金

③ 期末资产份额 AS_1 = 期初资产份额 AS_0 + 总收入 - 总支出

④ 期末累积盈余 = 期末资产份额 AS_1 - 期末准备金

⑤ 当期损益 = 本期末累积盈余 - 上期末累积盈余

⑥ 当期利润 = 当期损益 - 上期末累积盈余在本期内的投资收入

⑦ 期末资产份额 AS_2 = 期末资产份额 AS_1 - 股东利润分配

⑧ 下一年度期初资产份额 AS_0 = 上一年度期末资产份额 AS_2

14.1.3 各项目的详细说明

在这一小节里，分八个部分展开讨论。

1. 基本符号。下列符号用于表示各种死亡率、利率等内容，具体为：

x 为投保年龄；n 为保险期间；t 为保单年度，$0\leqslant t\leqslant n$，$t=0$ 表示投保时刻；m 为缴费期间。

q_t^d 为 x 岁购买保险且在保单年度 t 年初生存的被保险人，在第 t 保单年度内死亡的概率，即单个被保险人进入保单年度 t 并在此年内死亡的概率。实务中通常假设死亡在年中发生。

q_t^w 为 x 岁购买保险且在保单年度 t 年初生存的被保险人，在第 t 保单年度内退保的概率，即单个被保险人进入保单年度 t 并在此年内退保的概率。实务中通常假设退保发生在年末。

p_t 为 x 岁购买保险且在保单年度 t 年初生存的被保险人，在第 t 年末仍

生存的概率：

$$p_t = (1 - q_t^d) \cdot (1 - q_t^w) \qquad (14-1)$$

i_t 为保单年度 t 的预期投资收益率，此利率一般是保险公司根据其自身投资能力、市场投资状况、市场平均收益率确定。实务中，i_t 可以是 t 的函数，有时为了简便，也设置为一个常数。

j_t 为风险贴现利率，此利率为股东投资保险行业所要求的投资回报率，反映了股东的资本成本和一定的投资风险附加。实务中，j_t 可以是 t 的函数，但有时为了简便，也设置为一个常数（如 12%）。

v 为一年贴现因子，当 j_t 为一常数值时，

$$v = 1/(1 + j_t) \qquad (14-2)$$

${}_tD_x$ 为贴现因子，用于将保单年度 t 年末的项目贴现到保单签发时刻，其贴现过程是生存因素和利息因素共同作用的结果。把保单签发时的贴现因子定义为 1，即：

$${}_0D_x = 1 \qquad (14-3)$$

由于已假设了式（14－3），在贴现过程中就不需要再将${}_tD_x$ 除以${}_0D_x$。保单年度 t 年末的贴现因子和保单年度 $t-1$ 年末的贴现因子的关系为：

$${}_tD_x = {}_{t-1}D_x \cdot p_t \cdot v \qquad (14-4)$$

BIF_t 为第 t 保单年度初的单位保额有效保单总数。

EIF_t 为第 t 保单年度末的单位保额有效保单总数，它根据保单年度初的单位保额有效保单总数计算得来：

$$EIF_t = BIF_t \cdot p_t = BIF_t \cdot (1 - q_t^d) \cdot (1 - q_t^w) \qquad (14-5)$$

2. 件均保额。在定价模型中，我们以单位保额（即每 1 000 元保险金额）为基础进行计算，但实际经营过程中，销售出去的保单的保险金额大小不同。根据销售统计或同行业类似产品的件均保额，可以总结出定价中使用的件均保额假设。

用符号 AZ 表示件均保额。如果实际销售的保单平均保额为 5 000 元，则 $AZ = 5$。

3. 保费收入。GP_t 为每张单位保额有效保单在保单年度 t 不包括保单发单费用的费率。

PI_t 为在现金流预测中，未来各保单年度的预期保费收入。

$$PI_t = GP_t \cdot BIF_t \qquad (14-6)$$

如果保险公司针对每一张新保单，额外收取客户一个固定比例的保单发单费用，而且发单费用平均附加在每一期保费上，那么

$$PI_t = \left(GP_t + \frac{\text{发单费用}}{AZ}\right) \cdot BIF_t \qquad (14-7)$$

4. 费用。EPP_t 为保单年度 t 年初，每张有效保单发生的固定金额的费用；

EPI_t 为保单年度 t 年初，收取每 1 元保费的费用；

ESA_t 为保单年度 t 年初，每张单位保额有效保单发生的费用；

ED_t 为保单年度 t 年中，每次死亡给付发生时产生的固定金额的费用，和死亡给付一同发生在年中；

EW_t 为保单年度 t 年中，每次退保发生时产生的固定金额的费用，和退保金一同发生在年末；

$EDIV_t$ 为保单年度 t 年末，每张保单红利发放时产生的费用；

EB_t 为保单年度 t 年初发生的费用之和；

EE_t 为保单年度 t 年末发生的费用之和。

有了上述费用的分类，就可以对各类费用进行合并计算。

（1）期初费用。为了简化计算，假设每张保单的固定费用、每 1 元保费的费用、每 1 000 元保额的费用都发生在保单年度初，这些费用合并后，未来各年度初的费用计算过程为：

$$EB_t = BIF_t \cdot \frac{EPP_t}{AZ} + EPI_t \cdot PI_t + BIF_t \cdot ESA_t \tag{14-8}$$

（2）期末费用。期末费用包含死亡给付费用、退保费用和红利发放费用。实务中，通常假设死亡发生在年中，退保和红利分配发生在年末。红利分配既可以假设发生在退保之前，也可以发生在退保之后。假设红利也分配给退保者，则更为保守。把这些费用合并后，未来各年度末的费用计算过程为：

$$\begin{aligned} EE_t = {} & \frac{ED_t}{AZ} \cdot BIF_t \cdot q_t^d \cdot (1+i_t)^{0.5} + \frac{EW_t}{AZ} \cdot BIF_t \cdot (1-q_t^d) \\ & \cdot q_t^w + \frac{EDIV_t}{AZ} \cdot BIF_t \cdot (1-q_t^d) \end{aligned} \tag{14-9}$$

在实际经营过程中，对固定金额费用的假设通常来自对过去的经验分析的结果，由于通货膨胀因素的存在，在未来年度发生的固定金额的费用，应随着预计的通货膨胀率逐年增大。在本节中，为了简便计算，均假设通货膨胀率为零。

5. 保险给付额。下面符号用于表示各项保险给付：

DB_t 为每张单位保额有效保单，在保单年度 t 中，支付给在该年度内死亡的被保险人的保险给付金额。对于本节中的例子，$DB_t = 1\ 000$。

CV_t 为每张单位保额有效保单，在保单年度 t 年末的现金价值因子。

DIV_t 为每张单位保额有效保单，在保单年度 t 年末的红利。假设红利也分配给退保者。

BEN_t 为保单年度 t 年内支付的各项保险给付额之和，并通过利率调整到年末。

第 t 保单年度内的各项给付金额要根据各项给付发生概率进行计算，

即死亡给付需要乘以死亡率，退保给付需要乘以失效率，红利给付需要考虑被保险人存活到年末（可参与红利分配）的概率。从而，

在当期由死亡导致的单位保额有效保单数为

$$BIF_t \cdot q_t^d \tag{14-10}$$

在当期由退保导致的单位保额有效保单数为

$$BIF_t \cdot (1-q_t^d) \cdot q_t^w \tag{14-11}$$

在当期领取红利的单位保额有效保单数为

$$BIF_t \cdot (1-q_t^d) \tag{14-12}$$

当年保险给付总额的计算过程为：

$$BEN_t = BIF_t \cdot q_t^d \cdot DB_t \cdot (1+i_t)^{0.5} + BIF_t \cdot (1-q_t^d) \cdot q_t^w \cdot CV_t + BIF_t \cdot (1-q_t^d) \cdot DIV_t \tag{14-13}$$

如果红利不分配给退保者，那么最后一项变为：

$$BIF_t \cdot (1-q_t^d) \cdot (1-q_t^w) \cdot DIV_t \tag{14-14}$$

6. 资产份额和累积盈余。AS_t 为在保单年度 t 年末，所有有效保单的资产份额之和，这个资产份额是自保单签发累积至第 t 保单年度末的资产度量；

V_t 为在保单年度 t 年末，所有有效保单的准备金之和；

SUR_t 为在保单年度 t 年末，所有有效保单的累积盈余之和；

设初始资产份额为0，资产份额的计算公式为：

$$AS_0 = 0 \tag{14-15}$$

$$AS_t = (AS_{t-1} + PI_t - EB_t) \cdot (1+i_t) - BEN_t - EE_t \tag{14-16}$$

累积盈余定义为资产份额与期末准备金的差额：

$$SUR_t = AS_t - V_t \tag{14-17}$$

7. 当期损益和利润。当期损益和当期营运损益是不同的概念。

$GAIN_t$ 为在保单年度 t 年内获得的收益，称为当期损益。当期损益等于累积盈余在保单年度 t 内的增量；

$PROF_t$ 为在保单年度 t 年内获得的利润，称为当期营运损益，它等于当期损益减去累计盈余在保单年度 t 内的利息收入；

由定义可得：

$$GAIN_t = SUR_t - SUR_{t-1} \tag{14-18}$$

当期损益包含累积盈余的利息收入。由于累计盈余是以前所有年份利润的累积值，因此当期损益中含有上期末的累积盈余在本期内的利息收入，这一部分受以前各年经营情况的影响。为了能更好地描述当年经营的成果，我们把利润定义为当期损益减去上期末的累积盈余在本期内的利息收入的余额，即：

$$PROF_t = GAIN_t - SUR_{t-1} \cdot i_t \tag{14-19}$$

把（14－18）代入（14－19），可得到：

$$PROF_t = SUR_t - SUR_{t-1} \cdot (1 + i_t) \tag{14-20}$$

再把（14－16）和式（14－17）代入（14－20），可得到：

$$PROF_t = (AS_{t-1} + PI_t - EB_t) \cdot (1 + i_t) - BEN_t - EE_t - V_t - (AS_{t-1} - V_{t-1}) \cdot (1 + i_t) \tag{14-21}$$

整理后，$PROF_t$ 表述为保费、费用、保险给付、利息和准备金提转差的形式，即：

$$PROF_t = (PI_t - EB_t) \cdot (1 + i_t) - BEN_t - EE_t - (V_t - V_{t-1}) + V_{t-1} \cdot i_t \tag{14-22}$$

此外，根据（14－20）利润和累积盈余的关系，如果每年的投资收益率均相同，可得：

$$SUR_t = \sum_{s=1}^{t} PROF_s \cdot (1 + i)^{t-s} \tag{14-23}$$

8. 利润测量。下列符号用于利润测量。

$PVPROF_x$ 为所有利润在承保时的现值；

$PVPI_x$ 为所有保费收入在承保时的现值；

由上述定义可得出：

$$PVPROF_x = \sum_{s=1}^{n} PROF_s \cdot v^s \tag{14-24}$$

其中 v^s 将各个保单年度末的利润贴现至承保时。

由于保费在每年的年初支付，因此：

$$PVPI_x = \sum_{s=1}^{n} PI_s \cdot v^{s-1} \tag{14-25}$$

比较常用的利润指标有：

（1）利润边际。利润边际为利润现值与保费现值之比，即：

$$\frac{PVPROF_x}{PVPI_x} \tag{14-26}$$

（2）投资回报率。使所有年度的利润现值之和等于 0 的收益率。

（3）盈亏平衡年。使得累积盈余大于 0 且之后不再变为负值的第 1 个年份。

（4）特定年数（如 20 年或 30 年）后，资产份额与准备金的比例关系。

14.1.4　基于期末每张有效保单的资产份额计算

上一节在使用资产份额定价法预测未来的现金流时，我们是针对大量相同的保单来计算的。由于死亡、退保的影响，每一年中参与计算的有效保单数量在不断减少，从而每年针对全体有效保单计算的现金流自然已经

包含了生存概率的影响。

但如果以一张单位保额有效保单来计算各年度末的资产份额及在每年的变化时，则要在公式中明确考虑生存概率的影响。

对一张单位保额有效保单，现定义一些新符号如下，其余符号的定义与上节相同：

PI'_t为在第 t 保单年度初的保费收入；

EB'_t为在第 t 保单年度初发生的费用；

EE'_t为在第 t 保单年度末发生的费用；

BEN'_t为在第 t 保单年度内预期支付的各项保险给付额之和；

AS'_t为在第 t 保单年度末的资产份额；

V'_t为在第 t 保单年度末的准备金；

SUR'_t为在第 t 保单年度末的累积盈余；

$GAIN'_t$为在第 t 保单年度的本期损益；

$PROF'_t$为在第 t 保单年度的利润；

$PVPROF'_x$为每张新签发的单位保额保单所有未来利润在承保时的现值；

$PVPI'_x$为每张新签发的单位保额保单所有未来保费收入在承保时的现值。

有了以上符号，可类似地建立如下关系式。

设初始资产份额为0，资产份额的计算公式为：

$$AS'_0 = 0 \tag{14-27}$$

$$AS'_t = \frac{(AS'_{t-1} + PI'_t - EB'_t) \cdot (1 + i_t) - BEN'_t - EE'_t}{p_t} \tag{14-28}$$

其中，

$$PI'_t = GP_t \text{ 或 } PI'_t = GP_t + \frac{\text{发单费用}}{AZ} \tag{14-29}$$

$$EB'_t = \frac{EPP_t}{AZ} + EPI_t \cdot PI'_t + ESA_t \tag{14-30}$$

$$EE'_t = \frac{ED_t}{AZ} \cdot q_t^d \cdot (1 + i_t)^{0.5} + \frac{EW_t}{AZ} \cdot (1 - q_t^d) \cdot q_t^w + \frac{EDIV_t}{AZ} \cdot (1 - q_t^d) \tag{14-31}$$

$$BEN'_t = q_t^d \cdot DB_t \cdot (1 + i_t)^{0.5} + (1 - q_t^d) \cdot q_t^w \cdot CV_t + (1 - q_t^d) \cdot DIV_t \tag{14-32}$$

对于累积盈余、本期损益、利润等指标，则有：

$$SUR'_t = AS'_t - V'_t \tag{14-33}$$

$$GAIN'_t = SUR'_t - \frac{SUR'_{t-1}}{p_t} \tag{14-34}$$

$$PROF'_t = GAIN'_t - \frac{SUR'_{t-1} \cdot i_t}{p_t} \quad (14-35)$$

$$PROF'_t = SUR'_t - \frac{SUR'_{t-1} \cdot (1+i_t)}{p_t} \quad (14-36)$$

$$PROF'_t = \frac{(V'_{t-1} + PI'_t - EB'_t) \cdot (1+i_t) - BEN'_t - EE'_t}{p_t} - V'_t \quad (14-37)$$

$$PVPROF'_x = \sum_{s=1}^{n} PROF'_s \cdot {}_sD_x \quad (14-38)$$

$$PVPI'_x = \sum_{s=1}^{n} PI'_s \cdot {}_{s-1}D_x \quad (14-39)$$

如果每年的投资收益率和风险贴现利率完全相同，则有：

$$SUR'_t = \sum_{s=1}^{n} PROF'_s \cdot \frac{{}_sD_x}{{}_tD_x} \quad (14-40)$$

14.1.5 两种计算方式下的计算结果对比

在构建资产份额定价模型时，无论是基于大量相同的保单来计算，还是基于一张保单来计算，计算出来的每单位保额有效保单的资产份额、累积盈余、本期损益、利润等指标均完全相同，即：

$$AS'_t = \frac{AS_t}{EIF_t} \quad (14-41)$$

$$SUR'_t = \frac{SUR_t}{EIF_t} \quad (14-42)$$

$$GAIN'_t = \frac{GAIN_t}{EIF_t} \quad (14-43)$$

$$PROF'_t = \frac{PROF_t}{EIF_t} \quad (14-44)$$

§14.2 实例分析

在上节了解了资产份额定价法的计算过程和各项公式后，这里通过一个实例来进行具体说明，相关假设如下：

测试的险种为分红终身寿险；

被保险人为 35 岁男性；

缴费期间为 20 年；

单位保额定义为每 1 000 元保险金额，件均保额为 50；

测试中使用的每 1 000 元保险金额对应的年缴保险费为 29 元；

费用假设如表 14 -2 所示：

表 14 – 2

项目 \ 年度	1	2	3	4	5	6 及以后
固定金额	200	60	60	60	60	60
保费比例	75%	25%	10%	10%	10%	3%
保额比例	1%	—	—	—	—	—
每次理赔	60					
每次退保	60					
每次分红	60					

假设每 1 000 元保险金额对应的准备金因子、现金价值因子、每年红利金额已通过其他方式计算出来，供本实例直接使用；

年投资收益率为 6%。

为讨论简便，仅计算前 30 年的现金流。

14.2.1 基于 1 万张单位保额保单进行计算

首先，我们针对 1 万张单位保额保单来预测未来现金流，并计算相关利润指标，具体的计算过程和计算结果见表 14 – 3：

表 14 – 3　　现金流预测结果 I

保单年度	1	2	3	4	5	6	7
	期初单位保额有效保单数	死亡率	失效率（%）	死亡数	退保数	参与分红人数	期末单位保额有效保单数
1	10 000	0.00096	15	10	1 499	9 990	8 492
2	8 492	0.00102	10	9	848	8 483	7 635
3	7 635	0.00109	8	8	610	7 627	7 016
4	7 016	0.00118	7	8	491	7 008	6 518
5	6 518	0.00127	6	8	391	6 509	6 119
6	6 119	0.00137	5	8	306	6 110	5 805
7	5 805	0.00148	4	9	232	5 796	5 564
8	5 564	0.00158	3	9	167	5 556	5 389
9	5 389	0.00169	2	9	108	5 380	5 272
10	5 272	0.00180	2	10	105	5 263	5 157
11	5 157	0.00193	2	10	103	5 148	5 045
12	5 045	0.00208	2	10	101	5 034	4 933
13	4 933	0.00224	2	11	98	4 922	4 824
14	4 824	0.00243	2	12	96	4 812	4 716
15	4 716	0.00264	2	12	94	4 703	4 609
16	4 609	0.00286	2	13	92	4 596	4 504

续表

保单年度	1 期初单位保额有效保单数	2 死亡率	3 失效率（%）	4 死亡数	5 退保数	6 参与分红人数	7 期末单位保额有效保单数
17	4 504	0.00308	2	14	90	4 490	4 401
18	4 401	0.00331	2	15	88	4 386	4 298
19	4 298.	0.00355	2	15	86	4 283	4 197
20	4 197	0.00382	2	16	84	4 181	4 098
21	4 098	0.00416	2	17	82	4 081	3 999
22	3 999	0.00460	2	18	80	3 981	3 901
23	3 901	0.00514	2	20	78	3 881	3 803
24	3 803	0.00581	2	22	76	3 781	3 706
25	3 706	0.00658	2	24	74	3 681	3 608
26	3 608	0.00745	2	27	72	3 581	3 509
27	3 509	0.00839	2	29	70	3 480	3 410
28	3 410	0.00940	2	32	68	3 378	3 311
29	3 311	0.01047	2	35	66	3 276	3 210
30	3 210	0.01163	2	37	63	3 173	3 110

说明：

首年(1)=10 000，之后$(1)_t=(7)_{t-1}$

(2) 为《中国人寿保险业经验生命表（2000—2003)》中的非养老金业务男表×80%

(3) 为假设的未来各年度失效率

(4)=(1)×(2)

(5)=[(1)-(4)]×(3)

(6)=(1)-(4)，这里假设红利也分配给退保者

(7)=(1)-(4)-(5)

表 14-3（续）

保单年度	8 现金价值因子	9 准备金因子	10 预计红利因子	11 每张保单固定费用	12 按保费比例费用（%）	13 按保额比例费用（%）	14 每次理赔固定费用	15 每次退保固定费用	16 每次分红固定费用
1	3	21	0.00	200	75	1	60	60	60
2	12	42	0.42	60	25		60	60	60
3	22	64	0.84	60	10		60	60	60
4	36	87	1.28	60	10		60	60	60
5	50	109	1.74	60	10		60	60	60
6	66	133	2.18	60	3		60	60	60

续表

保单年度	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	现金价值因子	准备金因子	预计红利因子	每张保单固定费用	按保费比例费用（%）	按保额比例费用（%）	每次理赔固定费用	每次退保固定费用	每次分红固定费用
7	81	157	2.66	60	3		60	60	60
8	98	181	3.14	60	3		60	60	60
9	115	206	3.62	60	3		60	60	60
10	133	232	4.12	60	3		60	60	60
11	151	258	4.64	60	3		60	60	60
12	170	284	5.16	60	3		60	60	60
13	190	312	5.68	60	3		60	60	60
14	211	339	6.24	60	3		60	60	60
15	233	368	6.78	60	3		60	60	60
16	255	397	7.36	60	3		60	60	60
17	278	427	7.94	60	3		60	60	60
18	302	457	8.54	60	3		60	60	60
19	328	489	9.14	60	3		60	60	60
20	354	521	9.78	60	3		60	60	60
21	366	531	10.42	60			60	60	60
22	379	542	10.62	60			60	60	60
23	392	552	10.84	60			60	60	60
24	405	563	11.04	60			60	60	60
25	418	573	11.26	60			60	60	60
26	432	584	11.46	60			60	0	60
27	445	594	11.68	60			60	60	60
28	459	604	11.88	60			60	60	60
29	472	614	12.08	60			60	60	60
30	485	623	12.28	60			60	60	60

说明：

(8)、(9)、(10)为通过其他方式计算出来

(11)~(16)为费用假设

表 14-3（续）

保单年度	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	期初基金余额	保费收入	期初费用	期末费用	死亡给付	退保给付	保单红利	利息收入	期末基金余额
1	0	290 000	357 500	13 799	9 834	4 496	0	-4 050	-9 9679
2	-99 679	246 265	71 756	11 209	8 918	10 180	3 563	4 490	45 450
3	45 450	221 412	31 303	9 894	8 596	13 423	6 406	14 134	211 373
4	211 373	203 476	28 767	9 009	8 507	17 661	8 970	23 165	365 100
5	365 100	189 010	26 722	8 290	8 530	19 528	11 326	31 643	511 357

续表

保单年度	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	期初基金余额	保费收入	期初费用	期末费用	死亡给付	退保给付	保单红利	利息收入	期末基金余额
6	511 357	177 444	12 666	7 709	8 643	20 164	13 321	40 568	666 866
7	666 866	168 340	12 016	7 244	8 821	18 780	15 418	49 391	822 318
8	822 318	161 368	11 518	6 878	9 065	16 333	17 445	58 330	980 777
9	980 777	156 279	11 155	6 596	9 379	12 374	19 475	67 554	1 145 631
10	1 145 631	152 895	10 914	6 453	9 792	13 999	21 682	77 257	1 312 942
11	1 312 942	149 567	10 676	6 313	10 250	15 545	23 884	87 110	1 482 950
12	1 482 950	146 292	10 442	6 175	10 782	17 116	25 976	97 128	1 655 880
13	1 655 880	143 069	10 212	6 039	11 398	18 705	27 959	107 324	1 831 960
14	1 831 960	139 893	9 985	5 905	12 086	20 307	30 028	117 712	2 011 253
15	2 011 253	136 761	9 762	5 772	12 814	21 918	31 889	128 295	2 194 154
16	2 194 154	133 672	9 541	5 642	13 554	23 441	33 828	139 097	2 380 917
17	2 380 917	130 625	9 324	5 513	14 272	24 967	35 654	150 133	2 571 945
18	2 571 945	127 618	9 109	5 387	14 977	26 492	37 457	161 427	2 767 568
19	2 767 568	124 653	8 898	5 261	15 698	28 097	39 148	172 999	2 968 119
20	2 968 119	121 726	8 689	5 138	16 519	29 604	40 894	184 869	3 173 870
21	3 173 870		4 917	5 016	17 561	29 871	42 521	190 137	3 264 121
22	3 264 121		4 799	4 895	18 920	30 174	42 275	195 559	3 358 617
23	3 358 617		4 681	4 775	20 651	30 428	42 071	201 236	3 457 248
24	3 457 248		4 564	4 656	22 743	30 629	41 746	207 161	3 560 070
25	3 560 070		4 447	4 536	25 117	30 776	41 452	213 337	3 667 080
26	3 667 080		4 329	4 416	27 673	30 938	41 036	219 765	3 778 452
27	3 778 452		4 211	4 296	30 320	30 970	40 644	226 454	3 894 467
28	3 894 467		4 092	4 174	32 995	31 011	40 132	233 422	4 015 485
29	4 015 485		3 973	4 053	35 696	30 924	39 573	240 691	4 141 957
30	4 141 957		3 852	3 930	38 452	30 778	38 965	248 286	4 274 266

说明：

首年(17) =0，之后$(17)_t = (25)_{t-1}$

(18) = (1) ×29，其中 29 为每 1 000 元保额对应的年缴保费

(19) = (1) × (11)/50 + (18) × (12) + (1) ×1 000 × (13)，其中 50 为件均保额

$(20) = [(4) \times (14) \times (1+6\%)^{0.5} + (5) \times (15) + (6) \times (16)]/50$

$(21) = (4) \times 1\,000 \times (1+6\%)^{0.5}$

(22) = (5) × (8)

(23) = (6) × (10)

(24) = [(17) + (18) − (19)] ×6%

(25) = (17) + (18) − (19) − (20) − (21) − (22) − (23) + (24)

表 14－3（续）

保单年度	26 准备金合计	27 累积盈余合计	28 本期损益合计	29 利润合计	30 期末单位保额有效保单的资产份额	31 期末单位保额有效保单的累积盈余	32 期末单位保额有效保单的本期损益	33 期末单位保额有效保单的利润
1	178 329	－278 008	－278 008	－278 008	－11.74	－32.74	－32.74	－32.74
2	320 666	－275 216	2 793	19 473	5.95	－36.05	0.37	2.55
3	449 051	－237 678	37 537	54 050	30.13	－33.87	5.35	7.70
4	567 030	－201 930	35 748	50 009	56.02	－30.98	5.48	7.67
5	666 943	－155 586	46 344	58 460	83.57	－25.43	7.57	9.55
6	772 043	－105 177	50 409	59 744	114.88	－18.12	8.68	10.29
7	873 613	－51 295	53 882	60 192	147.78	－9.22	9.68	10.82
8	975 399	5 378	56 673	59 751	182.00	1.00	10.52	11.09
9	1 086 081	59 551	54 173	53 850	217.30	11.30	10.28	10.21
10	1 196 533	116 409	56 859	53 286	254.57	22.57	11.02	10.33
11	1 301 498	181 452	65 043	58 059	293.97	35.97	12.89	11.51
12	1 401 088	254 791	73 339	62 452	335.65	51.65	14.87	12.66
13	1 505 054	326 906	72 115	56 827	379.77	67.77	14.95	11.78
14	1 598 693	412 560	85 654	66 040	426.48	87.48	18.16	14.00
15	1 696 257	497 897	85 337	60 583	476.02	108.02	18.51	13.14
16	1 788 209	592 708	94 811	64 937	528.59	131.59	21.05	14.42
17	1 879 071	692 874	100 166	64 603	584.45	157.45	22.76	14.68
18	1 964 353	803 215	110 341	68 769	643.87	186.87	25.67	16.00
19	2 052 556	915 563	112 347	64 154	707.12	218.12	26.77	15.28
20	2 134 945	1 038 925	123 363	68 429	774.53	253.53	30.10	16.70
21	2 123 529	1 140 593	101 668	39 332	816.21	285.21	25.42	9.84
22	2 114 407	1 244 210	103 617	35 181	860.94	318.94	26.56	9.02
23	2 099 500	1 357 748	113 538	38 886	908.98	356.98	29.85	10.22
24	2 086 323	1 473 748	116 000	34 535	960.69	397.69	31.30	9.32
25	2 067 213	1 599 867	126 119	37 695	1 016.46	443.46	34.96	10.45
26	2 049 377	1 729 075	129 208	33 216	1 076.73	492.73	36.82	9.47
27	2 025 636	1 868 830	139 755	36 010	1 142.02	548.02	40.98	10.56
28	1 999 574	2 015 911	147 081	34 951	1 212.93	608.93	44.43	10.56
29	1 971 164	2 170 794	154 883	33 928	1 290.18	676.18	48.24	10.57
30	1 937 253	2 337 013	166 219	35 972	1 374.56	751.56	53.45	11.57

说明：

(26) = (7) × (9)

(27) = (25) − (26)

首年(28) = (27)，之后$(28)_t = (27)_t - (27)_{t-1}$

首年(29) = (28)，之后$(29)_t = (28)_t - (27)_{t-1} \times 6\%$

(30) = (25)/(7)

(31) = (27)/(7)

(32) = (28)/(7)

(33) = (29)/(7)

当预测出未来的现金流之后，我们则可以计算出相关的利润指标。假设风险贴现利率为 12%，则有表 14－4：

表 14－4　　利润衡量值 I

利润边际	投资回报率	盈亏平衡年	20 年末资产份额/准备金
7.70%	18.09%	8	149%

表 14－4 中各项计算如下：

1. 利润边际。各年度保费收入（表 14－3 中第 18 列）贴现至签单时的现值 $= \sum_{t=1}^{30} \frac{(18)_t}{(1+12\%)^{t-1}} = 1\ 610\ 196$

各年度利润（表 14－3 中第 29 列）贴现至签单时的现值 $= \sum_{t=1}^{30} \frac{(29)_t}{(1+12\%)^t} = 124\ 019$

利润边际 $= \frac{124\ 019}{1\ 610\ 196} = 7.70\%$

2. 投资回报率。使得表 14－3 中第 29 列的各年度利润在签单时的贴现值之和为零的收益率是 18.09%。

3. 盈亏平衡年。从表 14－3 中第 27 列可知，累积盈余在第 8 年开始变为大于 0 且之后不再变为负值，因而盈亏平衡年是 8 年。

4. 资产份额与准备金的比例关系。对比表 14－3 的第 25 列和第 26 列，可计算出第 20 年末的资产份额占准备金的比例为 149%。

14.2.2　基于期末每张单位保额有效保单进行计算

针对本例，我们再基于期末每张单位保额有效保单进行计算，计算结果见表 14－5。

表 14－5　　现金流预测结果 II

保单年度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	死亡率	退保率（%）	现金价值因子	准备金因子	预计红利因子	每张保单费用	保费比例费用	保额比例费用	每次理赔费用	每次退保费用	每次分红费用
1	0.00096	15	3	21	0.00	200	75%	1%	60	60	60
2	0.00102	10	12	42	0.42	60	25%		60	60	60
3	0.00109	8	22	64	0.84	60	10%		60	60	60
4	0.00118	7	36	87	1.28	60	10%		60	60	60
5	0.00127	6	50	109	1.74	60	10%		60	60	60
6	0.00137	5	66	133	2.18	60	3%		60	60	60
7	0.00148	4	81	157	2.66	60	3%		60	60	60

续表

保单年度	1 死亡率	2 退保率（%）	3 现金价值因子	4 准备金因子	5 预计红利因子	6 每张保单费用	7 保费比例费用	8 保额比例费用	9 每次理赔费用	10 每次退保费用	11 每次分红费用
8	0.00158	3	98	181	3.14	60	3%		60	60	60
9	0.00169	2	115	206	3.62	60	3%		60	60	60
10	0.00180	2	133	232	4.12	60	3%		60	60	60
11	0.00193	2	151	258	4.64	60	3%		60	60	60
12	0.00208	2	170	284	5.16	60	3%		60	60	60
13	0.00224	2	190	312	5.68	60	3%		60	60	60
14	0.00243	2	211	339	6.24	60	3%		60	60	60
15	0.00264	2	233	368	6.78	60	3%		60	60	60
16	0.00286	2	255	397	7.36	60	3%		60	60	60
17	0.00308	2	278	427	7.94	60	3%		60	60	60
18	0.00331	2	302	457	8.54	60	3%		60	60	60
19	0.00355	2	328	489	9.14	60	3%		60	60	60
20	0.00382	2	354	521	9.78	60	3%		60	60	60
21	0.00416	2	366	531	10.42	60			60	60	60
22	0.00460	2	379	542	10.62	60			60	60	60
23	0.00514	2	392	552	10.84	60			60	60	60
24	0.00581	2	405	563	11.04	60			60	60	60
25	0.00658	2	418	573	11.26	60			60	60	60
26	0.00745	2	432	584	11.46	60			60	60	60
27	0.00839	2	445	594	11.68	60			60	60	60
28	0.00940	2	459	604	11.88	60			60	60	60
29	0.01047	2	472	614	12.08	60			60	60	60
30	0.01163	2	485	623	12.28	60			60	60	60

说明：本表为以下计算所需的基础数据，和表 14－3 完全相同。

表 14－5（续）

保单年度	12 一年期生存因子	13 单位保额有效保单年缴保费	14 单位保额有效保单期初费用	15 单位保额有效保单期末费用	16 单位保额有效保单保险给付	17 单位保额有效保单资产份额
1	0.84919	29.00	35.75	1.38	1.43	－11.74
2	0.89908	29.00	8.45	1.32	2.67	5.95
3	0.91899	29.00	4.10	1.30	3.72	30.13
4	0.92890	29.00	4.10	1.28	5.01	56.02
5	0.93881	29.00	4.10	1.27	6.04	83.57
6	0.94870	29.00	2.07	1.26	6.89	114.88

续表

保单年度	12	13	14	15	16	17
	一年期生存因子	单位保额有效保单年缴保费	单位保额有效保单期初费用	单位保额有效保单期末费用	单位保额有效保单保险给付	单位保额有效保单资产份额
7	0.95858	29.00	2.07	1.25	7.41	147.78
8	0.96847	29.00	2.07	1.24	7.70	182.00
9	0.97834	29.00	2.07	1.22	7.65	217.30
10	0.97823	29.00	2.07	1.22	8.63	254.57
11	0.97811	29.00	2.07	1.22	9.63	293.97
12	0.97797	29.00	2.07	1.22	10.68	335.65
13	0.97780	29.00	2.07	1.22	11.77	379.77
14	0.97762	29.00	2.07	1.22	12.94	426.48
15	0.97741	29.00	2.07	1.22	14.13	476.02
16	0.97720	29.00	2.07	1.22	15.36	528.59
17	0.97698	29.00	2.07	1.22	16.63	584.45
18	0.97676	29.00	2.07	1.22	17.94	643.87
19	0.97652	29.00	2.07	1.22	19.30	707.12
20	0.97625	29.00	2.07	1.22	20.73	774.53
21	0.97592		1.20	1.22	21.95	816.21
22	0.97550		1.20	1.22	22.85	860.94
23	0.97496		1.20	1.22	23.88	908.98
24	0.97431		1.20	1.22	25.01	960.69
25	0.97355		1.20	1.22	26.27	1 016.46
26	0.97270		1.20	1.22	27.62	1 076.73
27	0.97178		1.20	1.22	29.05	1 142.02
28	0.97079		1.20	1.22	30.54	1 212.93
29	0.96974		1.20	1.22	32.08	1 290.18
30	0.96860		1.20	1.22	33.70	1 374.56

说明：

$(12)=[1-(1)]\times[1-(2)]$

$(14)=(6)/50+(7)\times(13)+(8)\times 1\,000$，其中 50 为件均保额

$(15)=\{(9)\times(1)\times(1+6\%)^{0.5}+(10)\times[1-(1)]\times(2)+(11)\times[1-(1)]\}/50$

$(16)=(1)\times 1\,000\times(1+6\%)^{0.5}+[1-(1)]\times(2)\times(3)+[1-(1)]\times(5)$

$(17)=\{[(17)_{t-1}+(13)-(14)]\times(1+6\%)-(15)-(16)\}/(12)$，其中 $(17)_0=0$

表 14－5（续）

保单年度	18	19	20	21
	单位保额有效保单累积盈余	单位保额有效保单本期损益	单位保额有效保单利润	贴现因子，$_tD_x$
1	－32.74	－32.74	－32.74	0.7582
2	－36.05	0.37	2.55	0.6086
3	－33.87	5.35	7.70	0.4994
4	－30.98	5.48	7.67	0.4142
5	－25.43	7.57	9.55	0.3472
6	－18.12	8.68	10.29	0.2941
7	－9.22	9.68	10.82	0.2517
8	1.00	10.52	11.09	0.2177
9	11.30	10.28	10.21	0.1901
10	22.57	11.02	10.33	0.1661
11	35.97	12.89	11.51	0.1450
12	51.65	14.87	12.66	0.1266
13	67.77	14.95	11.78	0.1106
14	87.48	18.16	14.00	0.0965
15	108.02	18.51	13.14	0.0842
16	131.59	21.05	14.42	0.0735
17	157.45	22.76	14.68	0.0641
18	186.87	25.67	16.00	0.0559
19	218.12	26.77	15.28	0.0487
20	253.53	30.10	16.70	0.0425
21	285.21	25.42	9.84	0.0370
22	318.94	26.56	9.02	0.0322
23	356.98	29.85	10.22	0.0281
24	397.69	31.30	9.32	0.0244
25	443.46	34.96	10.45	0.0212
26	492.73	36.82	9.47	0.0184
27	548.02	40.98	10.56	0.0160
28	608.93	44.43	10.56	0.0139
29	676.18	48.24	10.57	0.0120
30	751.56	53.45	11.57	0.0104

说明：

$(18)=(17)-(4)$

首年$(19)=(18)$，之后年度$(19)_t=(18)_t-(18)_{t-1}/(12)$

首年$(20)=(19)$，之后年度$(20)_t=(19)_t-(18)_{t-1}\times 6\%/(12)$

此外，也可以表述为$(20)_t=(18)_t-(18)_{t-1}\times(1+6\%)/(12)$

或者$(20)_t=\{[(4)_{t-1}+(13)_t-(14)_t]\times(1+6\%)-(15)_t-(16)_t\}/(12)-(4)_t$

$(21)_t=(21)_{t-1}\times(12)/(1+12\%)$，其中$(21)_0=1$，12%为风险贴现利率

有了上表的计算结果后，可以计算相关的利润指标如表 14－6：

表 14－6　　利润衡量值Ⅱ

利润边际	投资回报率	盈亏平衡年	20 年末资产份额/准备金
7.70%	18.09%	8	149%

1. 利润边际。对于新签发的一张单位保额保单，

$$未来利润现值 = \sum_{t=1}^{30} (21)_t \cdot (20)_t = 12.40$$

$$未来保费收入现值 = \sum_{t=1}^{30} (21)_{t-1} \cdot (13)_t = 161.02$$

$$利润边际 = \frac{12.40}{161.02} = 7.70\%$$

2. 投资回报率。由于表 14－5 中第（20）列的数值对应于每单位保额有效保单，不同年度末的数值须先经过生存概率调整后，才能用于计算投资回报率。经生存概率调整后，计算出的投资回报率同样为 18.09%。

3. 盈亏平衡年。从表 14－5 中第 18 列可知，盈亏平衡年是 8 年。

4. 资产份额与准备金的比例关系。对比表 14－5 的第 4 列和第 17 列，可计算出第 20 年末的资产份额占准备金的比例为 149%。

对于表 14－3 和表 14－5 的计算结果，各项利润指标以及各年度末的单位保额有效保单的资产份额、累积盈余、本期损益、利润数值均完全相同。两种计算方式只是计算基数不同。前一种计算方式更类似于一家寿险公司的日常利润核算过程，理解起来更加直观和容易，从而也成为实务中最常使用的方法。

§14.3　各种因素对现金流的影响

从前面的内容可知，资产份额定价法涉及的最主要内容就是预测保单未来的现金流。这些预测结果建立在一系列的参数和假设基础之上，这些参数和假设是在考虑公司和行业已往经验和发展趋势基础上，在正常经营环境和条件下的最优估计。未来时间内公司经营的外部环境和运营状况可能会有较大的偏差。因此，为充分了解不同经营环境和运营状况对产品的盈利能力可能带来的影响，从而对潜在的风险采取相应的应对措施，有必要观察一下当利率、死亡率、失效率、费用率、分红水平等假设发生变化时，产品未来现金流以及相关利润指标的变化。通过比较不同情形下的计算结果，甄别出哪些假设对计算结果的影响最大。那些影响最大的假设就是产品定价过程中最主要的风险，也是未来实际经营过程中重点追踪和管控的对象。对关键参数和假设的敏感性分析和情景测试，将配合基准预测

结果，一起作为产品定价决策的重要参考。如果仅变动一项假设，而使其他假设维持不变，分析这个单一假设的变动对计算结果的影响，那么这种方式称为敏感性分析。以下以利率、死亡率、失效率、费用率、件均保额为例，考察这些假设的变化产生的影响。

14.3.1 利率

在前面的例子中，假设投资收益率为6%。如把投资收益率在基准情形6%的基础上，分别上下各浮动0.5%和1.0%，其他各项假设包括预计的红利因子、风险贴现利率等均保持不变，则可以得到一组新的结果如表14－7所示：

表14－7　　利润衡量值Ⅲ（不同投资收益率假设）

情　形	利润边际（%）	投资回报率（%）	盈亏平衡年	资产份额/准备金（%）
基准情形：投资收益率6%	7.70	18.09	8	149
情形1：投资收益率5.0%	2.93	14.67	9	131
情形2：投资收益率5.5%	5.32	16.48	9	139
情形3：投资收益率6.5%	10.09	19.56	8	159
情形4：投资收益率7.0%	12.47	20.93	8	169

可见，投资收益率的变化对累积盈余、本期损益、利润、资产份额的影响很大。对于大多数储蓄成份较强的险种来说，投资收益率都是最敏感的假设之一。绝大多数情形下，当投资收益率上升时，各项利润指标均会变得更好。

14.3.2 死亡率

在前面的例子中，基准情形下的死亡率假设为《中国人寿保险业经验生命表（2000－2003）》中的非养老金业务男表的80%。如果把死亡率在此基础上，分别上下各浮动10%和20%，其他各项假设保持不变，则可以得到一组新的结果如表14－8所示：

表14－8　　利润衡量值Ⅳ（不同死亡率假设）

情　形	利润边际（%）	投资回报率（%）	盈亏平衡年	资产份额/准备金（%）
基准情形	7.70	18.09	8	149
情形5：基准情形×80%	8.59	18.79	8	151
情形6：基准情形×90%	8.14	18.44	8	150
情形7：基准情形×110%	7.26	17.74	9	147
情形8：基准情形×120%	6.82	17.40	9	146

对于一款终身寿险产品来说，死亡率也是一个重要的假设，但死亡率假设的变化对于利润指标的影响要比投资收益率小得多。对于以死亡给付为主的产品，死亡率的上升通常伴随着利润指标的恶化。但对于以长寿风险为主的产品，死亡率的上升通常伴随着利润指标的改善。对于两全保险来说，则要看两种风险的对比，通常死亡率的变化对利润指标的影响较小。

14.3.3　失效率

如果把失效率在基准情形的基础上，分别上下各浮动 10% 和 20%，其他各项假设保持不变，则可以得到一组新的结果如表 14－9 所示：

表 14－9　　利润衡量值Ⅴ（不同失效率假设）

情　形	利润边际（%）	投资回报率（%）	盈亏平衡年	资产份额/准备金（%）
基准情形	7.70	18.09	8	149
情形 9：基准情形 ×80%	7.90	18.27	9	145
情形 10：基准情形 ×90%	7.82	18.19	8	147
情形 11：基准情形 ×110%	7.56	17.97	8	151
情形 12：基准情形 ×120%	7.40	17.84	8	153

对于大多数产品来说，失效率的上升，使得寿险公司一方面难以摊回首年的获得费用，另一方面管理的资产减少，减少了赚取利差的机会，从而会导致产品盈利能力降低。但对于一些储蓄成份较强、且现金价值较低的产品，有可能出现失效率上升后利润改善的情况，这是因为退保的保单产生的一次性的退保收益（释放的准备金大于现金价值的部分）超过了保单持续留存在公司内部未来将产生的利润的现值。

对于“资产份额/准备金”这一指标来说，由于退保的保单产生的退保收益被剩余的保单持有人分享，从而使这个指标反而随着失效率上升而改善。

14.3.4　费用率

如果把费用假设在基准情形的基础上，分别上下各浮动 10% 和 20%，其他各项假设保持不变，则可以得到一组新的结果如表 14－10 所示：

表 14－10　　利润衡量值Ⅵ（不同费用率假设）

情　形	利润边际（%）	投资回报率（%）	盈亏平衡年	资产份额/准备金（%）
基准情形	7.70	18.09	8	149
情形 13：基准情形 ×80%	14.80	28.34	6	169
情形 14：基准情形 ×90%	11.25	22.35	7	159
情形 15：基准情形 ×110%	4.15	14.89	10	139
情形 16：基准情形 ×120%	0.60	12.37	12	129

由于在利润衡量过程中，费用是一个减项，费用率的提高带来的一定是利润指标的恶化。在定价过程中使用的费用假设，通常是假设公司在持续经营的稳定状态下的单位费用率。寿险公司总是努力通过更大的业务量、更有效率的流程、更合理的费用管控来降低单位费用率，从而提高产品的盈利能力。

14.3.5 件均保额

如果把件均保额假设在基准情形的基础上，分别上下各浮动 10% 和 20%，其他各项假设保持不变，则可以得到一组新的结果如表 14－11 所示：

表 14－11　　利润衡量值Ⅶ（不同件均保额假设）

情　形	利润边际（%）	投资回报率（%）	盈亏平衡年	资产份额/准备金（%）
基准情形：件均保额 50	7.70	18.09	8	149
情形 17：件均保额 40	5.24	15.95	10	141
情形 18：件均保额 45	6.61	17.11	9	145
情形 19：件均保额 55	8.60	18.92	8	152
情形 20：件均保额 60	9.35	19.64	8	154

件均保额会影响每张保单的固定费用在单位保额有效保单上的分摊。件均越大，分摊到每单位保额有效保单上的固定费用越小，从而使得各项利润指标得到改善。

14.3.6 多项假设同时变化

在实际经营过程中，一些外界因素的变化通常会导致多项指标同时变化。比如市场利率的上升，一方面带来了更高的投资收益率，使得新产品有机会以更低的费率推向市场，另一方面有可能带来失效率的上升。此外退保者中如果健康的人较多，那么剩余保单的死亡率将上升。通常把多种互相关联的假设同时发生变化的情况称为情景测试。

假如利率从 6% 提高到 7%，失效率提高 10%，死亡率提高 5%，费用提高 3%，其他各项假设包括预计的红利因子、风险贴现利率均保持不变，则前面的表 14－3 中，累积盈余、本期损益、利润、资产份额将变为表 14－12 所示：

表 14－12　　现金流预测结果Ⅷ（多项假设变化）

保单年度	26	27	28	29	30	31	32	33
	准备金合计	累积盈余合计	本期损益合计	利润合计	期末单位保额有效保单的资产份额	期末单位保额有效保单的累积盈余	期末单位保额有效保单的本期损益	期末单位保额有效保单的利润
1	175 174	－288 592	－288 592	－288 592	－13.60	－34.60	－34.60	－34.60
2	311 476	－286 860	1 732	21 934	3.32	－38.68	0.23	2.96

续表

保单年度	26	27	28	29	30	31	32	33
	准备金合计	累积盈余合计	本期损益合计	利润合计	期末单位保额有效保单的资产份额	期末单位保额有效保单的累积盈余	期末单位保额有效保单的本期损益	期末单位保额有效保单的利润
3	432 366	-248 760	38 100	58 180	27.18	-36.82	5.64	8.61
4	541 820	-211 232	37 528	54 941	53.08	-33.92	6.03	8.82
5	633 182	-162 496	48 736	63 522	81.03	-27.97	8.39	10.94
6	729 054	-108 351	54 145	65 520	113.23	-19.77	9.88	11.95
7	821 471	-49 655	58 696	66 280	147.51	-9.49	11.22	12.67
8	914 272	13 024	62 679	66 155	183.58	2.58	12.41	13.10
9	1 015 854	74 904	61 880	60 968	221.19	15.19	12.55	12.36
10	1 116 779	141 528	66 624	61 381	261.40	29.40	13.84	12.75
11	1 212 151	218 203	76 675	66 768	304.44	46.44	16.32	14.21
12	1 302 107	305 189	86 986	71 712	350.56	66.56	18.97	15.64
13	1 395 716	393 832	88 643	67 280	400.04	88.04	19.82	15.04
14	1 479 347	498 045	104 213	76 645	453.13	114.13	23.88	17.56
15	1 566 217	605 214	107 169	72 306	510.20	142.20	25.18	16.99
16	1 647 514	724 658	119 444	77 079	571.62	174.62	28.78	18.57
17	1 727 426	852 845	128 187	77 461	637.81	210.81	31.69	19.15
18	1 801 842	994 502	141 657	81 958	709.23	252.23	35.93	20.79
19	1 878 571	1 142 448	147 945	78 330	786.38	297.38	38.51	20.39
20	1 949 615	1 305 297	162 849	82 877	869.82	348.82	43.52	22.15
21	1 934 827	1 452 513	147 216	55 846	929.63	398.63	40.40	15.33
22	1 922 141	1 605 960	153 447	51 771	994.84	452.84	43.27	14.60
23	1 904 202	1 773 238	167 278	54 860	1 066.04	514.04	48.49	15.90
24	1 887 837	1 947 941	174 704	50 577	1 143.92	580.92	52.10	15.08
25	1 866 110	2 137 408	189 467	53 111	1 229.30	656.30	58.18	16.31
26	1 845 540	2 335 709	198 301	48 682	1 323.11	739.11	62.75	15.40
27	1 819 668	2 550 041	214 333	50 833	1 426.42	832.42	69.97	16.59
28	1 791 739	2 777 997	227 955	49 452	1 540.47	936.47	76.84	16.67
29	1 761 745	3 020 553	242 557	48 097	1 666.72	1 052.72	84.54	16.76
30	1 726 887	3 281 452	260 898	49 460	1 806.83	1 183.83	94.12	17.84

利润指标则变为表 14－13：

表 14 - 13　　　　利润衡量值Ⅷ（多项假设变化）

利润边际	投资回报率	盈亏平衡年	资产份额/准备金
10.87%	19.48%	8	167%

§14.4　保费的调整

前面讨论的是给定费率后通过资产份额法预测现金流，从而得到各种利润指标。当利润指标与公司设定的目标有一定的距离时，则需重新调整保费。尽管可以通过不断尝试各种保费水平，最终找到一个合乎利润要求的保费，但这样会使得计算过程重复化和复杂化。清楚地了解保费变化对利润的影响，可使得保费调整更有目的性，更加简便。

14.4.1　保费变动的影响

一般情况下，可以认为新单保费中的保单发单费用是固定的，对保费的调整只针对不包括保单发单费用的部分 GP_t。首先计算当 GP_t 增加 1 倍后，保费现值的变化额，记为 A。

如果以大量相同保单为基础计算，那么

$$A = \sum_{s=1}^{n} GP_s \cdot BIF_s \cdot v^{s-1} \tag{14-45}$$

如果以一张单位保额有效保单为基础计算，那么

$$A = \sum_{s=1}^{n} GP_s \cdot {}_{s-1}D_x \tag{14-46}$$

当每年度的保费变化后，各年度利润也随之变化。对(14 - 7)、(14 - 8)和(14 - 22)，以及(14 - 29)、(14 - 30)和(14 - 37)进行分析，可以看出，GP_t 增加 1 倍后，会影响到各年度的总保费 PI_t 和期初费用 EB_t，进而影响到利润。根据前面的公式，可计算由于 GP_t 增加 1 倍引起的利润现值的变化额，记为 B。

如果以大量相同保单为基础计算，那么

$$B = \sum_{s=1}^{n} GP_s \cdot (1 - EPI_s) \cdot BIF_s \cdot (1 + i_s) \cdot v^s \tag{14-47}$$

如果以一张单位保额有效保单为基础计算，那么

$$B = \sum_{s=1}^{n} \frac{GP_s \cdot (1 - EPI_s) \cdot (1 + i_s)}{p_s} \cdot {}_sD_x \tag{14-48}$$

14.4.2　为达到利润目标的保费变化比例

当保费 GP_t 每变动 1 倍时，保费现值和利润现值的变化额如上给出。由此可以构造公式，使得保费变化一定比例后即能达到利润目标。当计算

出所需的保费变化比例后，即可得到调整后的总保费。如果使用调整后的总保费再重新进行现金流预测并计算利润指标，那么利润指标应和利润目标一致。下面分别以利润边际和投资回报率为例来进行说明。

1. 利润边际。假设利润目标为利润现值与保费现值之比为10%。为此，可构造如下公式：

$$\frac{\text{当前利润现值}+B\cdot\text{保费变化比例}}{\text{当前保费现值}+A\cdot\text{保费变化比例}}=10\% \tag{14-49}$$

为达到利润目标，保费的变化比例为：

$$\text{保费变化比例}=\frac{10\%\times\text{当前保费现值}-\text{当前利润现值}}{B-10\%\times A} \tag{14-50}$$

2. 投资回报率。假设要求的投资回报率为15%。为求得保费变化比例，首先计算投资风险贴现利率为15%时的利润现值，以及保费变化1倍后的利润现值变化额B，然后构造公式：

$$\text{当前利润现值}+B\cdot\text{保费变化比例}=0 \tag{14-51}$$

那么，

$$\text{保费变化比例}=-\frac{\text{当前利润现值}}{B} \tag{14-52}$$

习　题

1. 推导公式(14-41)、(14-42)、(14-43)、(14-44)。

2. 推导公式(14-47)和(14-48)，并证明当$i_t=j_t$时，公式(14-47)变为

$$B=\sum_{s=1}^{n}GP_s\cdot(1-EPI_s)\cdot BIF_s\cdot v^{s-1}$$

公式(14-48)变为

$$B=\sum_{s=1}^{n}GP_s\cdot(1-EPI_s)\cdot{}_{s-1}D_x$$

3. 某终身寿险的信息如下：

$$GP_t=24,\text{发单费用}=0,PVPROF'_x=25$$

$$PVPI'_x=260,EPI_t=10\%,i_t=j_t=5\%$$

求新的保费，使得投资回报率（ROI）等于5%。

4. 简述单位保额有效保单的含义及其和新签发时保单数量的关系。

5. 简述常用的利润衡量指标。

6. 讨论如何在定价中考虑通货膨胀率。

7. 讨论如何在本章的实例中增加定期的生存给付，并体现在定价中。

8. 讨论如果红利不采用实例中类似保险给付的处理方式，而是根据当期损益来确定时，定价模型须如何修改。

第十五章　资产份额法的进一步应用

学习目标

- □ 熟悉计算利润现值的等价公式，以及准备金对利润现值的影响
- □ 熟悉死亡、失效或保单持续有效期满情况下利润现值的概率分布，掌握利润现值的相关计算
- □ 了解在实际应用资产份额法时，针对对利润产生影响的因素，对资产份额法加以改进的必要性

§15.1 等价公式

从保险经营的过程来看，客户缴纳的保费，在扣除了保险给付、费用之后，剩余部分就成为了公司的利润。从上一章的（14－22）式可以观察到，利润可用保费、费用、保险给付、利息和准备金提转差的形式来表述，即：

$$PROF_t = (PI_t - EB_t)\cdot(1+i_t) - BEN_t - EE_t - (V_t - V_{t-1}) + V_{t-1}\cdot i_t \tag{15-1}$$

而未来利润的现值为：

$$PVPROF_x = \sum_{t=1}^{n} PROF_t \cdot v^t \tag{15-2}$$

当每年的投资收益率和贴现利率相同，即 $i_t = j_t$ 时，（15－2）可变为：

$$PVPROF_x = \sum_{t=1}^{n}\left[(PI_t - EB_t)\cdot(1+i_t) - BEN_t - EE_t\right]\cdot v^t - \sum_{t=1}^{n}\left[V_t - V_{t-1}(1+i_t)\right]\cdot v^t \tag{15-3}$$

当 $i_t = j_t$ 时，且 $V_0 = 0$，（15－3）后面一项则变为：

$$-\sum_{t=1}^{n}\left[V_t - V_{t-1}(1+i_t)\right]\cdot v^t = -\sum_{t=1}^{n}\left(V_t\cdot v^t - V_{t-1}\cdot v^{t-1}\right) = -V_n\cdot v^n \tag{15-4}$$

把（15－4）代入（15－3），可得到：

$$PVPROF_x = \sum_{t=1}^{n}\left[(PI_t - EB_t)\cdot(1+i_t) - BEN_t - EE_t\right]\cdot v^t - V_n\cdot v^n \tag{15-5}$$

如把 V_n 视为两全保险的满期给付，则从上式中可清楚地观察到关于利润

的等价公式，即当 $i_t = j_t$ 时，利润现值等于保费现值减去保险给付和费用的现值。此时，利润现值与责任准备金无关，责任准备金从零开始最终回到零，它只影响利润的时间分布，而不影响利润的现值，即不论采用何种准备金计算方法，甚至于无准备金，产生的利润现值是相等的。然而，在一般情况下，贴现利率 j_t 大于投资收益率 i_t 时，准备金会对利润现值产生较大影响。

以第十四章表 14－3 中的数值为例，可对利润等价公式加以验证。

表 15－1　　　　利润等价公式演示基础数据

保单	1	2	3	4	5	6	7	8
年度	保费收入	期初费用	期末费用	死亡给付	退保给付	保单红利	准备金合计	利润合计
1	290 000	357 500	13 799	9 834	4 496	0	178 329	－278 008
2	246 265	71 756	11 209	8 918	10 180	3 563	320 666	19 473
3	221 412	31 303	9 894	8 596	13 423	6 406	449 051	54 050
4	203 476	28 767	9 009	8 507	17 661	8 970	567 030	50 009
5	189 010	26 722	8 290	8 530	19 528	11 326	666 943	58 460
6	177 444	12 666	7 709	8 643	20 164	13 321	772 043	59 744
7	168 340	12 016	7 244	8 821	18 780	15 418	873 613	60 192
8	161 368	11 518	6 878	9 065	16 333	17 445	975 399	59 751
9	156 279	11 155	6 596	9 379	12 374	19 475	1 086 081	53 850
10	152 895	10 914	6 453	9 792	13 999	21 682	1 196 533	53 286
11	149 567	10 676	6 313	10 250	15 545	23 884	1 301 498	58 059
12	146 292	10 442	6 175	10 782	17 116	25 976	1 401 088	62 452
13	143 069	10 212	6 039	11 398	18 705	27 959	1 505 054	56 827
14	139 893	9 985	5 905	12 086	20 307	30 028	1 598 693	66 040
15	136 761	9 762	5 772	12 814	21 918	31 889	1 696 257	60 583
16	133 672	9 541	5 642	13 554	23 441	33 828	1 788 209	64 937
17	130 625	9 324	5 513	14 272	24 967	35 654	1 879 071	64 603
18	127 618	9 109	5 387	14 977	26 492	37 457	1 964 353	68 769
19	124 653	8 898	5 261	15 698	28 097	39 148	2 052 556	64 154
20	121 726	8 689	5 138	16 519	29 604	40 894	2 134 945	68 429
21		4 917	5 016	17 561	29 871	42 521	2 123 529	39 332
22		4 799	4 895	18 920	30 174	42 275	2 114 407	35 181
23		4 681	4 775	20 651	30 428	42 071	2 099 500	38 886
24		4 564	4 656	22 743	30 629	41 746	2 086 323	34 535
25		4 447	4 536	25 117	30 776	41 452	2 067 213	37 695
26		4 329	4 416	27 673	30 938	41 036	2 049 377	33 216
27		4 211	4 296	30 320	30 970	40 644	2 025 636	36 010
28		4 092	4 174	32 995	31 011	40 132	1 999 574	34 951
29		3 973	4 053	35 696	30 924	39 573	1 971 164	33 928
30		3 852	3 930	38 452	30 778	38 965	1 937 253	35 972

当贴现利率和投资收益率相同，即也为6%时，可计算出上述各项目的

现值，从而可验证：通过等价公式（15－5）计算出的利润现值和通过上一章资产份额法的累积公式计算的利润现值是完全相同的，见表 15－2。

表 15－2　　利润等价公式演示结果

项　目	符号	计算结果
保费收入现值	A	2 183 329
期初费用现值	B	590 797
期末费用现值	C	100 850
死亡给付现值	D	178 627
退保给付现值	E	265 353
保单红利现值	F	303 509
第 30 年末准备金余额现值	G	337 295
利润现值（通过各年度贴现）	H	406 898
利润现值（通过等价公式）	I	406 898

说明：

$$A=\sum_{t=1}^{30}\frac{(1)_t}{(1+6\%)^{t-1}}\qquad B=\sum_{t=1}^{30}\frac{(2)_t}{(1+6\%)^{t-1}}$$

$$C=\sum_{t=1}^{30}\frac{(3)_t}{(1+6\%)^{t}}\qquad D=\sum_{t=1}^{30}\frac{(4)_t}{(1+6\%)^{t}}$$

$$E=\sum_{t=1}^{30}\frac{(5)_t}{(1+6\%)^{t}}\qquad F=\sum_{t=1}^{30}\frac{(6)_t}{(1+6\%)^{t}}$$

$$G=\frac{(7)_{30}}{(1+6\%)^{30}}\qquad H=\sum_{t=1}^{30}\frac{(8)_t}{(1+6\%)^{t}}$$

$$I=A-B-C-D-E-F-G$$

§15.2　更深入的利润分析

在第十四章中，利润的衡量是在一组确定的利率、死亡率、失效率、费用率假设下进行的，这种情形通常是最优估计假设。当其中某个假设发生变化时，利润现值等指标将发生变化。这里把利润现值记为 PVP。

另一方面，在利率、费用率确定下，即使对一组确定的死亡率、失效率，由于保单是否持续到保单期满、何时发生死亡或失效仍然是不确定的。上一章的利润分析是在期望意义上给出的，因此上一章的方法不能解决如下类似的问题：

（1）已知承保 100 份保单，设 PVP 超过某个值的概率大于 95%，那么这个值是多少？

（2）已知承保 100 份保单，PVP 超过零的概率是多少？

（3）为了使 PVP 为正，至少应承保多少份保单？

为了解决上述问题，在以下讨论中，首先对单位保额的有效保单，构造 PVP 的概率分布，并确定 PVP 的期望和方差。对大量保单汇总后，应用正态分布近似，最终求解问题。

在本节中，假定利率、费用率等因素都是确定的。给定一组确定的死亡率、失效率，对于一张保险期间为 n 年的保单，未来共有 $2n+1$ 种可能的情形：保单或者在前 n 年内由于死亡或失效终止，或者持续到 n 年末。在每种情形下，PVP 是死亡发生年度、或失效发生年度、或生存至保单期满（第 n 个保单年度）的函数。

在上一章的讨论中，假设失效发生在每期的期末。为了简化计算，假设死亡都发生在期中。

15.2.1　符号说明

${}_tp_x$ 为自承保生存至 t 年末的概率；

${}_{t-1|}q_x^d$ 为自承保生存至保单年度 t 年初，然后在该保单年度内死亡的概率；

${}_{t-1|}q_x^w$ 为自承保生存至保单年度 t 年初，然后在该保单年度内退保的概率；

D_t 为只考虑利率的贴现因子，它用于将利润由保单年度 t 年末贴现至承保日，第 t 个保单年内的贴现利率记为 j_t；

$profitp_t$ 为每张仍有效的保单在 t 年产生的利润；

$profitd_t$ 为每张在保单年度 t 年内因死亡而终止的保单，在第 t 年产生的利润；

$profitw_t$ 为每张在保单年度 t 年内因退保而终止的保单，在第 t 年产生的利润；

$pvprofitp_t$ 为每张仍然有效到第 t 保单年度末的保单，历年所产生的利润在承保日的现值；

$pvprofitd_t$ 为每张在保单年度 t 年内因死亡而终止的保单，历年所产生的利润在承保日的现值；

$pvprofitw_t$ 为每张在保单年度 t 年内因退保而终止的保单，历年所产生的利润在承保日的现值。

设 $t=0$ 时为承保日，根据上述定义，可得到：

$$ {}_0p_x = 1 \tag{15-6} $$

生存至第 t 年末的概率等于生存至第 $t-1$ 年末的概率乘以在第 t 年内既没死亡、也没退保的概率，即：

$$ {}_tp_x = {}_{t-1}p_x \cdot (1-q_t^d) \cdot (1-q_t^w) \tag{15-7} $$

生存至第 t 年初，而后在该年死亡的概率为：

$$_{t-1|}q_x^d = {}_{t-1}p_x \cdot q_t^d \quad (15-8)$$

生存至第 t 年初，而后在该年退保的概率为：

$$_{t-1|}q_x^w = {}_{t-1}p_x \cdot q_t^w \quad (15-9)$$

根据贴现因子的定义，有

$$D_0 = 1 \quad (15-10)$$

$$D_t = D_{t-1} \times \frac{1}{1+j_t} \quad (15-11)$$

15.2.2 利润计算

根据（14－37）可知，每单位保额的有效保单在第 t 保单年度的利润为：

$$PROF_t' = \frac{(V_{t-1}' + PI_t' - EB_t') \cdot (1+i_t) - BEN_t' - EE_t'}{p_t} - V_t' \quad (15-12)$$

上式描述的是每单位保额有效保单的平均利润。对保单分别考虑以下各种情形：存活至第 t 年末、在第 t 年内死亡、在第 t 年内退保，在第 t 年内产生的利润分别为：

1. 存活至第 t 年末，此时 $q_t^d = q_t^w = 0$，则有：

$$profitp_t = (V_{t-1}' + PI_t' - EB_t') \cdot (1+i_t) - DIV_t - \frac{EDIV_t}{AZ} - V_t' \quad (15-13)$$

2. 在第 t 年内死亡，此时 $q_t^d = 1$，$q_t^w = 0$，则有：

$$profitd_t = (V_{t-1}' + PI_t' - EB_t') \cdot (1+i_t) - \left(DB_t + \frac{ED_t}{AZ}\right) \cdot (1+i_t)^{0.5} \quad (15-14)$$

3. 在第 t 年内退保，此时 $q_t^d = 0$，$q_t^w = 1$，则有：

$$profitw_t = (V_{t-1}' + PI_t' - EB_t') \cdot (1+i_t) - CV_t - \frac{EW_t}{AZ} - DIV_t - \frac{EDIV_t}{AZ} \quad (15-15)$$

根据（14－38），利润现值的计算公式为

$$PVPROF_x' = \sum_{t=1}^{n} PROF_t' \cdot {}_tD_x \quad (15-16)$$

下面分各种情形讨论利润现值。

（1）$pvprofitp_n$。此时保单存活至保险期满即第 n 年度末。在（15－16）式中，对于所有的 t，取 $q_t^d = 0$，$q_t^w = 0$，此时 ${}_tD_x = D_t$，而且：

$$pvprofitp_n = \sum_{t=1}^{n} profitp_t \cdot D_t \quad (15-17)$$

（2）$pvprofitd_t$。在（15－16）中，要求：①对于所有的 $s<t$，$q_s^d = q_s^w = 0$。②$q_t^d = 1$，$q_t^w = 0$。

$$pvprofitd_t = profitd_t \cdot D_t + \sum_{s=1}^{t-1} profitp_s \cdot D_s \quad (15-18)$$

（3）$pvprofitw_t$。在（15－16）中，要求：①对于所有的 $s<t$，$q_s^d=0$，$q_s^w=0$。②$q_t^d=0$，$q_t^w=1$。

$$pvprofitw_t = profitw_t \cdot D_t + \sum_{s=1}^{t-1} profitp_s \cdot D_s \qquad (15-19)$$

总结一下，对于一张保险期间为 n 年的保单，共有 $2n+1$ 种可能的情形：保单或者在前 n 年内由于死亡或失效终止，或者持续到 n 年末。每种情形均有相应的概率，具体为：

① 在第 t 年死亡的概率为 ${}_{t-1|}q_x^d$，PVP 等于 $pvprofitd_t$；

② 在第 t 年失效的概率为 ${}_{t-1|}q_x^w$，PVP 等于 $pvprofitw_t$；

③ 持续到在第 n 年末的概率是 ${}_np_x$，PVP 等于 $pvprofitp_n$。

综合上面各种情形，可以计算 PVP 的期望：

$$E(PVP) = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^d \cdot pvprofitd_t + \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^w \cdot pvprofitw_t + {}_np_x \cdot pvprofitp_n \qquad (15-20)$$

$E(PVP)$ 就是（15－16）式中的 $PVPROF'_x$。

类似地，可以计算 $E[(PVP)^2]$ 如下：

$$E[(PVP)^2] = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^d \cdot (pvprofitd_t)^2 + \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^w \cdot (pvprofitw_t)^2 + {}_np_x \cdot (pvprofitp_n)^2 \qquad (15-21)$$

从而可计算 PVP 的方差：

$$Var(PVP) = E[(PVP)^2] - [E(PVP)]^2 \qquad (15-22)$$

（15－20）和（15－22）是关于每单位保额有效保单的期望和方差。对于 k 张相同的单位保额有效保单，用 PVP_k 表示 k 张单位保额有效保单的利润现值之和。在独立性假设下，当 k 较大时，根据中心极限定理，PVP_k 近似服从正态分布。另外

$$E(PVP_k) = k \cdot E(PVP) \qquad (15-23)$$

$$Var(PVP_k) = k \cdot Var(PVP) \qquad (15-24)$$

引入随机变量 Z：

$$Z = \frac{PVP_k - k \cdot E(PVP)}{\sqrt{k \cdot Var(PVP)}} \qquad (15-25)$$

则 Z 近似服从标准正态分布。由此，我们就可以回答本节开头提出的问题了。

§15.3　资产份额法的改进

在上一章中，主要是为了说明资产份额法的本质含义，计算公式设计得尽可能简单，本节主要讨论一些在前面公式中没有充分展开的因素。当这些

因素会对利润产生实质性影响时，就有必要对资产份额法进行必要的改进。

本节从 11 个方面展开讨论。

1. 资产份额和现金价值。回顾（14－28）式：

$$AS'_t=\frac{(AS'_{t-1}+PI'_t-EB'_t)\cdot(1+i_t)-BEN'_t-EE'_t}{p_t}$$

上式变形为：

$$AS'_t\cdot(1-q^d_t)\cdot(1-q^w_t)=(AS'_{t-1}+PI'_t-EB'_t)\cdot(1+i_t)-BEN'_t-EE'_t \tag{15-26}$$

关于 EE'_t 和 BEN'_t 的计算方式，回顾（14－31）和（14－32）式如下：

$$BEN'_t=q^d_t\cdot DB_t\cdot(1+i_t)^{0.5}+(1-q^d_t)\cdot q^w_t\cdot CV_t+(1-q^d_t)\cdot DIV_t \tag{15-27}$$

$$EE'_t=\frac{ED_t}{AZ}\cdot q^d_t\cdot(1+i_t)^{0.5}+\frac{EW_t}{AZ}\cdot(1-q^d_t)\cdot q^w_t+\frac{EDIV_t}{AZ}\cdot(1-q^d_t) \tag{15-28}$$

把（15－27）和（15－28）代入（15－26）并整理，可得到：

$$\begin{aligned}AS'_t=&(AS'_{t-1}+PI'_t-EB'_t)\cdot(1+i_t)-\left[\left(DB_t+\frac{ED_t}{AZ}\right)\cdot(1+i_t)^{0.5}-AS'_t\right]\cdot q^d_t\\&-\left(CV_t+\frac{EW_t}{AZ}-AS'_t\right)\cdot(1-q^d_t)\cdot q^w_t-\left(DIV+\frac{EDIV_t}{AZ}\right)\cdot(1-q^d_t)\end{aligned} \tag{15-29}$$

（15－29）右边第三项为：

$$\left(CV_t+\frac{EW_t}{AZ}-AS'_t\right)\cdot(1-q^d_t)\cdot q^w_t \tag{15-30}$$

从（15－30）式可以进一步理解资产份额与现金价值之间的关系。如果现金价值和退保费用之和超过资产份额，失效率的增加将会使资产份额降低，这意味着退保者过多地得到了那些未退保者的资助。理论上讲，退保和不退保之间完美的公平是每年资产份额等于现金价值和退保费用之和。尽管这是一个非常好的目标，但在实务中很少用此方法确定现金价值，其主要限制原因是：（1）现金价值的计算比较困难；（2）第 1 年甚至第 2 年的资产份额有可能是负的，但现金价值不能是负的；（3）有些国家对最低现金价值有明确规定；（4）有时很难向代理人和保单持有人解释清楚现金价值是如何确定的。

2. 资本成本。监管机关对于保险公司有最低资本的要求，最低资本通常和销售的保单数量、公司所承担的风险相关。销售的保单数量越多，准备金负债越大，公司承担的风险越高，则最低资本要求也越高。这里的风险不仅仅包含保险风险，也包含利率风险、违约风险、流动性风险、运营风险等。由于最低资本的要求，保险公司在分配给股东利润之后，必须确

保持有满足法定最低资本要求的资本金。而持有这些法定最低资本，相当于延迟了股东利润分配，或者占用了部分股东投入的资本金。占用的资本金尽管每年投资可获取投资收入，但投资所得的收益率通常远低于股东投资保险行业所要求的投资回报率。这个差额通常也要在定价中作为持有最低资本的成本反映出来。

3. *缴费方式*。在前面的模型中，保费均假设在年初收取，而在实务中，缴费方式有很多种，通常包含年缴、半年缴、季缴、月缴，不定期缴费等。不同的缴费方式对利润会产生影响，主要表现为：

（1）每年多次缴费意味着更高的日常运营费用，包括收费、账务记录、佣金支付等；

（3）每年多次缴费时，和年缴保费相比，保费平均来讲收取较晚，会影响利息收入；

（3）每年多次缴费会使失效率高于年缴保费的失效率，这可能会减少保费收入；

（4）如在保单年度中失效发生，则在一年中的后期保费将全部损失；

（5）当死亡发生时，后期保费会丧失；

（6）在实务中，通常先计算出年缴保费数值，然后通过一个因子，调高每年多次缴费情形下的每一期保费，使得全年累计缴费的保费高于年缴保费，用以弥补多次缴费情形下的利润损失。

4. *死亡和保费*。由于保费通常约定在每个缴费周期开始时缴纳，当被保险人在某个缴费周期内死亡，则会产生是否要退还死亡时刻到死亡所在缴费周期末的已缴保费的问题。另外由于宽限期的存在，还有可能出现死亡已发生而当期保费尚未缴纳的情形，此时是否要补缴当期保费也是一个要明确的问题。这些问题如何处理将取决于条款的约定和公司策略，并在定价中加以反映，例如：

保费在每个缴费周期开始时收取，死亡发生后，公司不退还已收取的死亡时刻至缴费周期末的保费。对于保费为非年缴方式的，也不会要求客户补缴死亡所在的缴费周期末至年末的保费。

保费在每个缴费周期开始时收取，死亡发生后，已收取的死亡时刻至缴费周期末的保费将返还给客户。平均来讲，在死亡发生年度，保费损失约为年度保费的一半。

无论是何种缴费方式，死亡发生后，当年度保费如未全部缴纳的，任何未缴保费将在死亡给付中扣除。在这种情况下公司没有保费损失。

5. *通货膨胀*。在定价过程中使用到的死亡给付费用、退保费用和红利发放费用假设通常来自对过去的经验数据分析的结果，由于通货膨胀因素的存在，在未来年度发生的固定金额的费用，应随着预计的通货膨胀率逐

年增大。通货膨胀一般可表示为利率的一个固定比例，或表示为利率的函数。在费用率假设中，针对通货膨胀率单独假设后，就可在对现金流进行动态分析时，很容易地通过变动通货膨胀假设进行分析。

6. 保单贷款。对于可提供保单贷款的产品，投资收益率是保单贷款利率和其他资产收益率的加权平均数。在高利率时期，固定利率的保单贷款使平均收益降低，而且如果市场利率与保单贷款利率的差异越大，那么贷款规模就倾向于越大。这个问题可以通过使用变动贷款利率来解决。对于万能寿险，这个问题往往通过对提供保单贷款的现金价值设计较低的利率来解决。最好的方法是将贷款的影响直接反映在资产的投资收益率假设中。例如，参考每个保单年度可用于贷款的现金价值的比例，对每一年的投资收益率，可按照保单贷款利率和其他资产收益率加权平均进行计算。处理保单贷款的运营费用作为投资费用，应该在加权平均中得到反映。

7. 红利。通过资产份额公式可用于对红利的管理和红利水平的确定，例如：（1）满期红利（或称终了红利）；（2）当死亡或失效发生时支付部分或全部红利；（3）红利可以抵冲下年度的部分或全部保费。

8. 投资年方法。在前面资产份额公式中，在某一个给定保单年度，仅假设了一个平均投资收益率。而这个平均投资收益率背后，通常有一个复杂的计算过程。

在实际经营中，公司投资资产的品种繁多。在同一年份内，不同种类的投资资产其投资收益率不同；在不同年份内，同一种类资产的投资收益率也不尽相同。投资年方法考虑到每项资产的投资收益率依赖于资产获得的年份。对于不同年份获得的资产，均考虑其单独的投资收益率、资产剩余期限，并假设不同的再投资策略。公司的整体平均投资收益率则是这些资产各自的投资收益率加权平均之后的结果。这个加权平均的过程比较复杂，但如果保险公司的投资资产是收益率差异很大的短期和长期资产的组合，那么这种加权平均的过程是必不可少的。

9. 选择权。几乎所有的寿险保单都具有一些保单选择权，主要包括：

（1）退保选择权。在资产份额定价模型中，已明确地包含了退保的因素。

（2）展期和减额缴清。大多数传统产品，除退保外，还提供另外两种不丧失价值选择权，一种是展期保险，另一种是减额缴清保险，两者都可能因现金价值的调整而受到影响。现金价值的调整可能会影响选择展期和减额缴清的概率，从而影响到利润。

（3）万能寿险死亡给付选择权。万能寿险的死亡给付方式有两种选择，即均衡死亡给付（A 方式）和均衡风险保额（B 方式），不同的死亡给付方式对利润会产生影响。

（4）险种转换选择权。定期保单通常提供转换权利，即将定期保单转

为终身保单的权利。在实务中，有的保险公司会提供不同寿险产品之间的转换选择权。

（5）红利购买缴清增额。红利购买的缴清增额部分类似于新购买了一个趸缴的保单。

（6）保额增加和保额减少。保额减少可当作部分退保处理，但保额增加则复杂一些，尤其在保单已生效了一定年数后，增加的保额部分会涉及对准备金的调整。

如果某个选择权对保单的利润会产生比较大的影响，则应该在资产份额定价过程中通过不同的方法反映出来。其中一种方法是把选择权视为一个独立的保障项目，且具有相应的支付标准和费用。支付标准和费用可随保单签发时的被保险人年龄和保单年度而有所不同。

10. *代理人留存*。如果代理人离开公司，通常他将放弃收取未来佣金的权利，在定价过程中，可以调整佣金支出假设，使之能反映代理人留存与否对未收取佣金的影响，以及每个保单年度未获得佣金的代理人的比例。

11. *再保险*。再保险对于大额保单或自留额较低的保险公司影响较大，再保险的影响可以通过在公式中加上以下因素而反映出来。（1）再保分出的方式；（2）每张保单分保的数额；（3）业务分出的平均比例；（4）再保险管理成本，此项成本通常第一年较高，以后随通货膨胀而增长；（5）对于每年续保定期计划，保费和保单费用的数额；（6）对于共保计划，共保保费和费用分摊的数额。

再保险使得保单的保险给付金额降低，但由于支付再保险人保费，使得分出公司的自留保费收入降低。

习　题

1. 以一张单位保额有效保单为基础计算，证明等价公式和上一章推导的积累公式（14－37）在 $i_t=j_t$ 时产生相同的利润现值。

2. 某寿险公司销售终身寿险业务，已知该业务的利润现值随机变量 PVP 可以用正态分布近似。假设

（1）$E(PVP)=350, E(PVP^2)=5\,958\,000$；

（2）该业务销售了 1 000 张保单；

（3）Z 为标准正态分布随机变量，$\Pr\{Z>-1.645\}=0.95$。

问该终身寿险业务利润现值以 95% 的概率大于多少？

3. 描述准备金对利润现值的影响。

4. 讨论如何在资产份额定价模型中增加对资本成本的考虑。

5. 讨论资产份额法改进中的各种情况。

第十六章　保单现金价值及退保选择权

学习目标

- □ 了解保单现金价值的含义和我国的现金价值监管规定
- □ 熟悉我国对固定缴费保险合同和账户型产品的现金价值计算的基本过程
- □ 熟悉保险合同其他解约方式如缴清保险、展期保险、自动垫缴保费等保单选择权的计算方法

§16.1　保单现金价值

16.1.1　保单现金价值的含义

现金价值，又称解约金、退保金、不丧失保单利益或不丧失价值。现金价值是指投保人退保或保险公司解除保险合同时，由保险公司向投保人退还的那部分金额。但是需要指出的是，现金价值往往特指以现金方式支付的不丧失保单利益，而不丧失保单利益还可以通过其他方式实现。保险合同关于现金价值的约定属于退保人解除保险合同权利的一部分。

保险公司一般根据平衡原理来确定保险费率，根据保险期间内事故发生概率来计算“均衡保费”，使得收支平衡。然而，这种平衡是针对整个保险期限而言的，对特定的某个年度来说，收支未必相等。在寿险中，保险公司往往采用“均衡保费”的办法，将投保人需要缴纳的全部保费在整个缴费期内均摊，使投保人每期缴纳的保费都相同。被保险人年轻时，死亡率低，均衡保费大于自然保费，多缴的保费由保险公司逐年积累；被保险人到达一定年龄以后，均衡保费小于自然保费，不足的部分将由投保人以前多缴的保费予以弥补。这部分提存的保费连同其产生的利息，每年滚存累积产生一定数量的资金积累，理论上讲这笔资金应该属于投保人的权益，因此以准备金的形式在资产负债表中存在，可看成是保险人对投保人的未来责任的一种储备。

人寿保险合同大都是长期性合同，一份保险合同自成立到终止的数十年里，保单状况随时都可能因为投保人投保意愿的改变而变化。在人们购买人寿保险时，很难预料到自己未来的经济状况、身体状况是如何变化的，当初投保的意愿会随着时间的推移而变化，最常见的就是投保人不愿继续

缴纳保险费，提出退保。此时，保险人对于保单的未来责任消失，不再需要支持未来责任的资产，这样就产生了如何公平合理地处理这些资产的问题。因此，保单持有人提出退保时，保险人应按规定以退保金的形式把这部分资产支付给保单持有人，作为保单持有人的退保收益（不丧失保单利益，即不会因为投保人停止缴纳保费而丧失这部分利益）。虽然理论上保单现金价值的概念比较容易解释清楚，但在业务实践中却困难得多，例如，计算中如何规定所缴保费中有多少保费已用于支付费用和风险保费，如何确定剩余保费的累计利息等，在实际的现金价值计算规则设计中还需要考虑现金价值与准备金之间的关系，以及退保人与留存客户的利益平衡等。

通过责任准备金的计算可看出，来源于投保人过去缴纳保费的积累值与过去保险成本积累值之间的差额是属于保单持有人的，这部分金额不会因保险单效力的改变而丧失（责任准备金的计算可参考第 17、18 章的介绍）。虽然不丧失保单利益来源于责任准备金，但考虑到退保对保险人在财务上造成的风险，且初始费用可能尚未从附加保费中收回，因此，现金价值数额的一种近似方法是根据（16－1）式来确定。

$$ {}_{k}CV = {}_{k}V - {}_{k}SC, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \qquad (16-1) $$

其中，${}_{k}CV$ 表示保单签发后，在时刻 k 时不丧失保单利益的现金价值；${}_{k}V$ 表示第 k 期期末责任准备金；${}_{k}SC$ 是解约费用。

在实务中，因为不可能向退保人收取任何费用，所以对于任何 k，都有${}_{k}CV \geq 0$。

一般而言，将现金价值设计成不大于责任准备金的原因主要有：（1）财务风险。过多的退保会造成保险人财务稳定性下降。一般情况下，保险人要准备多于必要储备的流动资金用于保单持有人随时可能提出的退保或贷款要求，而在经济不景气时期，保单持有人更有可能退保或申请贷款。过多的流动资金必使投保人总体收益率有所下降；（2）死亡率风险。一般投保人认为如果退保金较高，以至达到责任准备金的数额，会促使大量身体健康状况较好、风险较低的人解约，而将高风险人群留给保险人；（3）效益风险。保险人认为，每一个保单都能为公司带来利润，而退保会使公司丧失部分利润，因此应予以扣除一定数额；（4）退保成本。投保人提出退保后，保险公司必将有一定的费用支出。

决定保费及责任准备金必须遵从某种指导原则，类似地，决定不丧失保单利益也需要某种指导原则。决定以上原则的内在动机是使两类保单持有者的权益对等，这两类分别是指那些在保险合同满期前终止的与不终止的保单持有人。很明显，构成对等权益的概念可能有各种不同含义：从提前终止的保单持有人因未履约而不应享有不丧失保单利益的观点，到应该偿还其所有保费的精算值（当然要扣掉适当的成本费用）的观点，应有尽

有。普遍采用的原则是介于上述两个极端之间的权益概念，即退保的寿险保单持有人应享有不丧失保单利益，但这些利益不应引起其他保单持有者的保费——保险责任结构的改变。

16.1.2 资产份额与保单现金价值

人寿保险单是一个长期的合同，保险人的收入来自保费及投资收益，支出则由死亡给付、退保给付、及费用开支组成。资产份额方法是用来分析寿险公司盈余状况非常有效的办法。资产份额计算并不是过去结果的历史概括，而是一种预测性的计算，目的在于分析影响保单财务状况的主要原因。对于单位保额的保险，当 $k=0, 1, 2, \cdots$时，

$$p_{x+k}^{(\tau)}({}_{k+1}AS)=[{}_{k}AS+G\cdot(1-c_k)-e_k](1+i)-q_{x+k}^{(1)}-q_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV) \tag{16-2}$$

其中：

${}_{k}AS$ 表示保单签发后 k 年、在第 $k+1$ 个保单年度初的期望资产份额；G 表示毛保费；c_k 表示在时刻 k 用于支付费用的营业保费比例；e_k 表示在时刻 k 用于支付每份保单费用的金额；$q_{x+k}^{(1)}$表示现龄 $x+k$ 岁的被保险人在 $x+k+1$ 岁之前的死亡概率；$q_{x+k}^{(2)}$表示现龄 $x+k$ 岁的被保险人在 $x+k+1$ 岁之前的退保概率；${}_{k+1}CV$ 表示在退保年末支付的退保金额，即现金价值。

类似于对责任准备金递推方程的分析，在（16-2）式两边同乘 $v^{k+1}\cdot l_{x+k}^{(\tau)}$，那么对于 $k=0, 1, 2, \cdots$，

$$\Delta[l_{x+k}^{(\tau)}v^k\,{}_{k}AS]=[G\cdot(1-c_k)-e_k]l_{x+k}^{(\tau)}v^k-[d_{x+k}^{(1)}+d_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV)]v^{k+1} \tag{16-3}$$

其中 Δ 是差分符号，定义为 $\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$。当 $k=0, 1, 2, \cdots n-1$ 时，代入（16-3）式得 n 个递推式，对这 n 个式子求和，即得

$$v^n\cdot l_{x+n}^{(\tau)}\cdot{}_{n}AS-l_{x}^{(\tau)}{}_{0}AS=\sum_{k=0}^{n-1}\{[G\cdot(1-c_k)-e_k]l_{x+k}^{(\tau)}v^k-[d_{x+k}^{(1)}+d_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV)]v^{k+1}\} \tag{16-4}$$

如果${}_{0}AS=0$，那么${}_{n}AS$ 为

$$\frac{1}{l_{x+n}^{(\tau)}}\sum_{k=0}^{n-1}\{[G\cdot(1-c_k)-e_k]l_{x+k}^{(\tau)}(1+i)-[d_{x+k}^{(1)}+d_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV)]\}(1+i)^{n-k-1} \tag{16-5}$$

特别地，对于终身寿险，令 $n=\omega-x$，注意到最终资产份额为 0，即${}_{n}AS=0$，在（16-4）式两边同乘$\frac{{}_{k}p_{x}^{(\tau)}}{l_{x+k}^{(\tau)}}$可得

$$G\cdot\ddot{a}_{x}^{(\tau)}=A_{x}^{(1)}+\sum_{k=0}^{\omega-x-1}[Gc_k+e_k]v^k\,{}_{k}p_{x}^{(\tau)}+\sum_{k=0}^{\omega-x-1}{}_{k}p_{x}^{(\tau)}q_{x+k}^{(2)}v^{k+1}\cdot{}_{k+1}CV \tag{16-6}$$

另外，在（16-2）式中，把 $p_{x+k}^{(\tau)}=1-q_{x+k}^{(\tau)}=1-q_{x+k}^{(1)}-q_{x+k}^{(2)}$代入，可得

$${}_{k+1}AS=[{}_{k}AS+G\cdot(1+c_k)-e_k](1+i)$$

$$-q_{x+k}^{(1)}(1-{}_{k+1}AS)-q_{x+k}^{(2)}({}_{k+1}CV-{}_{k+1}AS) \qquad (16-7)$$

资产份额方法是一种非常有效的分析方法，它对于固定的保费、费用额及现金价值的计算可用来检查定价与保险责任结构各种成份的平衡，计算目的在于确定是否除最初的保单年度外有${}_kAS \geq {}_kV$，即盈余大于0。设

$${}_kAS={}_kV+u(k)$$

其中${}_kV$表示第k期的期末责任准备金，$u(k)$表示第k期末每个有效保单的盈余。$u(k)$的值在开始的年度有可能为负值。假设准备金负债的一般递推公式为

$$p_{x+k-1}^{(\tau)}\cdot{}_kV=({}_{k-1}V+P)(1+i)-q_{x+k-1}^{(1)}-q_{x+k-1}^{(2)}\cdot{}_kCV \qquad (16-8)$$

在（16-2）式中用$k-1$代替k，并对修改后的（16-2）和（16-8）式两边乘以${}_{k-1}p_x^{(\tau)}$并进行整理，那么对$k=1, 2, \cdots$

$$u(k)\cdot{}_kp_x^{(\tau)}=[u(k-1)+G\cdot(1-c_{k-1})-e_{k-1}-P](1+i)\cdot{}_{k-1}p_x^{(\tau)} \qquad (16-9)$$

记$G=P+c$，$Gc_{k-1}+e_{k-1}=E_{k-1}$，那么（16-9）式变为

$$u(k)\cdot{}_kp_x^{(\tau)}=[u(k-1)+c-E_{k-1}](1+i)\cdot{}_{k-1}p_x^{(\tau)} \qquad (16-10)$$

在（16-10）两边乘以v^k，整理得

$$\Delta[v^{k-1}\cdot{}_{k-1}p_x^{(\tau)}\cdot u(k-1)]=v^{k-1}\cdot{}_{k-1}p_x^{(\tau)}\cdot(c-E_{k-1})$$

假设$u(0)=0$，类似地可得到

$${}_kp_x^{(\tau)}\cdot u(k)=\sum_{j=1}^{k}(1+i)^{k-j+1}\cdot{}_{j-1}p_x^{(\tau)}\cdot(c-E_{j-1}) \qquad (16-11)$$

【例16-1】 已知3年期两全保险，保险金额为1 000元，$G=350$元，$i=5\%$，另外给定如下条件（见表16-1）：

表16-1

k	$p_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(1)}$	$q_{x+k}^{(2)}$	c_k	e_k	${}_{k+1}CV$
0	0.5	0.5	0.1	0.4	0.2	8	230
1	0.6	0.4	0.15	0.25	0.06	2	560
2	0.5	0.5	0.5	0	0.06	2	1 000

计算各年的资产份额。

解： 根据（16-2）式，有

$${}_{k+1}AS=\frac{1}{p_{x+k}^{(\tau)}}\{[{}_kAS+G\cdot(1+c_k)-e_k](1+i)-1\ 000q_{x+k}^{(1)}-{}_{k+1}CV\cdot q_{x+k}^{(2)}\}$$

$${}_0AS=0$$

$${}_1AS=\frac{1}{0.5}\{[0+350\times(1-0.2)-8](1+0.05)-1\ 000\times0.1-230\times$$

$$0.4\} = 187.2$$

$$_{2}AS = \frac{1}{0.6}\{[187.2 + 350 \times (1 - 0.06) - 2](1 + 0.05) - 1\ 000 \times 0.15 - 560 \times 0.25\} = 416.52$$

$$_{3}AS = \frac{1}{0.5}\{[416.52 + 350 \times (1 - 0.06) - 2](1 + 0.05) - 1\ 000 \times 0.5\} = 561.39$$

16.1.3 保单现金价值的监管及计算

1. 各国对现金价值监管的一般措施。由于对公平看法的种种不同，加上各国历史、文化、传统和发展过程、阶段的不同，对现金价值的监管，存在着两种截然不同的做法。一种是以加拿大和英国为代表的宽松的监管模式，一种是以美国为代表的严格的监管模式。

（1）宽松的监管模式。在这种模式下，监管机关对寿险产品是否提供现金价值、最低现金价值、现金价值的计算方法与基础一般都不做具体的规定，由市场竞争决定现金价值的多少。但监管机关可以要求指定精算师提供现金价值的计算方法并说明其合理性。以加拿大为例，没有任何现行的法律、法规或各种标准对保险产品的现金价值加以规定或限制。作为保险产品中保证利益的一部分，各保单年度现金价值的水平可完全由保险公司根据产品的设计理念、风险特征及市场策略自行决定，现金价值作为合同的一部分可在一定程度上自由约定。加拿大和英国这种制度的形成有其特殊的背景，他们的保险市场比较完善，竞争比较充分。投保人对现金价值的本质有比较清楚的认识，能够区分不同产品，并作出理性的选择。

（2）严格的监管模式。在这种监管模式下，监管机构对一些产品的最低现金价值作出了明确的规定，中心原则是限定最低不丧失保单利益的数额（或是限定$_{k}SC$ 的最大值），以保证保单持有人的利益。有关规定包括使用的生命表、利率和计算的方法，并有专门的法律，在美国称为不丧失价值法（Standard Nonforfeiture Law）。其理由在于，寿险合同通常是一种复杂的金融产品，消费者的认知能力往往是有限的，同时，寿险合同是由拥有专业知识和技术的保险人制定的，因此需要法律和监管对消费者提供保护，而不丧失价值法正是一部重要的消费者保护法。

2. 我国对现金价值计算的基本要求。考虑到我国目前保险市场发展的现状，我国目前对现金价值的监管也属于严格的监管模式，对产品现金价值的计算有严格的规定，我国对现金价值的监管规定了一个按一定规则计算的最低现金价值要求，要求保险公司设计产品时，提供的现金价值不能低于该要求。下面对我国目前长期寿险业务的现金价值监管要求做一个简

单的介绍。

（1）固定缴费保险合同的现金价值计算。我国对现金价值的计算采用的是在保险费计算基础上调整保费计算基础的方法。中国保监会《关于下发有关精算规定的通知（保监发 1999 年［90］号）》及《个人分红保险精算规定》对普通寿险及分红保险的现金价值计算方法分别进行了规定，这两个规定的方法虽然存在一些差异但计算方法的主要要求一致，因此在此一并介绍。

《关于下发有关精算规定的通知》要求，普通寿险保单现金价值计算遵循以下几个步骤。

第一步，计算保单年度末保单价值准备金。保单年度末保单价值准备金的计算可以采用过去法和未来法两种方式计算。过去法的计算过程类似于资产份额的计算过程，但要求计算基础中的费用率和死亡率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定附加费用率和预定死亡率，利率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利率加上2%。同时还需要按照上述假设重新计算用于保单价值准备金计算的毛保费。因此在符合该规定要求下，现金价值准备金计算的方法有些类似于资产份额的计算方法，但此时使用的是重新计算的毛保费而不是实际收取的保费，同时费用率、死亡率、利率也都是要求采用规定的值而不是经验值，而且不考虑退保。这样规定的好处是避免了各公司采用不同假设难以监管的问题。

其他需要注意的地方是，对于重大疾病保险，计算现金价值时疾病发生率应按与死亡率相同的原则确定；对于提供保单年度末生存给付的保单，在计算保单年度末保单价值准备金时，不包括该保单年度末的生存给付金额。关于保单年度末生存金的规定避免了后面步骤的系数调整。否则系数调整可能造成现金价值在保单年度末客户领取生存金前后存在的不合理差异，其实质要求是，保单年度末的生存给付金额在计算当年度末的现金价值时不需要进行下一步骤的系数调整。

第二步，计算保单年度末保单最低现金价值。计算公式为：

$$r \times \max\{\text{保单年度末保单价值准备金}, 0\} \qquad (16-12)$$

系数 r 按下列公式计算：

当 $t < \min\{20, n\}$ 时，

$$r = k\% + t \times (100\% - k\%)/\min\{20, n\} \qquad (16-13)$$

当 $t \geq \min\{20, n\}$ 时，$r = 100\%$

其中：

① n 为保单缴费期间（趸缴保费时，$n=1$）

② t 为保单经过的保单年度，$t=1, 2, \cdots$

③ 参数 k 按表 16－2 取值：

表 16－2

k 值		
	两全保险、年金保险	定期死亡保险、终身死亡保险
期缴个人业务	90	80
期缴团体业务	95	85
趸缴个人业务	100	100
趸缴团体业务	100	100

该调整过程降低了保单在前期的现金价值水平，降低了保险公司由于客户早期退保给公司带来的损失。

第三步，计算保单年度末保单现金价值。保险公司可以将根据上述步骤所确定的保单年度末保单最低现金价值作为保单年度末保单现金价值，也可以按其他合理的计算方法和基础确定保单现金价值，但要保证数值不低于保单年度末保单最低现金价值。

第四步，保单年度中保单现金价值根据保单年度末保单现金价值按合理的方法确定。

一般各公司采用线性插值的方法计算保单年度中保单现金价值。

与普通寿险相比，分红寿险有以下方面的调整。

1. 利率的假设要求进行了调整：对于保险期限小于 10 年的保险产品，利率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利率加 1%；对于保险期限等于或大于 10 年的保险产品，利率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利率加 2%。这样调整的结果是短期两全产品的现金价值水平提高了，提高了投保人前期退保的利益，对我国市场上目前存在的很多短期储蓄类分红险较有针对性。

2. k 值的规定进行了简化：对于趸缴业务，$k=100$；对于期缴两全保险和年金保险，$k=90$；对于期缴终身保险，$k=80$，不再区分团险和个人业务。

【例 16－2】 30 岁男性购买保险金额为 1 万元的分红终身寿险，缴费期间为 20 年缴，定价利率为 2.5%，费用扣除比例前面 3 年分别为 75%、45%、45%，之后各年为 20%。计算该保单在保单年度第 10 年末的现金价值。

解： 根据上述监管要求，由于是分红终身寿险，计算现金价值的利率为 4.5%，生命表采用中国寿险业经验生命表 CL1（2000－2003）。计算过程如下：

第一步，计算保单年度末保单价值准备金。根据上述信息，重新计算的用于保单最低现金价值计算的毛保费为 149.9 元。

$$ {}_{10}V_{30}^{4.5\%} = 10\,000 \times \tilde{A}_{30+10} - GP_{30}^{4.5\%} \times \sum_{k=10}^{20-1}(1-e_{k+1,20}) \times {}_{k-10}E_{30+10} $$

其中，$e_{k+1,20}$指第 $k+1$ 年的费用扣除比例。计算得到$_{10}V_{30}^{4.5\%}=1\ 165$。

关于计算详细过程，可见本章后面的附表。

第二步，计算保单年度末保单最低现金价值。根据公式（16－12）及（16－13）

$$r_{10}=80\%+\frac{(100\%-80\%)}{20}\times 10=90\%$$

$$CV=r_{10}\times {}_{10}V_{30}^{4.5\%}=1\ 165\times 90\%=1\ 049$$

第三步，计算保单年度末现金价值。如果公司保单年度末现金价值计算方法与法定最低现金价值计算方法一致，则该保单在第 10 年末的保单现金价值为 1 049 元。如果公司是按其他方法计算保单现金价值，则需要将该方法计算的第 10 年末的价值与 1 049 元比较，较大者作为保单现金价值。

（2）账户型产品的现金价值。与传统的固定缴费型产品不同，万能保险和投连险都有自己的独立账户，因此，这些产品的现金价值的计算要简单得多，一般都以账户价值扣除一定的退保费用作为现金价值。监管部门对账户型产品的现金价值监管主要是对退保费用的监管。在我国，根据 2007 年公布的万能保险及投资连接保险精算规定要求，对万能保险和投连险退保费用的规定如下：

① 万能保险。对于趸缴保险费形式的万能保险，保险公司收取的退保费用不得高于保单账户价值或者领取部分对应的保单账户价值的以下比例（见表 16－3）：

表 16－3

保单年度	若初始费用小于或等于零（%）	若初始费用大于零（%）
第一年	10	10
第二年	9	8
第三年	8	6
第四年	7	4
第五年	6	2
第六年	5	0
第七年	4	0
第八年	3	0
第九年	2	0
第十年	1	0
第十一年及以后	0	0

对于期缴保险费形式的万能保险，保险公司收取的退保费用不得高于保单账户价值或者领取部分对应的保单账户价值的以下比例（见表 16－4）：

表 16－4

保单年度	退保费用（%）
第一年	10
第二年	8
第三年	6
第四年	4
第五年	2
第六年及以后	0

②投资连接险。对于趸缴保险费形式的投资连结保险，保险公司收取的退保费用不得高于保单账户价值或者领取部分对应的保单账户价值的以下比例（见表 16－5）：

表 16－5

保单年度	若初始费用小于或等于零（%）	若初始费用大于零（%）
第一年	10	10
第二年	9	8
第三年	8	6
第四年	7	4
第五年	6	2
第六年	5	0
第七年	4	0
第八年	3	0
第九年	2	0
第十年	1	0
第十一年及以后	0	0

对于期缴保险费形式的投资连结保险，保险公司收取的退保费用不得高于保单账户价值或者领取部分对应的保单账户价值的以下比例（见表 16－6）：

表 16－6

保单年度	退保费用（%）
第一年	10
第二年	8
第三年	6
第四年	4
第五年	2
第六年及以后	0

在实务中，各公司在万能保险和投资连接保险的开发中，往往通过退保费用的变化来实现产品的灵活设计，降低退保费用会增加产品的竞争力，但同时也加大了公司的退保风险；反之，提高退保费用虽然会降低退保风险，但可能会降低产品的竞争力而不利于开拓市场。

§16.2　其他退保选择权

不丧失价值不仅可以通过现金支付方式直接支付给保单持有人，也可以通过精算现值相等的保险受益方式进行，主要是购买缴清保险和展期保险。同时，不丧失价值的存在成为保单自动垫缴保费条款的基础。在保险产品设计过程中如果保险公司提供给客户以上退保选择权就需要制定相应的规则，以下介绍了这些选择权在产品设计中可以使用的一些基本规则，但在实际的实务处理中，不同的保险公司在计算方法上可能存在差异。

16.2.1　缴清保险

把原保险单改为缴清保险，即原保险单的保险责任、保险期限均不改变，依据原保单解约时的现金价值用平衡原理计算出保险金额减少的保险形式。这种处理方法实际上是以保单现金价值作为趸缴保费，投保与原保险单责任相同的保险，保险期限与原保单相同，保险金额由现金价值的大小而定。

用 b_k 表示在时刻 k 的缴清保险的保险金额，则

$$_kCV = b_k A(k)$$

$$b_k = \frac{_kCV}{A(k)} \tag{16-14}$$

其中，$_kCV$ 是保单在时刻 k 的现金价值，$A(k)$ 是单位保额保险在时刻 k 的趸缴净保费，如果保单持有人在时刻 k 提出停止缴纳保费并表示愿意改买缴清保险，则其可获得 $_kCV/A(k)$ 的保险金额。

在实务中可能出现的变化主要集中在两个方法：

一是关于 $A(k)$ 计算基础的选择。在我国，目前有的公司可能采用现金价值的计算基础，有的公司可能采用保费厘定的计算基础。

二是对于分红保险，减额缴清后是否继续提供分红。在实务中有的保险公司，对缴清后的保单继续提供保单红利，有的则不对缴清后的保单继续提供红利。而不提供红利的公司往往是采用按现金价值计算基础计算 $A(k)$ 的公司，这些公司一般认为由于现金价值计算基础所使用的投资收益率假设较高，因此不应该在此基础上继续提供红利。

16.2.2　展期保险

将原保单变为展期保险，是将原保单变为与原保险单保险金额相同的

死亡保险，保险期限相应缩短。这种处理方法实际上是以保单现金价值作为趸缴保费，购买保险金额与原保单相同的死亡保险（不管原保单是何种类型），保险期限则由保单现金价值的数额而定。原保单改为展期保险后，保险期限不能超过原保险单的剩余期限，如果保单现金价值仍有剩余，则将剩余部分以现金返还保单持有人或者购买与原保单期限相同的生存保险，生存保险的保险金额由剩余的数额决定。

设原保险单保险金额为 1 个单位。用${}_kCV$表示在时刻 k 的保单现金价值，用 s 表示购买展期保险的期限，对于单位保额保险有

$$ {}_kCV = \bar{A}^{1}_{x+k:\overline{s}|} \tag{16-15}$$

在实际中，往往用线性插值法计算 s。

在原保险为两全保险情况下，按上式计算，很有可能出现展期保险的期限 s 大于原保单剩余期限 $n-k$ 的情况，一般在处理展期保险时采用以下步骤。

首先利用（16－15）式估计 s（可采用查表方法）；

如果 $s \leqslant n-k$，则用线性插值法求出 s；

如果 $s > n-k$，则展期保险的期限为 $n-k$，用于购买此保险的趸缴保费为 $\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}$，保单现金价值的余额为${}_kCV-\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}$，用此部分剩余购买期限为 $n-k$ 的生存保险，生存保险的保险金额为：

$$ \frac{{}_kCV-\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}|}}} \tag{16-16}$$

当保险金额为 b 时，对（16－15）式和（16－16）式稍加变形即可。

由于计算过程复杂，而且进行展期保险操作后的保单不是标准形态的保单，系统数据维护困难，目前在国内的产品设计中基本上没有保险公司提供展期保险的选择权。

【例 16－3】 30 岁男性购买保险金额为 1 万元的非分红终身寿险，假设为全离散模型，定价利率 $i=2.5\%$。当 $k=10$ 时，求：

（1） 假设现金价值为 1 012 元，求展期保险的期限。

（2） 如果原保单有 500 元的贷款，求展期保险的期限。

解：

（1） 根据（16－15）式

$$1\,012 = 10\,000 A^{1}_{40:\overline{s}|}$$

$$A^{1}_{40:\overline{s}|} = 0.1012$$

$$s \approx 27$$

（2） 根据（16－15）式

$$1\,012 - 500 = (10\,000 - 500)\ A^{1}_{40:\overline{s}|}$$

$$A^{1}_{40:\overline{s}|} = 0.0539$$

$$s \approx 20$$

关于计算详细过程，可见本章后面的附表。

16.2.3　自动垫缴保费

如果投保人不按期缴纳保费，但也没有提出退保申请，如果合约中有自动垫缴保费的条款而且客户选择了自动垫缴的功能，则保险人可用保单的现金价值垫缴保费。在保费拖欠发生时，自动垫缴保费条款使得以垫缴保费方式保单继续有效。在实务处理中，各公司一般把保单自动垫缴保费视为保单贷款来处理，自动垫缴的保费及其产生的利息可以看作投保人以保单现金价值作为抵押从公司获得的借款。因此，在发生自动垫缴的情况下，未缴保费及其利息类似于贷款余额，形成了投保人的贷款金额，只要保单的现金价值大于保单贷款余额，该合同能一直保持有效，当垫缴保费和利息达到保单现金价值的数额时，保险合同即行终止。同时，在垫缴保费期间，如果发生保险事故，保险人要从应给付的保险金中扣除垫缴的保费和利息。

附表 1 例 16 - 2 保单年度末保单价值准备金

计算现金价值的利率为 4.5%，生命表采用中国寿险业经验生命表 CL1（2000 - 2003）。（注：此处用的是连续型换算表）

附表 1

年龄	非养老金业务表				毛保费
	男（CL1）	M_x	D_x	N_x	20 年缴
0	0.000722	46 271.3	1 000 000.0	22 171 090.9	47.1
1	0.000603	45 565.0	956 246.9	21 171 090.9	48.5
2	0.000499	45 000.9	914 517.0	20 214 844.0	50.1
3	0.000416	44 554.5	874 699.2	19 300 327.0	51.8
4	0.000358	44 198.5	836 684.5	18 425 627.8	53.8
5	0.000323	43 905.5	800 368.4	17 588 943.3	55.8
6	0.000309	43 652.6	765 655.4	16 788 574.9	58.0
7	0.000308	43 421.2	732 458.2	16 022 919.5	60.3
8	0.000311	43 200.5	700 701.0	15 290 461.3	62.8
9	0.000312	42 987.3	670 318.8	14 589 760.3	65.3
10	0.000312	42 782.8	641 253.2	13 919 441.5	67.9
11	0.000312	42 587.0	613 448.0	13 278 188.2	70.7
12	0.000313	42 399.8	586 848.4	12 664 740.2	73.6
13	0.00032	42 220.1	561 401.7	12 077 891.8	76.7

投保后第 t 年	投保年龄：30 保单年度末保单价值准备金
1	30.2
2	108.2
3	189.3
4	312.6
5	441.0
6	574.6
7	713.6
8	858.2
9	1 008.5
10	1 164.8
11	1 327.2
12	1 496.2
13	1 671.8

续表

年龄	非养老金业务表				毛保费
	男（CL1）	M_x	D_x	N_x	20 年缴
14	0.000336	42 044.4	537 054.6	11 516 490.1	79.8
15	0.000364	41 867.9	513 755.1	10 979 435.5	83.1
16	0.000404	41 684.9	491 452.8	10 465 680.4	86.5
17	0.000455	41 490.7	470 099.7	9 974 227.6	90.1
18	0.000513	41 281.5	449 651.5	9 504 127.9	93.7
19	0.000572	41 055.8	430 067.8	9 054 476.4	97.5
20	0.000621	40 815.2	411 312.7	8 624 408.6	101.4
21	0.000661	40 565.3	393 356.3	8 213 095.8	105.4
22	0.000692	40 311.0	376 168.7	7 819 739.6	109.5
23	0.000716	40 056.3	359 720.9	7 443 570.9	113.9
24	0.000738	39 804.4	343 984.1	7 083 850.0	118.4
25	0.000759	39 556.0	328 928.4	6 739 865.9	123.1
26	0.000779	39 311.8	314 525.1	6 410 937.5	128.0
27	0.000795	39 072.1	300 746.5	6 096 412.3	133.1
28	0.000815	38 838.2	287 566.9	5 795 665.8	138.4
29	0.000842	38 609.0	274 959.4	5 508 098.9	144.0
30	0.000881	38 382.5	262 897.5	5 233 139.5	149.9
31	0.000932	38 155.9	251 354.9	4 970 242.0	155.9
32	0.000994	37 926.8	240 306.8	4 718 887.1	162.3
33	0.001055	37 693.1	229 730.1	4 478 580.2	168.9
34	0.001121	37 456.0	219 605.5	4 248 850.1	175.7
35	0.001194	37 215.2	209 913.2	4 029 244.6	182.9
36	0.001275	36 970.0	200 634.1	3 819 331.4	190.3
37	0.001367	36 719.8	191 749.5	3 618 697.3	198.0
38	0.001472	36 463.4	183 241.5	3 426 947.8	206.1
39	0.001589	36 199.5	175 092.6	3 243 706.3	214.4
40	0.001715	35 927.3	167 286.5	3 068 613.7	223.1
41	0.001845	35 646.7	159 808.2	2 901 327.1	232.2
42	0.001978	35 358.2	152 644.4	2 741 518.9	241.6
43	0.002113	35 062.9	145 782.3	2 588 874.5	251.5
44	0.002255	34 761.6	139 209.8	2 443 092.2	261.8
45	0.002413	34 454.5	132 914.7	2 303 882.4	272.5
46	0.002595	34 140.7	126 884.2	2 170 967.7	283.8
47	0.002805	33 818.6	121 105.2	2 044 083.5	295.7
48	0.003042	33 486.3	115 565.1	1 922 978.3	308.1

投保后第 t 年	投保年龄：30
	保单年度末保单价值准备金
14	1 854.7
15	2 045.0
16	2 243.0
17	2 449.1
18	2 663.4
19	2 886.2
20	3 117.9
21	3 233.2
22	3 352.3
23	3 475.3
24	3 602.3
25	3 733.4
26	3 868.4
27	4 006.7
28	4 148.0
29	4 291.6
30	4 437.1
31	4 584.3
32	4 733.0
33	4 883.2
34	5 035.1
35	5 188.5
36	5 343.2
37	5 499.1
38	5 655.7
39	5 812.8
40	5 969.8
41	6 126.6
42	6 282.8
43	6 438.1
44	6 592.1
45	6 744.6
46	6 895.4
47	7 044.2
48	7 190.6

续表

年龄	非养老金业务表				毛保费
	男（CL1）	M_x	D_x	N_x	20 年缴
49	0.003299	33 142.4	110 252.2	1 807 413.2	321.1
50	0.00357	32 786.6	105 156.4	1 697 161.1	334.9
51	0.003847	32 419.4	100 268.9	1 592 004.6	349.3
52	0.004132	32 042.1	95 582.0	1 491 735.7	364.6
53	0.004434	31 655.7	91 088.1	1 396 153.7	380.8
54	0.004778	31 260.6	86 779.1	1 305 065.7	398.1
55	0.005203	30 855.0	82 645.5	1 218 286.5	416.5
56	0.005744	30 434.4	78 675.1	1 135 641.1	436.2
57	0.006427	29 992.3	74 854.7	1 056 966.0	457.2
58	0.00726	29 521.7	71 170.9	982 111.3	479.5
59	0.008229	29 016.2	67 611.7	910 940.4	503.2
60	0.009313	28 472.0	64 167.8	843 328.7	528.4
61	0.01049	27 887.4	60 832.7	779 160.9	555.2
62	0.011747	27 263.1	57 602.5	718 328.2	583.8
63	0.013091	26 601.2	54 474.4	660 725.8	614.5
64	0.014542	25 903.6	51 446.2	606 251.3	647.5
65	0.016134	25 171.7	48 514.9	554 805.1	683.1
66	0.017905	24 406.0	45 676.7	506 290.2	721.7
67	0.019886	23 606.0	42 927.2	460 613.4	763.7
68	0.022103	22 770.9	40 261.8	417 686.2	809.4
69	0.024571	21 900.4	37 676.4	377 424.5	859.1
70	0.027309	20 994.8	35 168.1	339 748.1	913.5
71	0.03034	20 055.3	32 734.6	304 580.0	972.9
72	0.033684	19 083.8	30 374.6	271 845.4	1 038.0
73	0.037371	18 082.9	28 087.5	241 470.8	1 109.4
74	0.04143	17 056.1	25 873.6	213 383.2	1 187.8
75	0.045902	16 007.5	23 733.6	187 509.7	1 274.0
76	0.050829	14 941.8	21 669.1	163 776.1	1 369.0
77	0.056262	13 864.3	19 682.0	142 107.0	1 473.6
78	0.062257	12 781.1	17 774.8	122 425.0	1 589.1
79	0.068871	11 698.6	15 950.4	104 650.3	1 716.5
80	0.076187	10 624.0	14 212.3	88 699.9	1 857.4
81	0.084224	9 564.7	12 564.1	74 487.5	2 013.0
82	0.093071	8 529.6	11 010.5	61 923.4	2 185.2
83	0.1028	7 527.1	9 555.7	50 912.9	2 376.0

投保后第 t 年	投保年龄：30
	保单年度末保单价值准备金
49	7 334.4
50	7 475.2
51	7 612.7
52	7 746.8
53	7 877.1
54	8 003.5
55	8 125.6
56	8 243.5
57	8 356.8
58	8 465.5
59	8 569.5
60	8 668.8
61	8 763.1
62	8 852.7
63	8 937.4
64	9 017.4
65	9 092.6
66	9 163.2
67	9 229.3
68	9 291.1
69	9 348.8
70	9 402.9
71	9 454.1
72	9 504.3
73	9 558.7
74	9 633.1
75	9 782.3

续表

年龄	非养老金业务表				毛保费
	男（CL1）	M_x	D_x	N_x	20年缴
84	0.113489	6 566.2	8 204.2	41 357.2	2 587.6
85	0.125221	5 655.4	6 959.9	33 153.1	2 822.6
86	0.13808	4 802.8	5 826.2	26 193.2	3 083.9
87	0.152157	4 015.8	4 805.5	20 367.0	
88	0.167543	3 300.6	3 898.8	15 561.5	
89	0.184333	2 661.6	3 105.9	11 662.6	
90	0.202621	2 101.5	2 424.2	8 556.8	
91	0.2225	1 621.0	1 849.8	6 132.5	
92	0.244059	1 218.4	1 376.3	4 282.7	
93	0.267383	889.8	995.6	2 906.4	
94	0.292544	629.4	698.0	1 910.9	
95	0.319604	429.6	472.5	1 212.9	
96	0.348606	281.9	307.7	740.3	
97	0.379572	177.0	191.8	432.7	
98	0.412495	105.8	113.9	240.9	
99	0.447334	59.8	64.0	127.0	
100	0.48401	31.8	33.9	63.0	
101	0.522397	15.8	16.7	29.2	
102	0.562317	7.3	7.6	12.5	
103	0.603539	3.1	3.2	4.8	
104	0.64577	1.2	1.2	1.6	
105	1	0.4	0.4	0.4	

附表2 例16－3 展期保险的期限

定价利率 $i=2.5\%$，生命表采用中国寿险业经验生命表 CL1（2000－2003）。假设全离散模型（注：此处用的是离散型换算表）。

附表2

年龄	非养老金业务			
	男（CL1）	C_x	M_x	D_x
0	0.000722	704.4	160 549.6	1 000 000.0
1	0.000603	573.5	159 845.2	974 905.4
2	0.000499	462.8	159 271.7	950 553.7
3	0.000416	376.2	158 808.9	926 906.7
4	0.000358	315.7	158 432.7	903 923.0
5	0.000323	277.8	158 117.0	881 560.4
6	0.000309	259.2	157 839.2	859 781.1

投保年龄：30	
s	$A^1_{40:\overline{s}\rceil}$
1	0.001673
2	0.003426
3	0.005256
4	0.007160
5	0.009138
6	0.011198

续表

年龄	非养老金业务			
	男（CL1）	C_x	M_x	D_x
7	0.000308	252.0	157 580.0	838 551.6
8	0.000311	248.1	157 328.0	817 847.2
9	0.000312	242.8	157 079.9	797 651.6
10	0.000312	236.8	156 837.1	777 953.8
11	0.000312	231.0	156 600.3	758 742.6
12	0.000313	226.0	156 369.3	740 005.7
13	0.00032	225.3	156 143.4	721 730.8
14	0.000336	230.7	155 918.0	703 902.3
15	0.000364	243.8	155 687.3	686 503.2
16	0.000404	263.9	155 443.5	669 515.4
17	0.000455	289.8	155 179.6	652 921.9
18	0.000513	318.7	154 889.8	636 707.1
19	0.000572	346.5	154 571.1	620 859.0
20	0.000621	366.8	154 224.7	605 369.7
21	0.000661	380.6	153 857.9	590 237.8
22	0.000692	388.5	153 477.3	575 461.1
23	0.000716	391.9	153 088.8	561 037.0
24	0.000738	393.8	152 696.9	546 961.2
25	0.000759	394.8	152 303.0	533 226.9
26	0.000779	395.1	151 908.2	519 826.5
27	0.000795	393.0	151 513.1	506 752.7
28	0.000815	392.8	151 120.1	493 999.9
29	0.000842	395.6	150 727.3	481 558.3
30	0.000881	403.5	150 331.7	469 417.4
31	0.000932	416.0	149 928.2	457 564.7
32	0.000994	432.5	149 512.2	445 988.6
33	0.001055	447.4	149 079.7	434 678.3
34	0.001121	463.3	148 632.3	423 629.0
35	0.001194	480.9	148 169.0	412 833.3
36	0.001275	500.4	147 688.1	402 283.3
37	0.001367	522.8	147 187.7	391 971.1
38	0.001472	548.4	146 664.9	381 888.0
39	0.001589	576.7	146 116.5	372 025.3
40	0.001715	606.3	145 539.8	362 374.8
41	0.001845	635.3	144 933.5	352 930.0

投保年龄：30	
s	$A^{1}_{40:\overline{s}|}$
7	0.013355
8	0.015623
9	0.018016
10	0.020540
11	0.023196
12	0.025978
13	0.028883
14	0.031911
15	0.035080
16	0.038431
17	0.042022
18	0.045918
19	0.050185
20	0.054870
21	0.059999
22	0.065583
23	0.071620
24	0.078107
25	0.085044
26	0.092445
27	0.100328
28	0.108716
29	0.117632
30	0.127087
31	0.137088
32	0.147632
33	0.158706
34	0.170289
35	0.182349
36	0.194844
37	0.207723
38	0.220925
39	0.234374
40	0.247987
41	0.261666

续表

年龄	非养老金业务			
	男（CL1）	C_x	M_x	D_x
42	0.001978	663.2	144 298.2	343 686.7
43	0.002113	689.8	143 634.9	334 640.9
44	0.002255	716.7	142 945.1	325 789.1
45	0.002413	746.6	142 228.4	317 126.2
46	0.002595	781.4	141 481.8	308 644.9
47	0.002805	821.9	140 700.4	300 335.6
48	0.003042	867.2	139 878.5	292 188.4
49	0.003299	914.7	139 011.3	284 194.7
50	0.00357	962.5	138 096.7	276 348.4
51	0.003847	1 008.3	137 134.2	268 645.7
52	0.004132	1 052.5	136 125.9	261 085.1
53	0.004434	1 097.3	135 073.4	253 664.7
54	0.004778	1 148.5	133 976.1	246 380.4
55	0.005203	1 214.3	132 827.6	239 222.7
56	0.005744	1 301.1	131 613.3	232 173.7
57	0.006427	1 412.1	130 312.2	225 209.8
58	0.00726	1 546.2	128 900.1	218 304.8
59	0.008229	1 697.5	127 353.8	211 434.0
60	0.009313	1 858.8	125 656.4	204 579.6
61	0.01049	2 023.6	123 797.6	197 731.1
62	0.011747	2 187.6	121 774.0	190 884.8
63	0.013091	2 350.5	119 586.4	184 041.4
64	0.014542	2 514.0	117 235.8	177 202.1
65	0.016134	2 681.6	114 721.8	170 366.1
66	0.017905	2 856.6	112 040.2	163 529.2
67	0.019886	3 039.8	109 183.6	156 684.1
68	0.022103	3 230.8	106 143.8	149 822.7
69	0.024571	3 426.5	102 913.0	142 937.7
70	0.027309	3 624.1	99 486.5	136 025.0
71	0.03034	3 820.9	95 862.4	129 083.2
72	0.033684	4 013.0	92 041.6	122 113.9
73	0.037371	4 197.3	88 028.6	115 122.6
74	0.04143	4 370.1	83 831.3	108 117.4
75	0.045902	4 528.0	79 461.2	101 110.3
76	0.050829	4 667.2	74 933.3	94 116.3

投保年龄：30	
s	$A^{1}_{40:\overline{s}\rceil}$
42	0.275295
43	0.288751
44	0.301902
45	0.314609
46	0.326737
47	0.338149
48	0.348724
49	0.358356
50	0.366963
51	0.374491
52	0.380922
53	0.386273
54	0.390596
55	0.393977
56	0.396527
57	0.398373
58	0.399650
59	0.400490
60	0.401012
61	0.401317
62	0.401483
63	0.401566
64	0.401604
65	0.401619
66	0.401628
67	0.401628
68	0.401628
69	0.401628
70	0.401628
71	0.401628
72	0.401628
73	0.401628
74	0.401628
75	0.401628

续表

年龄	非养老金业务			
	男（CL1）	C_x	M_x	D_x
77	0.056262	4 783.8	70 266.1	87 153.6
78	0.062257	4 873.9	65 482.3	80 244.1
79	0.068871	4 932.7	60 608.4	73 413.0
80	0.076187	4 957.0	55 675.7	66 689.7
81	0.084224	4 938.9	50 718.7	60 106.2
82	0.093071	4 876.1	45 779.8	53 701.3
83	0.1028	4 765.4	40 903.7	47 515.3
84	0.113489	4 605.0	36 138.2	41 591.0
85	0.125221	4 394.5	31 533.2	35 971.6
86	0.13808	4 135.6	27 138.7	30 699.7
87	0.152157	3 832.2	23 003.1	25 815.3
88	0.167543	3 490.4	19 170.9	21 353.5
89	0.184333	3 118.8	15 680.5	17 342.3
90	0.202621	2 728.1	12 561.7	13 800.5
91	0.2225	2 330.5	9 833.7	10 735.9
92	0.244059	1 939.0	7 503.2	8 143.5
93	0.267383	1 566.7	5 564.2	6 005.9
94	0.292544	1 225.2	3 997.5	4 292.7
95	0.319604	923.8	2 772.3	2 962.8
96	0.348606	668.9	1 848.5	1 966.7
97	0.379572	462.8	1 179.6	1 249.9
98	0.412495	304.5	716.7	756.5
99	0.447334	189.2	412.3	433.6
100	0.48401	110.4	223.0	233.8
101	0.522397	60.0	112.6	117.7
102	0.562317	30.1	52.6	54.8
103	0.603539	13.8	22.5	23.4
104	0.64577	5.7	8.8	9.1
105	1	3.1	3.1	3.1

习　题

1. 利用资产份额法推导（16－6）式。
2. 利用（16－2）式和（16－8）式推导（16－11）式。
3. 已知5年期两全保险，3年缴清，保险金额为1 000元，$G=300$元，

$i=5\%$，且

k	$p_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(\tau)}$	$q_{x+k}^{(1)}$	$q_{x+k}^{(2)}$	c_k	e_k	${}_{k+1}CV$
0	0.8	0.2	0.05	0.15	0.08	20	237
1	0.9	0.1	0.05	0.05	0.01	5	540
2	0.9	0.1	0.05	0.05	0.01	5	870
3	0.9	0.1	0.05	0.05	0	5	935
4	0.9	0.1	0.05	0.05	0	5	1 000

求各年的资产份额。

4. 30岁男性购买保险金额为1万元的分红终身寿险，缴费期间为20年缴，定价利率为2.5%，费用扣除比例前面3年分别为75%、45%、45%，之后各年为20%。计算该保单在保单年度第15年末的现金价值［生命表采用中国寿险业经验生命表CL1（2000－2003）］。

5. 假设x岁购买的单位保额完全连续终身寿险在k年末转为不丧失现金价值，且${}_kCV={}_k\bar{V}(\bar{A}_x)$，分别按：（1）缴清保险；（2）展期保险；给出刚改变后的保险的未来损失方差与原保险在时间k的未来损失方差之比。

6. 向30岁的投保人发行的1单位保额、连续型20年期两全保险，在10年末中止，并且那时还有一笔以${}_{10}CV$为抵押的贷款额L尚未清偿。用趸缴净保费表示：

（1）在保额为$1-L$的展期保险可展延到原期满时的情况下，期满时的生存给付金额E。

（2）转为第（1）小题中展期保险与生存保险后5年时的责任准备金。

7. 考虑x岁投保的缴费期为n的n年期两全保险，保险金为1单位，支付基础为完全离散的。在拖欠保费的情况下，被保险人可选择：

（1）减额缴清终身寿险，或

（2）期限不超过原两全保险的展期定期保险以及$x+n$岁时支付的减额生存保险。在时刻t的解约金为${}_tV_{x:\overline{n}|}$，它可用来购买金额为b的缴清终身寿险，或用于购买金额为1的展期保险以及$x+n$岁时的生存支付f。

设$A_{x+t:\overline{n-t}|}=2A_{x+t}$，试用$b$，$A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$及${}_{n-t}E_{x+t}$表示$f$。

8. 简述保单现金价值的含义，在现金价值的设计中，现金价值一般小于或等于准备金，请简要说明这样设计的主要理由。

9. 简述各国对现金价值监管的一般方式及我国的要求。

10. 简单说明我国对固定缴费保险产品最低现金价值计算的基本过程。

第十七章　准备金评估 I

学习目标

- □ 了解准备金的不同类型及其各自的特点
- □ 了解各国法定责任准备金计算方法的差异，掌握法定责任准备金的各种评估方法
- □ 了解准备金评估假设的一般监管制度，熟悉评估死亡率和评估利率变化对准备金的影响
- □ 掌握将保单年度准备金调整为财务年度准备金的一般方法
- □ 了解准备金充足性测试的含义以及我国的相关规定

§17.1　准备金介绍

各项准备金代表公司未来的偿付责任，是寿险公司负债的最重要组成部分，准备金加上其他负债的总额决定了寿险公司需持有的资产和盈余规模，因此对准备金的合理计算和及时提留对保证寿险公司的偿付能力极为重要。各国对寿险准备金的监管都非常重视。

17.1.1　准备金的特点及定义

简单来讲，保费的一大部分都必须由保险公司持有并不断积累以备应对未来的赔款和费用等支出，这是准备金的来源。准备金是保险公司在履行保险合同过程中所形成的负债。但明显地与其他负债科目不同的是，准备金在公司资产中所占比重巨大，而且需要用到特定的假设和模型，需要专门的精算技术人员进行度量。这些特殊性需要从保险活动与其他商业活动的差异及准备金负债的特点来进行解释。

在传统的商业活动中，商品交付或服务的履行通常与购买价款的支付是同时进行的。而在保险活动中，保险费的支付与理赔或生存金的给付在时间或数额上不是同时对等进行的。对以死亡为保障责任的保险，死亡率通常随年龄增长而上升，但在实际中保险费则是以趸缴、限期缴费的均衡保费和可变动保费的形式购买的；对以生存为保险责任的保险，生存金的支付则一般在时间上要晚于保险费缴费的时间。因此，在保单早期，投保人支付的保费会超过当前会计年度的保险成本；在保单后期，情况却正好相反。这些不是立即用于支付保险金和费用的剩余资金，必须由保险公

司确认并为所有保单所有人的利益而保存起来，直至未来某天用于履行对客户的理赔或给付承诺。类似地，当投保人以趸缴保费形式购买保单时，该保费成为保单所有人对于未来赔款和费用支出的唯一来源，因此，这一保费的大部分必须由保险公司持有并不断积累以备履行未来义务。这可以很好解释为什么在寿险公司的资产中，大部分对应的是准备金负债。

在传统的商业活动中，也存在商品交付或服务的履行与购买价款的支付不是同时进行的情形，如预付货款、提前发货等，在这些情况下，财务以预付货款或应收账款等形式记录，但由于保险负债具有以下几个特点，致使这些传统的财务记账方法无法适用，必须采用准备金的形式记录这些保险负债。与财务报表中的其他负债相比，准备金负债具有以下几个突出的特点。

1. *准备金负债的长期性*。一般企业的负债期限都比较短，通常在一年以内支付，如应付账款等，而保险企业的准备金负债一般期限较长，有的甚至长达二三十年，因此准备金负债一般应考虑时间价值，即利息因素。在准备金的评估过程中，评估利率是一个重要的假设。

2. *准备金负债金额的不确定性*。一般企业的负债，通常都有确定的金额和大致确定的支付期限。但由于保险事故发生的时间和事故的严重程度是不确定的，准备金负债只能依赖大数法则和一定的模型进行预测。这些计算所依赖的假设和模型就是我们通常所说的死亡率、疾病发生率和生存模型等。对那些确定的保险负债，如已确定理赔金额的赔案，由于金额确定，我们仍可以采用传统的会计方法记录，例如，计提应付赔付款等。

3. *准备金负债履行方式的多样性*。一般企业的负债的履行方式是单一的，如偿还贷款、支付货款等，但保险企业准备金负债的履行方式存在多样性，除支付赔款、生存金等保险金支付方式外，还可能是客户退保支付退保金。因此在计算准备金时，要考虑多种履行方式下准备金的可能数额。考虑到准备金负债履行方式的多样性，在准备金的计算规定中通常要求准备金不得小于在评估日客户退保的现金价值。在美国的法定准备金评估规定中，对那些含有保证利益和持续奖励的年金产品，甚至要求准备金不能低于未来任一时刻退保金的现值。

随着精算技术的发展和新的产品形态的出现，已经很难对准备金进行简单的数理上的定义，大致来讲，保险准备金是指保险人为保证其如约履行保险赔偿或给付义务，根据监管部门有关规定和方法，从保费收入或盈余中提取的与其所承担的保险责任相对应的一定数量的基金，是保险合同履行过程中所形成的负债。

17.1.2 财务报表中的准备金

在保险公司资产负债表中，准备金体现为负债；在保险公司的损益表中，准备金的增长即提取保险责任准备金体现为支出。从本质上讲，准备金是使用精算技术度量的一类会计科目，是一个财务概念。下面通过一个具体的例子说明准备金评估在寿险公司财务中的影响。

1. 损益表中的准备金负债。表 17－1 是某大型寿险公司 2007 年的损益表。

表 17－1　某大型寿险公司 2007 年的损益表

中国××人寿保险股份有限公司	
科　目	2007 年（单位：万元）
一、营业收入	133 909.90
保险业务收入	79 177.50
其中：分保费收入	0
减：分出保费	709.20
提取未到期责任准备金	330.96
投资收益	48 490.42
公允价值变动收益	6 375.30
汇兑收益	－510.07
其他业务收入	1 416.91
二、营业支出	126 308.21
退保金	13 331.89
赔付支出	16 082.69
减：摊回赔付支出	530.82
提取保险责任准备金	76 206.85
减：摊回保险责任准备金	2.17
保单红利支出	3 514.29
分保费用	0
营业税金及附加	1 800.15
手续费及佣金支出	9 001.86
业务及管理费	6 782.23
减：摊回分保费用	174.28
其他业务成本	301.99
资产减值损失	－6.47
三、营业利润	7 601.69
加：营业外收入	100.71
减：营业外支出	102.12
四、利润总额	7 600.28
减：所得税费用	－390.93
五、净利润	7 991.21

注：引自 2008 年《中国保险统计年鉴》。

从表17－1我们可以看到，当期的支出项目中，提取保险责任准备金科目占支出项目总和的60%，占当年收入总额的57%，是当年营业利润总额的将近10倍。因此不难理解即使准备金计算方法的很小的调整，导致的差异也会对保险公司的利润额带来非常大的影响。为了防止保险公司对利润的操纵，大部分市场的监管部门一般会规定准备金的统一的计算方法，即使在某些市场，允许保险公司在选择准备金计算假设时可以部分采用自己公司的经验，监管部门也通常会要求必须披露假设的设定依据，以及在调整假设时要披露假设调整带来的损益变化。

2. **资产负债表中的准备金负债**。表17－2是某大型寿险公司2007年的资产负债表中的负债和所有者权益。共有四个与准备金相关的科目，按2006年开始实施的新会计准则的规定，未到期责任准备金是指保险公司为尚未终止的非寿险保险责任提取的准备金；未决赔款准备金是指保险公司为非寿险保险事故已发生尚未结案的赔案提取的准备金；寿险责任准备金是指保险公司为尚未终止的寿险保险责任提取的准备金；长期健康险责任准备金是指保险公司为尚未终止的长期健康保险责任提取的准备金。

表17－2　某大型寿险公司2007年资产负债表中的负债与所有者权益

中国××人寿保险股份有限公司	
科　目	2007年（单位：万元）
负债	
拆人资金	0
交易性金融负债	0
衍生金融负债	0
卖出回购金融资产款	1 824.43
预售保费	1 981.43
应收手续费及佣金	997.80
应付分保账款	229.91
应付职工薪酬	1 412.46
应缴税费	523.82
应付赔付款	4 518.06
应付保户红利	7 005.94
保户储金及投资款	5 039.13
未到期责任准备金	2 346.75
未决赔款准备金	755.78
寿险责任准备金	320 259.77
长期健康险责任准备金	37 213.31
长期借款	0

续表

中国××人寿保险股份有限公司	
科　　目	2007 年（单位：万元）
应付债券	0
独立账户负债	0
递延所得税负债	3 390.05
其他负债	1 722.77
负债合计	389 221.41
所有者权益	
实收资本	3 800.00
资本公积	14 829.45
减：库存股	0
盈余公积	2 348.71
一般风险准备金	799.41
未分配利润	7 661.19
少数股东权益	10.58
所有者权益合计	29 449.34
负债和所有者权益合计	418 670.75

该公司各项保险准备金负债占资产的比例约为 86%，为所有者权益的 12.24 倍，寿险公司是一个典型的财务杠杆比例很高的行业。寿险公司的这一特点对监管带来的影响将在偿付能力一章中进行更深入的讨论。

17.1.3　不同类型的准备金

由于前述准备金负债的三个特点，使得在准备金度量上存在一定的主观性。在实践中，不同的财务报表使用者基于自身的需要及判断，通过对准备金计算方法和假设的调整，形成不同的准备金。保险公司财务报表的使用者主要有保险业监管部门、投资者和税务部门，因此，一些国家的相关监管机构从这些需要出发，分别制定了不同的假设和模型要求，形成了基于这三类主要使用者的三类准备金，即法定责任准备金、盈余准备金和税收准备金。但由于各种原因，在一些国家和一定时期也存在不同使用者使用相同的准备金的情况。准备金评估人员根据这些假设和模型的要求，计算得到不同的准备金数值，这些意义和数值不同的准备金会在不同的财务报告中得到使用。

以下对这三类准备金进行简单的介绍和比较。

1. *法定责任准备金*。法定责任准备金的计算规则一般由各保险市场的保险监管机构制定，是基本的准备金制度，我们把按照保险监管机构制定

的规则计算的准备金称为法定责任准备金。法定责任准备金是保险监管机构为确保保险公司财务状况良好而规定的准备金数额的最小值，保险公司在提供给保险监管机构的财务报表中所提留的准备金必须高于该最小值。一般情况下，由于保险监管机构比较重视保险公司的偿付能力问题，因此在选择评估假设和评估方法时比较保守，所以就会产生较高的负债额。但由于各国情况的差异，对评估假设和方法的规定各国有所不同。例如，传统险的法定准备金评估，目前在美国采用的是保险监督官准备金评估方法（CRVM），在加拿大则采用的是加拿大资产负债方法（CALM），我国采用的则是一年定期修正法（FPT）或修正净保费评估方法（Zillmer）。

2. *盈余准备金*。在一些保险市场，证券交易监管部门要求在提供给投资者的财务报告中，准备金的数值要按一般会计准则的规定进行计算，我们把按一般会计准则计算的准备金称为盈余准备金。在一些保险市场，一般会计准则计算准备金的规定与法定责任准备金的规定差异较大，与法定准备金强调保证保险公司的偿付能力不同，盈余准备金侧重于盈余的真实性和与其他行业的可比性。

在美国，按美国证券交易委员会的规定，如果保险公司是上市公司或属于某上市公司，就需向投资者提供采用 US－GAAP 评估方法计算的准备金的财务报告。但是，有许多公司（如相互保险公司）虽然不被要求提供 GAAP 的财务报告，它们自己也测算类似 GAAP 的财务报告，用作评估公司行为的内部管理手段。这种类似 GAAP 的方法采用了 GAAP 原理并根据各公司的需要进行修正。

以美国的 GAAP 为例，可以大致说明盈余准备金在侧重于盈余的真实性和与其他行业的可比性等方面的改进。尽管美国 GAAP 准备金对于传统寿险保单的假设仍要求比较“合理和保守”，但它并不十分强调假设和方法的保守性，只是包括一些保守的因素。

另外在方法上，美国 GAAP 通过对获得费用项目的递延和提取费用准备金，使保单利润的释放与特定利润驱动因素成比例。比如对缴费期小于保险期间的传统产品，保单的利润释放基本上与有效保险金额成一定的比例关系；缴费期间与保险期间一致的传统产品，保单的利润释放则与保费收入成一定的比例关系。通过这样的修改，投资者可以采用其他行业通用的分析方法来分析保险公司的经营情况。在美国 GAAP 规则下，保险企业的利润的变化也可以通过保费收入、承保金额、期望利润边际等利润驱动因素的变化和利润边际的变化来解释，大大提高了保险行业与其他行业分析的可比性，解决了法定报表利润解释困难，普通投资者难以判断公司经营状况的问题。

与美国不同，在加拿大，由于对保险公司偿付能力的关注更多通过偿

付能力相关规定来监控，法定准备金的计算假设和方法不再偏向于保守性，因此加拿大一般会计准则准备金计算采用与法定规则同样的基础，没有专门的盈余准备金计算规定。

2009 年 12 月 30 日，我国财政部发布了《保险合同相关会计处理规定》，我国开始有了独立的盈余准备金的规则，该准备金规则采用了现金流贴现的方法，保险公司的盈余准备金包含两部分内容：一部分是合理估计准备金及风险边际，即在考虑了一定风险因素情况下保单的预期现金流的贴现值；另一部分是剩余边际准备金，即在销售保单时所隐含的未来利润。剩余边际准备金按一定的利润驱动因素在未来保单年度逐期进行摊销递减，从而达到在公司实际经营与预期一致的情况下，公司利润能按利润驱动因素的一定比例在各期释放的目的，使保险业务的利润释放更为合理。

3. 税收准备金。出于核算税收的目的，各国的税务监管部门有时会制定专门的准备金计算规则，我们把按照税务监管部门计算规则计算的准备金称为税收准备金。为防止保险公司提取过多的准备金导致其利润减少从而逃避税收，税收准备金一般不允许过高。

在美国，从 1958 年到 1984 年，税收准备金一直与实际法定准备金相关，税收准备金主要以公司的实际法定准备金为基础，只是在某些项目上进行调整（如保费不足准备金，可以在税收准备金中扣除）。1984 年，美国法律作了改变，要求使用联邦规定的税收准备金方法（FPTR）计算税收准备金。

在加拿大，税收准备金在税收规则中被特别定义为：带有退保现金价值的一年或一年半定期修正准备金。加拿大对于某个特定保单的税收准备金根据假设的不同有可能大于或小于公布的法定准备金。

在 2010 年以前，我国的税收准备金一直是以法定准备金为基础。按新的规定，2010 年以后的税收准备金将以盈余准备金为基础。

4. 不同类型准备金的简单比较。由前面介绍可见，为了达到不同的目标，对准备金进行评估的方法和假设有所不同。表 17－3 对上文介绍的几类准备金进行了简单的总结：

表 17－3　　不同类型准备金的比较

	评估目的	保守程度
法定责任准备金	保险监管机构为确保保险公司偿付能力而确定的准备金数额的最小值	最为保守，通常产生最高的负债额
盈余准备金	体现盈余的真实性，便于投资者评估保险公司的盈利情况	中性或稍微保守
税收准备金	确定税收	一般不允许过高

§17.2 法定责任准备金的评估方法

准备金的计提有很大的主观性，容易人为操纵，但法定责任准备金是保险公司偿付能力监管的基础，因此各国一般对法定准备金评估都有较严格的评估方法和评估基础的监管，法定责任准备金评估制度是各国准备金评估体系中最基本的制度。本节介绍的几种传统产品法定责任准备金的评估方法在不同时期被各个国家的保险监管部门所采用，通过对这些方法的介绍可以大致了解法定责任准备金监管的一般现状。

根据我国保监会发布的《人身保险精算规定》，法定责任准备金包括法定未到期责任准备金和法定未决赔款准备金两部分。所谓未决赔款，是指保险事故已经发生，但由于受保险赔案需要进一步调查确认理赔金额或受益人没有报案等原因而造成的没有支付的保险赔付或给付。"未决赔款准备金"分为两类：已发生已报案和已发生未报案。已发生已报案的保险事故，准备金可根据合同规定的相应赔付金额或受益人申请的赔付数额来进行提存，计算相对比较简单。对于已发生未报案的保险事故，精算师一般根据历史的经验或发展趋势预测来进行提存，并形成了几种常用的方法，如链梯法、损失率法、案均赔款法等，详细的内容可参考非寿险精算规定。

对寿险公司来说，规模更大和相对更复杂的是未到期责任准备金，它指的是保险合同没有到期的未来责任。由于非寿险业务期限一般在 1 年或 1 年以内，非寿险业务的未到期责任准备金通常采用 1/24 法或 1/365 法计算。长期寿险业务的未到期责任准备金在现有财务报表中称为寿险责任准备金；长期健康险业务的未到期责任准备金在现有财务报表中则称为长期健康险责任准备金。上述后两种准备金也曾被称为长期责任准备金，这种准备金计算的主要困难之处是未来责任的不确定性和长期性，监管的规定也主要关注这类准备金的计算，各国的差异性也较大。未到期责任准备金的基本方法有两种："未来法"和"过去法"。计算思想分别为：

未来法的基本计算公式

准备金 = 未来保险责任和费用的现值 − 未来保费的现值

过去法的基本计算公式

准备金 = 已发生保费的累积值 − 已发生保险责任和费用的累积值

下面将具体分析几种计算长期寿险业务和健康险业务未到期责任准备金的计算方法，其中均衡净保费法、修正净保费法、保单保费评估法（PPM）属于未来法；累积法属于过去法；而加拿大的资产负债法则提供了评估准备金的一个新的思路。另外，对于均衡净保费法和修正净保费法，由于不考虑费用，并假设保单销售时未来保险责任的现值等于未来评估净

保费的现值，所以无论是采用未来法还是过去法计算，在假设保持一致的情况下可以得到同样的准备金数额。上述一些计算方法在第六章已有介绍，本章只进行简单的总结和归纳。

17.2.1 均衡净保费法

这种方法是较早采用的准备金计算方法，由于这种方法可以通过换算因子简便计算，因此在计算技术不是十分发达的条件下被采用，目前已基本没有国家按该方法计算准备金。该方法对许多计算因素进行简化，不考虑保单失效和任何费用问题，计算基础为均衡评估净保费。假设每期保费中附加的费用比例相同，对于所有的保单和承保年龄，均衡评估净保费是毛保费的一个固定比例，可由下列公式给出：

$$APV(k \times GP_1, k \times GP_2, \cdots) = APV(DB_1, DB_2, \cdots) \qquad (17-1)$$

其中：APV 表示精算现值；GP_t 为第 t 个保单年度的毛保费；DB_t 为第 t 个保单年度的死亡给付。以 NP_t 表示第 t 个保单年度的净保费，那么，

$$NP_t = k \times GP_t \qquad (17-2)$$

（17－1）式是一个一般性公式，它是计算净保费的精算等价公式。如果假设保费于每期期初支付，而死亡给付发生在期末，则（17－1）式可化为：

$$\sum_{t=1} k \times GP_t \times v^{t-1} \times {}_{t-1}p_x = \sum_{t=1} DB_t \times v^t \times {}_{t-1|}q_x \qquad (17-3)$$

（17－1）式中的 GP_t 和 DB_t 可以是 t 的函数，也可以是常数，它由不同险种不同模型决定。

（17－1）式同样可以应用到定期保险中。若定期保险的保险期限为 n，则有：

$$\sum_{t=1}^{n} k \times GP_t \times {}_{t-1|1}\ddot{a}_x = \sum_{t=1}^{n} DB_t \times {}_{t-1|1}A_x \qquad (17-4)$$

同样地，（17－1）式还可应用于限期缴费的情况。若缴费期为 h 年，则：

$$\sum_{t=1}^{h} k \times GP_t \times {}_{t-1|1}\ddot{a}_x = \sum_{t=1}^{\infty} DB_t \times {}_{t-1|1}A_x \qquad (17-5)$$

在计算出均衡的评估净保费后，就可以利用准备金的未来法公式计算准备金了。

均衡净保费准备金方法计算出来的准备金数额是所有方法中最高的，主要原因是它没有考虑实际费用分布。这种方法计算出来的第一年的准备金数额远远高于其他方法计算出的结果，导致公司新业务首年亏损巨大，限制了保险公司业务的增长，因此该方法逐渐被其他方法所取代。

17.2.2 修正净保费评估法

在均衡净保费评估法中，假设每期保费中附加的费用比例是一样的，

没有考虑保险公司实际业务中所支出的各项费用在时间上的实际分布。在实际业务中，保险公司的费用分布是不均衡的，特别在新合同签订的第一年，需要大量的初始费用（如保单打印、销售推动、佣金、体检费等），这些费用常常远大于均衡净保费方法下第一年毛保费收入减均衡保费所得到的财务可用费用，导致保险公司出现大量的新业务首年亏损。但在续年的时候往往按均衡净保费法计算的财务可用费用多于实际需要的费用。所以，一些国家的保险监管部门对均衡净保费准备金的计算方法加以修正，在维持未来净保费的现值等于未来保险责任的现值的条件下，降低首年的净保费值，提高续年的净保费值，使得按该方式确定的净保费所隐含的财务可用费用与实际费用支出更为接近，降低保单新业务的首年亏损。

修正准备金也可看作是均衡净保费准备金减去尚未摊回的费用补贴（expense allowance，EA）。在单位保额下，用 β_x^{Mod} 表示修正准备金法的续年净保费，α_x^{Mod} 是修正准备金法的第一年净保费，定义费用补贴为：

$$EA = \beta_x^{Mod} - \alpha_x^{Mod} \tag{17-6}$$

那么可推出：

$$V^{Mod} = V^{NL} - EA \times \left(\frac{\ddot{a}(x+t)}{\ddot{a}(x)}\right) \tag{17-7}$$

其中：V^{Mod}为修正准备金；V^{NL}为均衡净保费准备金；$\ddot{a}(x)$是保费支付方式和期间的一般性概括的表达式，而且保费支付的数额可能是均衡的，也可能不是均衡的。

显然，（17－7）式是一个一般性公式，对于不同的险种，不同的缴费期间和方式则有不同的表达式。

对于单位保额的终身寿险，设缴费期为终身，修正责任准备金的期限等于缴费期，则有：

$$\alpha_x^{Mod} + \beta_x^{Mod} \times a_x = P_x \times \ddot{a}_x \tag{17-8}$$

$$\alpha_x^{Mod} + \beta_x^{Mod} \times (\ddot{a}_x - 1) = P_x \times \ddot{a}_x \tag{17-9}$$

变形得到：

$$EA = \beta_x^{Mod} - \alpha_x^{Mod} = (\beta_x^{Mod} - P_x)\ddot{a}_x \tag{17-10}$$

t 年末的修正责任准备金 ${}_tV_x^{Mod}$ 为：

$${}_tV_x^{Mod} = A_{x+t} - \beta_x^{Mod} \times \ddot{a}_{x+t} \text{（其中 } t \geqslant 1\text{）}$$

$$= A_{x+t} - P_x \times \ddot{a}_{x+t} - (\beta_x^{Mod} - P_x) \times \ddot{a}_{x+t} \tag{17-11}$$

将（17－10）式代入（17－11）式，得到：

$${}_tV_x^{Mod} = {}_tV_x^{NL} - (\beta_x^{Mod} - \alpha_x^{Mod}) \times \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

$$= {}_tV_x^{NL} - EA \times \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

对（17－9）式变形得到：

$$\beta_x^{Mod} = P_x + \frac{\beta_x^{Mod} - \alpha_x^{Mod}}{\ddot{a}_x} = P_x + \frac{EA}{\ddot{a}_x} \tag{17-12}$$

进而求得：

$$\alpha_x^{Mod} = \beta_x^{Mod} - EA = P_x + \frac{EA}{\ddot{a}_x} - EA = P_x - \left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_x}\right) \times EA \tag{17-13}$$

从（17－12）式很明显看出 β_x^{Mod} 大于 P_x，从（17－13）式很明显看出 α_x^{Mod} 小于 P_x，进一步验证了修正净保费评估法的原理。

对于单位保额的 n 年期两全保险，缴费期为 h 年，修正责任准备金的期限等于缴费期，读者可以类比推导出第 t 年末（$1 \leqslant t \leqslant h$）的修正准备金为：

$${}_t^hV_{x:\overline{n}|}^{Mod} = {}_t^hV_{x:\overline{n}|}^{NL} - EA \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{17-14}$$

这两种寿险的修正准备金的结果与（17－7）式的形式一致，只是在缴费期限上有不同的表达形式，因此，可以用（17－7）式的形式表达修正责任准备金在不同险种、不同缴费形式和不同修正期间的各种情况下的一般形式。

实践中，由于对于 EA 的规定不同，又形成了不同的修正准备金评估方法。下面将简要介绍常见的几种方法。

1. 一年定期修正法（FPT）。在这种方法下，第一年修正后的净保费等于一年定期寿险的净保费，而续年保费等于原保单剩余期间、相同保险类型的净保费。以终身寿险为例，在一年定期修正法下：

$$\alpha_x^{Mod} = A_{x:\overline{1}|}^{1} \tag{17-15}$$

$$\beta_x^{Mod} = P_{x+1} = \frac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} \tag{17-16}$$

费用补贴为：

$$EA = \beta_x^{Mod} - \alpha_x^{Mod} = \frac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} - A_{x:\overline{1}|}^{1} \tag{17-17}$$

显然，一年定期修正法使得责任准备金在第一年末时为0。大部分国家不允许出现负的准备金，因此一年定期修正法的费用补贴是这些国家法定准备金评估方法中费用补贴的最高限额。一年定期修正法存在的问题是：在实际业务中，虽然有些情况下首年费用超过首年保费，费用补贴不足以弥补保险业务经营过程中的首年亏损，但是对有些储蓄型险种特别是短期缴费的产品，按一年定期修正法计算的费用补贴额要超过实际发生的首年费用，可能导致过多费用补贴的问题，使得该方法在评估这些险种时不够保守。我国目前对部分传统险业务仍采用一年定期修正法计算法定责任准备金。

2. Zillmer 方法。这是由德国人 Zillmer 在 1871 年提出的一种修正净保

费评估方法。Zillmer 方法的本质也是通过降低首年评估净保费，减少首年计提责任准备金的额度以弥补高额的新保单费用，由后续年度分担首年少计提的责任准备金。

Zillmer 方法不考虑投保年龄的因素也不受缴费期间的影响，采用统一的最高费用扣除额。实际中经常假设首年费用不超过死亡给付的 3.5%，3%或 2.5%。Zillmer 方法目前还在英国和我国等国家的监管制度中被使用，香港在早期也曾采用该方法进行准备金评估。Zillmer 方法下对费用补贴额的定义略微不同：

$$\beta^{Mod} = P + \frac{\text{Zillmer}}{\ddot{a}_{x+1}}$$

$$\alpha^{Mod} = P - \text{Zillmer}$$

在 Zillmer 方法下，

$$EA = \text{Zillmer} + \frac{\text{Zillmer}}{\ddot{a}_{x+1}}$$

3. 保险监督官准备金评估方法（CRVM）。保险监督官准备金评估方法由美国保险监督官协会规定而得名，又称为最小准备金方法，是美国标准评估法（SVL）所规定的准备金评估方法。这种方法是在一年定期修正法基础上进行调整而来的，以 20 年限期缴费的终身寿险为参考。对单位保额传统险的评估，主要包括两种情况：

（1）如果某保单的一年定期修正法计算出来的续年净保费小于或等于${}_{19}P_{x+1}$时，则采用一年定期修正法。

（2）如果某保单的一年定期修正法计算出来的续年净保费大于${}_{19}P_{x+1}$时，则费用补贴的最高限为${}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|}$。

注意到${}_{19}P_{x+1}$是一年定期修正法下 20 年限期缴费的终身寿险的续年净保费。

对传统寿险保单，在第（2）种情况下，CRVM 方法下的费用补贴为：

$$EA = \beta^{Mod} - \alpha^{Mod} = {}_{19}P_{x+1} - A^{1}_{x:\overline{1}|} \tag{17-18}$$

该方法对一年定期修正法进行的调整，本质上限制了费用补贴的金额不能超过 20 年期终身寿险在一年定期修正法下所得的费用补贴额。同时该方法对一年定期修正法下储蓄型两全产品或短期缴费产品可能出现的首年费用补贴过高的问题进行了修正，使之更为合理。

17.2.3 保单保费评估法（PPM）

无论是均衡净保费评估法，还是修正净保费评估法都没有办法解决实际费用支出与评估方法所隐含的费用假设之间的差异。正如我们从上述修正准备金评估方法看到的，简单的人为的修正并不能较好地反映实际业务运行情况。例如，对费用的分布的考虑只考虑了首年较高的获得费用，但

实际业务中与保单有关的费用并不只是首年较高，在第二年也存在较高的续期佣金的因素，另外对首年较高的获得费用假设只能采用一个简单的计算规则，不能反映不同类型保单的差异，如定期险与两全险的差异。

1992 年加拿大开始实施称为“保单保费评估法”（简称 PPM）的准备金评估方法，该方法对与保单相关的预期现金流贴现计算责任准备金，不同于上述的净保费评估方法。这种方法使用的评估保费是未来收取的毛保费，支出还包含了与保单相关的各项费用以及退保金。与净保费评估方法相比，PPM 方法更合理地反映了与保单相关的收入和支出，没有进行简化考虑。简单来讲，该方法下准备金的数值为所有费用及支出的贴现值减去未来保费收入的贴现值。由于该方法是基于现金流预测的方法，无法采用一套换算因子简单计算，因此该评估方法能够采用也得益于计算技术的提高。

除了在计算方法上与净保费评估法有很大的差别外，在假设的设定上，监管部门也不再规定统一的计算假设，而是要求评估精算师必须对可能影响保单负债的各个可能事件给出明确的假设，每个假设都包含着偶然事件的最佳期望和不利偏差准备（Provision for Adverse Deviation，简称 PAD），不利偏差准备的设定要体现适当谨慎的原则。关于假设的设定方法在下一节中做更详细的介绍。

同时，这种方法还消除了净保费方法中的一些不符合 GAAP 要求的问题，包括：

（1）因为期望未来评估保费不要超过毛保费而导致的超额储备；（2）由于在超过缴费期后没有保费收入而忽视未来费用所导致的不足额储备；（3）修正方法中人为的最高限额。这些改变使得该方法也可作为一种较好的盈余准备金的评估方法。

为了更好的了解 PPM 方法的实施细则，下面给出一个例子。

假设某终身寿险，保险金额为 1 000 元，其费用分布如表 17－4 所示。

表 17－4　　　　未来费用分配比例

分　类	第 1 年			续年			
	每份保单	每 1 000 元保额	保费百分比	每份保单	每 1 000 元保额	保费百分比 2－9	保费百分比 10 以上
1. 新契约费	30	5	80%			10%	5%
2. 维持费	2	0.25		2	0.25		
3. 营业费用	4	0.25	2%	4	0.25	2%	2%
合计（1，2，3）	36	5.5	82%	6	0.5	12%	7%
4. 给付费用	每份保单 18 元，加上每 1 000 元保额 2 元						

试根据 PPM 计算责任准备金的表达式。

解： 根据题意，其毛保费用 G 表示，则有：

$$G \cdot \ddot{a}_x = 1\,020A_x + [(41.5 + 82\% \cdot G) + 6.5a_x + 12\% \cdot G \cdot a_{x:\overline{8}|} + 70\% \cdot G \cdot {}_{9|}\ddot{a}_x]$$

所以

$$G = \frac{1\,020A_x + 41.5 + 6.5a_x}{\ddot{a}_x - 0.82 - 0.12 \cdot a_{x:\overline{8}|} - 0.07 \cdot {}_{9|}\ddot{a}_x}$$

则 PPM 方法下计算的责任准备金为：

$1 \leqslant t < 9$ 时，

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= 1\,020A_{x+t} + 6.5\ddot{a}_{x+t} + 0.12G \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{9-t}|} + 0.07G \cdot {}_{9-t|}\ddot{a}_{x+t} - G \cdot \ddot{a}_{x+t} \\ &= 1\,020A_{x+t} + 6.5\ddot{a}_{x+t} + 0.07G \cdot \ddot{a}_{x+t} + 0.05G \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{9-t}|} - G\ddot{a}_{x+t} \end{aligned}$$

$t \geqslant 9$ 时，

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= 1\,020A_{x+t} + 6.5\ddot{a}_{x+t} + 0.07G \cdot \ddot{a}_{x+t} - G \cdot \ddot{a}_{x+t} \\ &= 1\,020A_{x+t} + (6.5 - 0.93G)\ddot{a}_{x+t} \end{aligned}$$

17.2.4　累积法

随着万能险、投资连接险等账户型产品的出现，传统的净保费评估方法遇到了困难，一方面未来保费收入以及保险利益都有不确定性，另一方面客户的退保金额不再是预先确定好的现金价值而是依赖于实际运作的账户价值。传统的净保费评估方法在处理上述两个差异时较为困难。

对这种账户型产品，各国在处理上出现了两种思路：一种以美国为代表，仍然坚持按传统的方法，对未来的保费收入和支出进行预测，并按一定的规则进行计算，该方法将在下一章准备金评估的方法中进行详细介绍；另一种方法就是累积法，目前我国对这类账户型产品的法定准备金监管采用的就是该方法。

在累积法下，这类账户型产品的准备金一般包含两部分：一部分是账户价值准备金即保单的账户价值，是已赚保费收入及结算投资收益扣除各项费用后的累积值；另一部分是非账户价值准备金。当保单中承诺的未来的利益不能完全通过未来的保单运行获得足额支持时，所额外准备的储备就是非账户价值准备金。这些利益的产生主要包括：（1）万能产品保证的结算利率超过准备金评估允许的最大评估利率；（2）保证的未来保险成本低于按评估死亡率所计算的死亡成本；（3）保证的未来保险利益超过评估日时的账户价值基于合理假设的预测结果；（4）合同约定的收费不足以支持未来的实际的维护费用；（5）各种持续奖励。在各国具体的规定中可能只要求对部分因素进行考虑。我国法定准备金评估标准对万能险和投连险采用该方法。

在部分国家，也存在允许通过体现未来的保单盈余而减少准备金的情

况。可以在产品设计时考虑用收取退保费用来补偿保单初始费用，特别是对保单初期退保的保单。当这类保单满足以下条件时：（1）收取退保费用；（2）保证利率低于最大评估利率；（3）有充足的承保成本，就允许用未来的保险成本的边际盈余来摊销初始费用，减少准备金。因此，法定准备金可以表示为：

法定准备金 = 账户价值 − 未来利息和保险成本的边际现值

但是，为了避免创造初期利润，后面一项不应超过实际的最大初始费用。

17.2.5　加拿大资产负债方法（CALM）

在“加拿大资产负债方法”下，精算师将决定负债评估日所需资产的数量，使得在整个预测期期末（最后一笔负债现金流已支付）时的资产和负债现金流的累积盈余为零，那么最后在负债评估日的负债即为对应的支持保险责任履行的资产账面价值。

在用“加拿大资产负债方法”进行准备金评估时，须遵循一系列的原则，在此仅列举其中的几项主要原则：

持续经营假设。准备金的评估是基于公司将持续经营这一假设下进行的。精算师对将来的经验作出的最优估计假设，如费用假设等，也将基于这一基础。

资产和负债的相互依赖性。负债的评估将直接体现公司资产和负债的匹配程度。

基于一组保单。在“加拿大资产负债方法”下，准备金评估将以一组保单为基础，这与传统的为每一张保单单独计算准备金的其他准备金评估方法明显不同。

充足但不过多。虽然精算师在最优估计假设的基础上增加一些保守估计，即对不利偏差的准备，但在确保公司将来足够支付客户保险利益的前提下，也不应该使公司提存过多的准备金。这也是因为该评估方法在考虑公司偿付能力的前提下，还要兼顾公司的损益表，合理反映公司的经营状况。

投保人的合理期望。在“加拿大资产负债方法”下，公司的精算师应对投保人对保险单利益的合理期望作出估计，并最终体现在准备金的评估值中。一个最明显的例子就是分红保险。精算师应根据公司已往的分红历史、公司与投保人之间的关于该保单项下的利益演示或交流等，来确定在未来的负债现金流中应体现的分红水平。当然，股东的分红不应该作为负债现金流的一部分。

“加拿大资产负债方法”是一个适用于所有业务的统一的方法：如传

统寿险、万能寿险、年金计划、财产险、意外险等。准备金评估过程包括如下四个步骤：

第一步：建立最优估计假设。在这一步中，精算师将对投资收入、死亡率、发病率、退保率、费用率以及与这些假设相一致的其他保单项目或现金流金额等，根据已往或目前经验对未来建立最优估计假设。不同资产类型、资产等级及投资期限的各投资项目投资收入的最优估计假设即为评估日当日市场上的实际情况。其他的最优估计假设，如死亡率、发病率、退保率和费用率等，都由精算师决定，加拿大精算师协会并没有对任何假设作出过任何具体的限制。

第二步：除利率外的所有假设加入不利偏差准备。在第一步中除投资收入假设外，在每一个最优估计假设的基础上，增加对不利偏差的准备。这里有两点必须引起注意：

一是不同假设的不利偏差准备的增加，有可能产生相互影响，例如，在退保率和死亡率之间；二是有些假设将依赖于利率的假设水平（下述第三步中对此加以阐述）。

第三步：增加对利率的不利偏差准备。在这一步中，精算师在第二步中所确定的不利偏差准备的基础上，在不同的假设利率环境下进行测试。不同的假设利率环境将影响客户选择权的行使及公司的投资策略。在每一假设利率环境下，精算师都将确定评估日的资产价值，使得在预测期末的资产和负债现金流的累积盈余为零。最后，精算师将根据对不同假设利率环境的测试，确定对利率假设的不利偏差准备。如采用的是由精算师选定的假设利率环境，则最终的准备金为所有假设利率环境下产生的较大准备金，也是在规定的几种假设利率环境下所产生的最大的准备金。如采用的是在随机条件下产生的假设利率环境，则最终的准备金为在所有假设利率环境下所产生的准备金的期望值加上一倍的标准差。

第四步：由于保单持有人风险转移机制而进行调整。某些保险产品的设计允许保险公司将该产品出现的一些不利经验转移给保单持有人。精算师在确定相关假设时应考虑保险公司在转移不利经验时有可能受到的限制，如保单持有人的合理期望等。

最终的准备金即为按照上述步骤确定的准备金。

§17.3 评估基础的选择

在评估方法确定的情况下，准备金评估中各个因素的假设将完全决定最终的评估结果，这些假设是精算评估的基础。如同评估方法的选用由评估目的决定一样，评估基础的选择在一定程度上表现了评估者对准备金评

估结果使用目的上的倾向。因为法定责任准备金评估的主要目的是为监管服务，强调审慎的原则，这些原则在评估基础的选择中也就自然会有所体现。本节对责任准备金评估基础中最基本的两个假设：评估死亡率和评估利率进行讨论。

17.3.1　评估死亡率的选择

1. *死亡率对准备金评估的影响*。在实务中，要想简单地通过观察死亡率来判断两张生命表中哪一张会导致给定年龄或期间的准备金更大往往是不可能的。死亡率的变化不仅影响着某一给定年龄的死亡人数，而且影响着下一年的生存人数。在均衡净保费方法下，死亡率变化的影响在某种程度上分布于整个缴费期。死亡率变化的影响在年龄与年龄之间和期间与期间之间是不一致的，所以，在任意特定的年龄和期间，死亡率的变化可能使准备金上升，也可能使准备金下降。分析死亡率变化的影响最简单的方法就是选择具有代表性的保单和签单年龄，针对两套不同的死亡率计算准备金。如果不进行实际计算，确定死亡率假设的变化对准备金的影响就是一个复杂的数学问题。表 17－5 给出了利率不变时，不同生命表假设下准备金数额的变化。

表 17－5　　　　不同生命表假设下的责任准备金

保单年度	普通寿险				保单年度	到 65 岁的两全保险			
	1958 CSO	1980 CSO	中国经验生命表 1990－1993	中国经验生命表 2000－2003		1958 CSO	1980 CSO	中国经验生命表 1990－1993	中国经验生命表 2000－2003
1	11.01	10.06	9.15	7.93	1	16.71	16.51	16.24	15.99
10	125.57	117.6	106.90	94.11	10	199.86	200.48	197.63	196.50
20	283.07	269.83	249.19	223.08	20	497.23	502.04	500.21	501.4
30	459.52	443.84	420.57	383.05	30	1 000	1 000	1 000	1 000
50	769.48	750.08	749.22	712.34					
60	872.51	869.15	868.32	827.35					

此表是 35 岁男性购买的普通终身寿险和 30 年期两全保险，当保额为 1 000 元，利率为 5% 时根据不同生命表在不同时点的均衡净保费责任准备金。

每个国家关于评估标准的法律都详细规定了寿险保单最低评估标准应使用的生命表。这些生命表最早只规定了最高年龄并按性别分类，但随着人寿保险业的发展，准备金评估对生命表的要求更加具体，除了按性别分类外还按吸烟与否等其他因素分别制定生命表，不同类别的保险也要求使用不同类型的生命表。

我国在 1997 年 4 月 1 日正式颁布了中国寿险业经验生命表后，不仅要求各保险公司必须按照新的生命表定价，同时要求各寿险公司必须按照新的生命表评估责任准备金。

中国保监会 1999 年发布的《人寿保险的精算规定》中规定，终身年金以外的人寿保险采用险种报备时厘定保费时所使用的经验生命表；终身年金保险采用按下面两种方式调整后的中国寿险业经验生命表中的年金保险经验生命表，分别计算未到期责任准备金。（1）80% ×年金保险经验生命表；（2）120% ×年金保险经验生命表。

2005 年 12 月 22 日，中国保监会颁布了《中国保险业经验生命表(2000—2003)》，简称 CL(2000—2003)，包含四张分表，分别为：非养老金业务男表，简称 CL1(2000—2003)；非养老金业务女表，简称 CL2(2000—2003)；养老金业务男表，简称 CL3(2000—2003)；养老金业务女表，简称 CL4(2000—2003)。

同时，在《关于修订精算规定中生命表使用有关事项的通知》（保监发［2005］118 号）中要求，自 2006 年 1 月 1 日起，保险公司进行法定准备金评估时，必须采用 CL(2000—2003)。

2. 美国 NAIC 颁布的《标准评估法》（SVL）对生命表选择的规定。在 1980 年 SVL 修订以前，寿险保单评估死亡率最低标准是以到达年龄生命表来表示，由于没有分性别的生命表，常采用年龄倒退来反映不同性别死亡率的不同，例如，评估 1977 年以前签发的女性保单时允许 3 年的年龄倒退，评估 1977 年以后签发的保单时倒退时间为 6 年，但这只是一种简化，不能反映真实的情况。1980 年 SVL 修订以后规定，对不同性别的寿险保单要采用相应性别的评估生命表，但对采用混合生命表定价的保单，美国有些州仍允许采用男女混合生命表进行评估。1980 年后强调要采用分性别生命表进行评估的主要原因包括：女性保单的增多、能够得到比较可靠的经验数据以及保单的增多使得合理进行女性保单的评估显得更加重要。

《标准评估法》实施后，生命表的种类增多了，在许多州，对于寿险产品，评估精算师可以选择的生命表包括：（1）通常的 1980 CSO 生命表，包括男表和女表；（2）按性别和吸烟与否分类的 1980 CSO 生命表；（3）1980 CSO 男女混合生命表；（4）按吸烟与不吸烟分类的 1980 CSO 男女混合生命表。

另外，上述生命表都包含分别按最后年龄和最近年龄[①]计算的生命表，而且所有的生命表都可以采用 10 年或 15 年的选择期因素进行修订。

---

① 最后年龄、最近年龄是指在进行生命表制定时，对非整数年龄近似处理得到的。

17.3.2 评估利率的选择

1. 评估利率对准备金的影响。表 17－6 给出了在死亡率不变情况下利率对责任准备金的影响。

表 17－6 不同利率假设下的责任准备金

期 间	利 率		
	4%	5%	6%
1	9.74	7.93	6.49
10	11.63	94.11	79.57
20	254.60	223.08	195.71
30	421.62	383.05	348.07
50	741.57	712.34	683.84
60	847.27	827.35	807.44

表 17－6 是根据 35 岁男性购买的 1 000 元的终身寿险，当生命表选择中国 1990－1993 年经验生命表时不同利率标准下的准备金数额。

2. 美国法定责任准备金评估利率的确定方式。评估利率的高低直接与保险公司的投资收益能力相关。1947 年到 1974 年之间，由于当时各寿险公司的投资净收益很低，大多数州都采用 3.5% 的最低标准评估利率（即利率的最高投资限额），且对于所有的寿险和年金业务都采用相同的利率指标。

由于评估利率对准备金数额的影响是极其显著的，监管部门对评估利率的限制比对定价利率的限制要更加严格。随着六七十年代美国市场利率水平的提高，面对其他金融机构的竞争压力，尽管保险公司不能将这种高投资回报反映在负债计算中，但却可以在投资收益率水平允许的前提下将其反映在定价过程中。较高定价利率使寿险产品的价格下降，使得年缴保费的寿险和年金产品的实际资产不符合负债评估的要求而被要求一定的保费不足准备金；对于趸缴保费的寿险产品，其销售价格往往低于评估准备金时所需要的费率水平。

为了解决这个问题，NAIC 对评估利率的要求有了新的变化：为高投资回报的产品规定了更加自由的评估利率。值得注意的是，这种评估利率的变化对于不同类型产品的投资风险影响不同，特别是对年金的影响更为严重。例如，团体年金和趸缴保费即期年金的最高评估利率上升到了 6%，但是寿险保单和延期年金的最高评估利率仅上升到了 4%。而在此之前，NAIC 对所有业务最高评估利率的规定都是一致的。NAIC 对保险公司评估利率的限制随投资回报率的波动作适当的调整，但这种调整具有一定的稳定性。

1976 年 12 月，NAIC 进一步修订了标准评估法（SVL），采用了更高的

评估利率，从而寿险保单的最高评估利率上升到了4.5%。1980年修订时调整到了3.5%，与40年代到70年代的评估利率水平相一致。

SVL1980年修订内容包括采用动态最大评估利率，它是穆迪投资服务公司发表的季节性企业债券复合收益率月平均值（Monthly Average of the Composite Yield on Seasoned Corporate Bonds）的函数。从而，寿险保单的评估利率随保单保证期的长短而变化，寿险保单的保证期是保持保单有效的最大年数，它或者以保单的保证为基础，或者以原始保单保证的复效选择权或不丧失价值选择权为基础，或者同时以两者为基础。评估利率根据保证期分别为10年期以下、10年期、11年到20年期、20年期以上分别规定，保证期限越长，评估利率就越低。

SVL1990年修订继续沿用了1980年修订时采用的动态最大评估利率，对《标准不丧失价值法案》5C部分生效之后签发保单的法定会计年度评估、1990年修订生效后购买的个人年金和生存保险、团体年金和生存保险以及保证利率保险增长数额的评估有相关的具体规定。[①]

美国采用动态评估利率方法的主要原因是美国市场投资收益率的变化和主要保险公司投资资产债券收益率的变化，图17－1列示了过去几十年来美国市场10年期国债到期收益率的变化，美国准备金评估制度动态评估利率方法的实施主要是适应利率波动加大的结果。

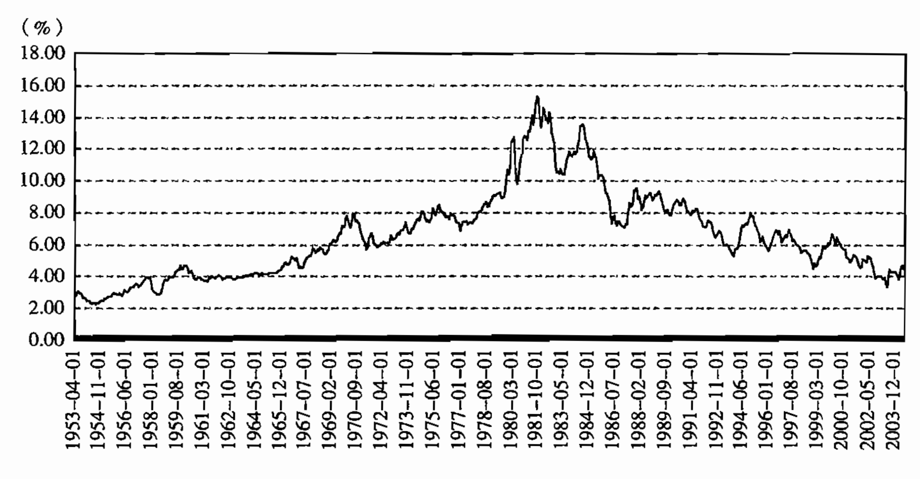


图17－1　美国10年期国债到期收益率

3. *加拿大不同阶段对评估利率的确定方式。*

（1）1978年之前，净保费评估方法是当时的法定评估方法。这种方法下，精算师仅被允许决定死亡率和利率假设，监管机构限制了最高的利率

① 此规定内容是美国NAIC1990年修订的标准评估法案（Model 820：the Standard Valuation Standard）中的相关规定。

假设。

（2）1978 年到 1991 年的“加拿大方法 Can78”阶段。保险法的变化确定了由公司董事会任命的评估精算师对准备金评估的责任。最大利率的限制被取消了，只要评估假设考虑了“适当的环境”并被监管部门认可，评估精算师就可以使用其认为合适的任何假设，评估利率的设定依赖于评估精算师的合理判断。

为保证评估精算师所选择的评估假设是合理的，1979 年 6 月，加拿大精算师学会颁布了“关于寿险公司财务报告的建议”来调控适当的评估假设的确定及其他事务，评估精算师在选择评估利率时也同样应遵循该建议所列举的原则，基本的思路是精算师可以根据自己的判断选择评估利率，但在选择评估利率时应根据对利率波动风险的估计在当前观测到的利率水平上附加一定的风险因素。

（3）1992 年“保单保费评估法”（PPM）阶段。在该阶段，加拿大评估利率选择的方法和原则没有实质的变化，主要依赖于精算师的判断和技术规范的指引。但加拿大精算师协会根据不同的产品类型完善了评估假设的选择制度，制订了不同的基于“毛保费”的评估技术标准（Valuation Technique Papers，VTP）作为精算师选择假设的参考，同时更明确提出了制定假设时要考虑合理保守的不利偏差准备（Provision for Adverse Deviations，PAD）的概念。

（4）2001 年“加拿大资产负债方法”阶段。加拿大资产负债方法不再需要设定贴现率，而是要假设资产的投资收益率及其他投资收益率。不同资产类型、资产等级、及投资期限的各投资项目投资收入的最优估计假设即为评估日市场上的实际情况。在 CALM 方法中，投资收益率的假设与公司所持有的资产更加紧密，解决了预测负债所用利率与资产价值所隐含的利率不一致的问题。

加拿大评估利率的规定经历了一个由监管部门统一规定到由各公司自由决定，再到与各公司资产收益率匹配的过程，较好地解决了资产价值评估与负债价值评估脱节的问题。

4. *我国评估利率的确定方式*。1998 年，我国开始试行会计年度末责任准备金报告制度，1999 年正式实施。在 1999 年保监会发布的《中国保险监督管理委员会关于下发有关精算规定的通知》（保监发［1999］90 号）中规定，评估利息率不得高于下面两项规定的最低值：（1）中国保监会每年公布的未到期责任准备金评估利息率；（2）该险种厘定保险费所使用的预定利息率。

从 2000 年开始，保监会每年末下发关于对各寿险公司人身保险责任准备金评估要求的通知，其中规定：一年期以上传统寿险和健康保险未到期

责任准备金的评估利率不得高于保单预定利率，并不得超过年复利7.5%。

相对来说，我国保险业复业时间较短，法定准备金评估方法及假设规定的变动较少。

17.3.3 评估基础的适用方式

从上述讨论我们知道，各国的评估标准随着时间的推移和外部环境的变化都会有所调整，从而引起了准备金计算假设的适用问题，计算假设的适用方式对准备金数值的影响也非常巨大。有些国家在颁布新的评估标准后，只要求新签发的业务按照新的标准进行评估，有效的以往业务按销售当时的评估标准进行评估。也有一些国家要求评估标准修订后，所有的有效保单都采用新的标准进行评估。下面以美国、加拿大和我国为例，介绍在评估基础的适用方式上可能存在的一些做法。

1. *美国评估基础的适用方式*。每张保单的评估基础在签发保单时就固定下来，并且在整个保险期间内保持不变。每次评估基础的改动只会对未来签发的保单产生影响，而不会影响已经签发生效的保单，因此在一个评估时点，不同时期生效的保单会采用不同的评估利率。

2. *加拿大评估基础的适用方式*。每次评估标准修改之后，新的评估标准将完全替代以前的评估标准适用于准备金评估。也就是说，新的评估标准适用于所有有效保单，而不只是未来签发的新保单。

3. *我国评估基础的适用方式*。我国自从1999年正式实施会计年度末责任准备金报告制度以来，只在2006年推行新的生命表时，对评估死亡率的标准进行了修订，根据《关于修订精算规定中生命表使用有关事项的通知》的要求，从2006年1月1日开始，所有有效业务准备金的评估死亡率采用《中国寿险业生命表2000—2003》，评估利率仍按原规定执行。从这些规定来看，我国在评估死亡率的使用上采用了新规则适用于所有业务的方法。但由于原有的评估利率规定中，评估利率采用产品定价当时的利率并不得高于7.5%，评估利率可以说与定价时一致并锁定，不同时期的业务采用不同的利率进行评估。

关于准备金评估利率适应方式的意义，我们可以与资产的价值评估进行对应理解。大致来讲，资产的市场价值反映的是当前市场利率水平下的价值，账面价值反映的是资产在购入时的市场利率水平下的价值。对应地，我们可以理解准备金按承保当时的评估利率评估时，由于评估利率取决于当时的利率水平，此时的准备金的价值为承保当时市场利率水平下的负债价值，类似于历史成本的方法；当所有有效业务采用评估日当时的评估利率评估时，可以理解为准备金负债为评估日当时市场利率水平下的负债价值，类似于市场价值的方法。

财务制度对资产价值的计量正经历从历史成本法[①]向公允价值法[②]的过渡，目前仍处于过渡阶段。按我国目前最新的会计准则规定，金融资产根据其分类的不同可能采用不同的记账方式：对持有到期的金融资产按历史成本（账面价值）记账；交易性金融资产按公允价值记账；可供出售类金融资产在资产负债表中按公允价值记账，但其公允价值的变动不体现在损益表中。因此从目前的情况来看，很难统一资产和负债的价值评估方法，对负债的评估假设的适用方法也会不尽相同。值得关注的是，加拿大资产负债评估法，由于采用现金流预测的方式，很好地解决了资产评估方式和负债评估方式不一致的问题，提供了一个可以尝试的解决途径。理解资产与负债评估方式的差异对我们认识寿险公司的资产负债表有重要意义，这种重要性随着资产种类的增多和市场波动加剧而增强，在过去稳定的利率环境下，这种区分不是非常重要。资本市场的发展和波动的加剧所带来的资产和负债价值评估的复杂性，是驱动负债评估方法发展和偿付能力制度发展的重要因素。

§17.4 准备金方法在实务中的应用

本章第二节讨论了各种准备金计算方法，所得到的大多是保单年度末的责任准备金。在实务中，财务报表所需要的准备金是保单在评估日的准备金即会计结算日的准备金。由于保单销售可能发生在一年中任意时间，因此在会计结算日时，所要评估的保单绝大部分都不在某一保单年度末，而是在两个保单年度之间，因此在计算得到保单年度末准备金后还需要进行相应的调整，得到评估日的准备金。本节讨论在实务中处理这类问题的方法。

17.4.1 平均与期中准备金

1. 平均准备金。假设保险公司在每年的年末，即 12 月 31 日对保单进行评估。如果某均衡期缴终身寿险保单是在某年的 1 日 1 日购买的，那么准备金负债是 t 年末的责任准备金，其中 t 根据承保年和评估年计算得到。对单位保额保单，在 t 年的期末责任准备金为：

$$ {}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \qquad (17-19)$$

如果该保单是在某年的 12 月 31 日购买的，那么准备金应是 t 年初的责

① 资产评估的历史成本法指以资产购买时的价值作为记录资产价值的基础以及计算资产收益的评估方法。

② 资产评估的公允价值法指资产按照在公平交易中，熟悉情况的交易双方自愿进行资产交换或者债务清偿的金额计量。

任准备金，t 年的期初责任准备金等于 $t-1$ 年期末责任准备金与保费之和：

$$ {}_{t-1}V_x + P_x \tag{17-20}$$

一般保单是在每年中的某时点签发的。假设某保单的签发时点到该年初的时间与整年相比的比例为 h，则线性插值平均准备金定义为

$$h \cdot ({}_{t-1}V_x + P_x) + (1-h) \cdot {}_tV_x \tag{17-21}$$

（17－21）式是一个常用的将准备金由保单年度末调整为会计评估日的方法。

为了简化计算且容易检查，许多保险公司假设所有的保单在一年中是均匀销售的，即所有保单平均是在评估日前 6 个月签发的。保险公司对在该年内签发的一组相似保单的准备金计算时可采用近似的方法，即用该组保单的总保额乘以该年度平均准备金因子，平均准备金因子是期初准备金和期末准备金的平均值。用${}_tMV_x$ 表示第 t 年的平均准备金，则有

$${}_tMV_x = \frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x + P_x) = \frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{2}P_x \tag{17-22}$$

一般的评估日期都是每年的 12 月 31 日，但也不排除在其他日期评估的可能性，但以上评估原理同样可以应用。例如，假设评估日期为 6 月 30 日，则第 t 年平均准备金因子${}_tMV_x$ 可以应用于那些在 t 年前的 7 月 1 日到转年 6 月 30 日签发的所有保单。

2. 延期保费。进行评估的保单可能包含各种各样的保费支付方式，如年缴、季缴或月缴。这样，首先应该对年缴保费方式的保单给出评估方法，然后再对其他缴费形式的保单分别给出相应的方法。为了简化计算过程，保险公司往往对于所有年缴保费保单采用上面介绍的方法，然后再对其他缴费方式的保单进行调整。

应用${}_tMV_x$ 方法时，首先假设所有在保单年度 t 缴纳的保费都是在期初发生。实际上，对于月缴保费的保单，平均准备金因子因在保单年度 t 尚未缴纳的保费量而有所偏大。延期保费是在评估日后但在下一个保单年度前缴纳的保费，它或者作为资产，或者作为负债，用来调整准备金。在保单年度初支付的年缴净保费基础上计算的平均准备金，超过月缴保费基础上计算的准备金。在实务中，经常通过保单保费支付的详细记录确定延期保费，即对于每份保单，根据尚未收取保费的准确值建立延期保费。因为平均准备金使用的是净保费，因此延期保费也必须是净保费。实际上，延期保费也可以近似计算出来，假设每年的缴费次数为 m，且保单签发在整年中均匀分布，那么平均延期保费为

$$\frac{m-1}{2m}P_x \tag{17-23}$$

净负债为平均准备金减去延期保费，即

$$\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{2}P_x - \frac{m-1}{2m}P_x = \frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{2m}P_x \quad (17-24)$$

当月缴保费时，即 $m=12$，（17－24）式为

$$\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{24}P_x$$

当季缴保费时，即 $m=4$，（17－24）式为

$$\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) + \frac{1}{8}P_x$$

3. 期中准备金。对于延期保费，有些保险公司不采用平均准备金方法，而采取另外的方法。假设评估日为第 z 年的 12 月 31 日，如果某保单是在 $z-t+1$ 年签发的，其签发日到签发年初的时间与全年的比例为 h，那么插值期末准备金可定义为：

$$h \cdot {}_{t-1}V_x + (1-h) \cdot {}_tV_x \quad (17-25)$$

应用此方法时，保险公司都假设所有保单都是在评估前 6 个月签发的，$h=1/2$。由（17－25）式定义期中准备金，即得

$$\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x + {}_tV_x) \quad (17-26)$$

（17－26）式显然不同于（17－22）式。在实务中，对于一般业务通常采用平均准备金因子方法，而对于周缴保费业务或长期的残疾保险则采用期中准备金因子的方法，同时，有些保险公司对一般（普通）业务也采用期中准备金方法。除非保费缴费频率很快（如周缴）期中准备金方法计算的准备金没有充分说明准备金负债的状况，比较（17－26）式和（17－22）式，平均准备金比期中准备金大 $P_x/2$。为了抵消这种不充分，一般建立未到期保费负债作为一种调整。在实务中，未到期保费负债可以按毛保费计算，也可以按净保费计算，一般情况下，保险公司在净保费的基础上计算未到期保费负债。

对于每份有效保单，其保费总额的一半即是未到期保费负债的数额。理论上讲，如果保单的销售是均匀分布，则用平均准备金计算的净负债总额（平均准备金减去延期保费）等于用期中准备金方法计算的净负债总额（期中准备金加上未到期保费）。在这种情况下，假设保费每年缴纳 m 次，则未到期保费为 $P_x/2m$。

4. 准备金的图式表示。关于平均准备金和期中准备金的关系，可以通过图 17－2 和 17－3 了解得更为清楚，其中保单的签发日期为 6 月 30 日。

在图 17－2 中，实线表示的是线性插值平均准备金，虚线表示线性插值期中准备金。其中 A 点表示第 $t-1$ 保险年度的期末准备金 ${}_{t-1}V_x$；B 点表示第 t 保险年度的期初准备金 ${}_{t-1}V_x + P_x$；E 点表示第 t 保险年度的期末准备

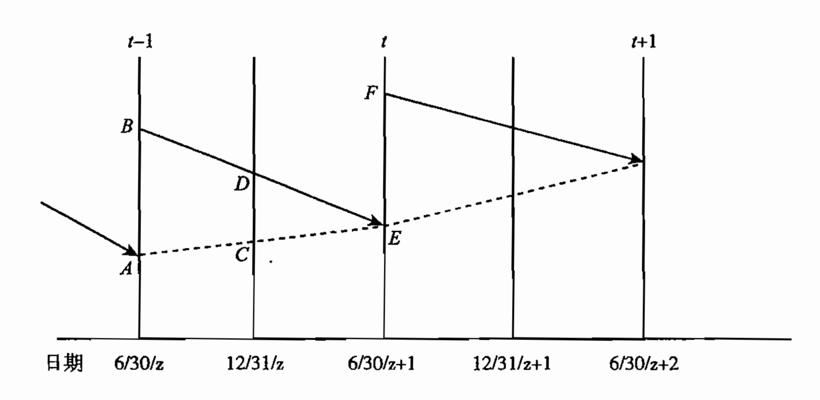


图 17－2　年缴保费情况下平均准备金和期中准备金

金${}_tV_x$；F 点表示第 $t+1$ 保险年度的期初准备金${}_tV_x+P_x$。D 点表示 z 年 12 月 31 日的平均准备金，即为

$$ {}_tMV_x=\frac{1}{2}({}_{t-1}V_x+{}_tV_x)+\frac{1}{2}P_x $$

C 点表示 z 年 12 月 31 日的期中准备金，即为$({}_{t-1}V_x+{}_tV_x)/2$。

图 17－2 表示的是年缴保费情况下平均准备金和期中准备金的变化。在这种情况下，没有延期保费资产，A 和 B 或 E 和 F 之间的差额表示评估净保费数额。平均准备金和期中准备金在 z 年 12 月 31 日的差额（C 和 D 之间的差额）是年缴评估净保费的一半，此即未到期评估净保费。

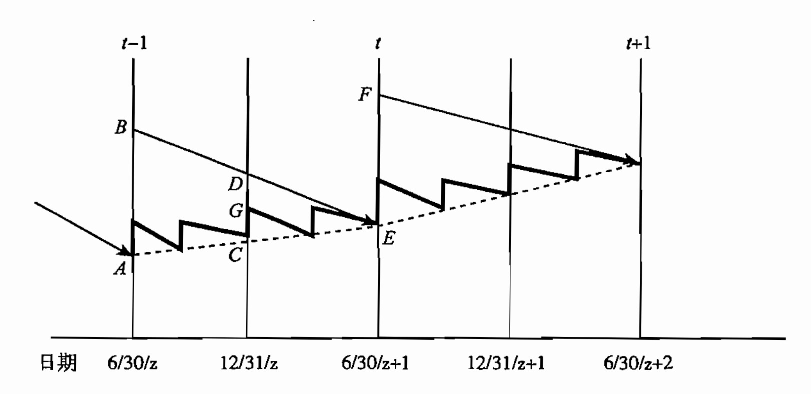


图 17－3　季缴保费情况下平均准备金和期中准备金

图 17－3 则表示在季缴保费情况下平均准备金和期中准备金的变化。

图中的细线表示年缴保费情况下的插值平均准备金，虚线表示年缴保费情况下的插值期中准备金，其中，A、B、C、D、E、F 点的含义与图 17－2 中的相同。图中的粗线表示季缴保费情况下准备金的变化。G 和 D 之间的差额则为在使用平均准备金情况下的延期保费，而 G 和 C 之间的差额，则是为在使用期中准备金情况下的未到期保费。

无论是平均准备金方法还是期中准备金方法，都是采用准备金因子进

行准备金计算时所采用的一种简化方法，此时假设保单在一年内是均匀销售的。得益于计算机数据处理能力的提升，现在一般假设保单在每个月是均匀销售的，计算的基础同样是（17－21）式和（17－25）式，对十二个月的保单采用不同的 h 值，可实现对十二组保单的简化计算。对于采用现金流贴现方法计算的准备金来说，由于不是采用准备金因子线性插值的方式，因此上述方法不再使用，但一般在数据处理时也会对保单销售时间进行简化处理，分组进行计算，最终目的都是实现准备金由保单年度末准备金向会计结算日准备金的转变。

17.4.2　准备金其他调整

1. 退还准备金。一些保险公司设计的产品中规定：在死亡发生时退还超过死亡日后的部分毛保费。这出于如下考虑：如果投保人选择高频率缴费（如月缴、季缴、半年缴），那么在死亡年度投保人只缴纳了死前部分的保费。而在年缴保费中，投保人已缴纳了整年的保费，而保险保障是相同的，看上去保费缴多了些，需要退还部分保费。对于年缴保费的单位保额的终身寿险保单，对应于保费的退还保障的期末准备金因子为 ${}_tV^{\{1\}}(\bar{A}_x)-{}_tV(\bar{A}_x)$。由 ${}_tV^{\{1\}}(\bar{A}_x)={}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$，以及 ${}_k\bar{V}(\bar{A}_x)$ 和 ${}_kV(\bar{A}_x)$ 的如下关系

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)={}_tV(\bar{A}_x)+\beta(\infty)\bar{P}(\bar{A}_x)\,{}_tV_x$$

可得 ${}_tV^{\{1\}}(\bar{A}_x)-{}_tV(\bar{A}_x)$ 近似为

$$\frac{1}{2}\bar{P}(\bar{A}_x)\cdot{}_tV_x \tag{17－27}$$

针对缴费频率不同可能造成对年缴不公平的问题，目前很多公司都采用对月缴、季缴、半年缴保单适当加费的方式简化处理，如月缴为年缴保费的 0.09 而不是 1/12。前面介绍的保单设计方式一般不再被采用，因此也不必再计算上述准备金。

2. 宽限期保单的处理。在实务中，对长期寿险，由于保险公司一般对期缴保单续期保费提供两个月的宽限期。对在宽限期内未缴费的保单，由于尚未缴费，对于不同的保费记账规则，可能采取不同的准备金评估方式。

在 2006 年新会计准则实施之前，由于保费收入按收到保费时间入账记录，因此这时候对宽限期未收到续期保费的保单，准备金按应缴日的期末准备金计算，保费收到后才考虑作为新的保单年度的评估净保费，按相应插值方法计算准备金。2006 年新的会计准则实施之后，对处于宽限期未缴费的保单，在应缴日仍记保费收入，只有在宽限期后仍未收到时才冲销保费收入。这时，对这些实际上仍未收到保费的保单，在宽限期视为已缴费，按与已缴费保单相同的方式插值计算。上述处理的规则反映了准备金与保费收入应同时确认的原则。

§17.5 准备金充足性测试

虽然法定责任准备金的评估方法较为保守，但对那些准备金评估基础锁定的国家来说，一定阶段所确定的保守的假设可能随时间变化不再保守了，随着时间的推移，在新的市场条件下，准备金是否仍然充足值得怀疑，因此为应对市场环境变化对准备金充足性的影响，一些国家的监管机构要求对准备金充足性进行测试。准备金充足性测试的要求与准备金评估基础适用方式有一定的关系，对有些业务，如已采用当期最新的市场假设，由于假设已反映了市场环境包括市场利率的变化，因此一般不额外规定方法评估准备金的充足性。如果通过测试显示准备金不充足，则需额外计提准备金。准备金充足性测试的目的之一就是在部分有效业务评估采用过去的假设的情况下，整体的准备金评估是否仍然保守。以下简单介绍我国准备金充足性的一般规定和方法。

17.5.1 我国准备金充足性测试的一般规定

我国对准备金充足性测试的一般要求在精算报告的第六部分进行了说明。

1. *准备金充足性测试的一般要求*。现金流分析法是最常用的准备金/资产充足性的分析方法，特别是对于产品或投资策略受经济或利率环境有较大影响的情形。其他可以接受的方法包括：

毛保费评估法，适用于对经济或利率风险不是很敏感，但是对于负债风险比较敏感的业务。如果已评估的准备金数额没有明显地高于毛保费评估法下的准备金，需对负债方面的假设，如费用、死亡率、发病率、退保率进行敏感性测试，以决定是否需要设立额外的准备金。这种方法的目的就是检查支持现有准备金的资产是否足够支持未来的负债现金流。

我国准备金充足性测试要求说明包括或不包括某一部分业务的理由、相关风险的分析、以及对于不同业务采用不同严格程度分析的理由。

充足性分析的时间必须延续到某个时间点，在此时点所考察的业务，其责任已经终止或其准备金对分析来说不是实质性的，如 100 年。如果根据精算责任人的判断，更长的分析时间对分析结果没有实质性的影响，可以考虑较短的时间范围，但是建议分析的时间范围不少于 30 年。

充足性分析的初始时间应为每年末，即 12 月 31 日。如果初始时间非此时间，需做出声明。应分析所采用的合并分析方法对结果的影响。另外，对管理层可能采取的行动对未来假设的影响应进行说明。

2. *对负债方面的分析*。对负债现金流的预测基于保险产品的责任和数

据的可靠性，因此对负债的分析，包括以下方面的要求：（1）关于公司和产品的描述。需包括关于产品责任的描述、市场的描述、核保规则的描述，以及其他精算责任人认为重要的特别风险特性的描述，如利率保证、续保保证、转换险种保证等。如有相应准备金支持上述保证的，给出准备金的基础；如果没有提存相应准备金的，给出理由。对于需要提存保费不足准备金的产品，即毛保费低于评估净保费的情形需要给出说明。（2）准备金数据来源的说明；（3）准备金方法和计算基础的描述；（4）与保单现金流有关的变量的假设及假设的基础。包括对于灵活缴费（Flexible Premium）产品的保费假设、佣金假设、费用假设及实际费用水平的经验分析、死亡率和发病率的假设及其经验分析、退保和失效的假设、保单借款的假设等。（5）关于支付保单持有人红利和其他非保证利益的策略。主要是分红产品的红利水平的假设以及万能险结算利率的假设。

3. *资产方面的分析*。在进行现金流测试时，需对未来的投资收益进行预测，在采用毛保费评估方法时也需对贴现利率进行假设，因此必须对资产的情况进行基本的分析。我国准备金充足性测试要求中对资产分析的基本要求如下：（1）资产组合的描述，包括资产风险的详细描述，需披露公司现有资产组合情况及其相应各资产品种的风险特性，包括：资产种类和风险等级；各资产种类的期限、影响资产现金流的选择权等；各资产种类的投资收益；公司实际投资收益分析。（2）资产数据的来源。（3）资产评估的基础。（4）选择用来支持分析准备金资产的方法。（5）资产现金流的相关假设。资产组合、投资和再投资的策略；不同资产品种利差的假设；投资费用假设；资产违约的假设；处理负现金流的策略等。

4. *多个利率情景测试*。在准备金充足性测试过程中，需对不利情景进行测试。对其中最重要的利率假设，我国监管部门规定要求如果采用现金流分析法，必须至少测试以下确定性利率情景：一个基准的收益率曲线，在分析时间段内保持不变；收益率曲线在基准收益率曲线基础上，前 5 年内每年均下降 0.5%，第 6 年到第 10 年均上升 0.5%，10 年之后保持不变；收益率曲线在基准收益率曲线基础上，前 5 年内每年均下降 0.5%，5 年之后保持不变；收益率曲线在基准收益率曲线基础上，前 5 年内每年均上升 0.5%，5 年之后保持不变。

5. *分析结果摘要及敏感性测试结果*。为了发现测试结果由各种假设设定上带来的偏差，一般要求对负债现金流进行敏感性测试，敏感性测试需包括以下主要变量对分析结果的影响：死亡率和发病率、退保率、费用、资产违约率、分红水平等。

对于采用毛保费评估分析法的，对上述变量敏感性测试的同时，需要考察用以贴现的投资收益率的变化对分析结果的影响。

6. 分析的结果。我国监管部门要求，准备金充足性分析的报告应该采用合适、简明的表述方式反映分析的重要结果和信息，便于监管机构和报告阅读者阅读。同时详细的现金流情况（包括各敏感性测试的结果）应当作为准备金充足性分析报告的附件，完整上报。

17.5.2 毛保费责任准备金评估

我国的精算报告认可毛保费责任准备金评估可以作为准备金充足性测试的方法，由于不需要建立资产模型对资产现金流进行预测，因此作为一种更为简单的准备金充足性测试方法，得到较为广泛的采用。毛保费责任准备金是保险公司最低的保单责任准备金负债要求，如果保险公司实际提取保单责任准备金低于毛保费责任准备金，应当计提额外准备金。

1. 毛保费责任准备金的相关假设及考虑因素。毛保费责任准备金评估考察对象为责任准备金评估日处于有效状态的长期保险业务，涵盖的业务范围包括分红业务和非分红业务，但不包括投资连结保险业务和万能寿险保险业务。由于分红政策的可调整性和分红账户的独立要求，保险公司应划分分红业务和非分红业务，分别计算毛保费责任准备金，并判断实际提取准备金的充足性。另外，对于长期业务中所占比例不大的非主要险种，可以不进行毛保费责任准备金的具体计算，而采用比例近似的方法代替，例如，按毛保费准备金与法定准备金相同的比例估计未进行具体计算的业务的毛保费准备金。在我国的精算报告要求中，比例近似方法分析应基于精算责任人的合理判断，即所采用的近似方法不会对最终的结果造成实质性的偏差，并且此部分业务实际提取保单责任准备金数额占比不得超过5%。

毛保费责任准备金评估关于保单现金流的预测必须延续到某个时间点，在此时刻所考察的业务，其保险责任已经终止或对分析来说不是实质性的，如100年。如果根据精算责任人的判断，在对分析结果没有实质性影响的前提下，可以考虑较短的时间范围，但应就此给出特别说明。

由于毛保费责任准备金是基于评估当时市场环境测算准备金充足性的一种方法，所以毛保费责任准备金评估基于最优估计的精算假设，采用适当的精算模型对保单的未来现金流作出预期，应当包括（但不局限于）下列项目：保费收入、保险利益支出、退保金支出、佣金及手续费支出、营业费用、保单红利支出以及其他非保证利益支出。其中间接佣金支出可根据基本法测算，营业费用一般可根据费用分析结果假设，营业费用的假设可以采用多种形式，如保费收入的百分比、保额的百分比或每张保单的成本等。

毛保费责任准备金评估不考虑企业所得税。如果再保险安排对分析结果没有实质性的影响，分析也可不考虑相关的再保安排，准备金充足性分

析就以直接业务为基础。

毛保费责任准备金评估选择假设时应以本公司的实际经验为基础，对于缺乏经验数据的公司，可以参考行业一般经验结果或同等规模其他保险的经验。如果毛保费责任准备金评估运用的假设同时考虑了公司实际经验分析和对未来趋势的预期，应作出具体说明。

贴现率根据中国保监会相关规定确定。贴现率应当反映当前与准备金相对应的资产及预期未来现金流的投资收益率情况。

2. 毛保费责任准备金的计算。毛保费责任准备金的计算可以采用合理的分组方法，对于每个分组，规划相应的未来保单现金流。

净现金流 CF_t

$$CF_t = P_t - B_t - W_t - C_t - E_t - D_t - O_t$$

其中：

t 为自评估日起时刻；P_t 为时刻 t 的保费收入；B_t 为时刻 t 的保险利益支出；W_t 为时刻 t 的退保金支出；C_t 为时刻 t 的佣金及手续费支出；E_t 为时刻 t 的营业费用支出；D_t 为时刻 t 的红利支出；O_t 为时刻 t 的其他收入或支出。

毛保费责任准备金为 GPV，$GPV = -\sum[CF_t \times F_t]$

其中：F_t 为时刻 t 的利息贴现因子。

对于这些现金流的预测，大部分公司都是采用精算软件进行处理；少数没有购买精算软件的公司一般通过设定一定数量的代表性保单通过 EXCEL 表进行计算，然后按业务数量进行放大的方式进行预测。

3. 比例近似方法。出于方便计算的目的，部分规模较小的业务可能没有纳入计算模型，对这部分没有纳入模型的保单的毛保费责任准备金一般采用比例近似的方式。

例如，全部考察范围内的长期业务的毛保费责任准备金总和 GPV' 由下面的公式确定：

$$GPV' = GPV \div \text{Ratio}$$

其中：GPV 为纳入计算模型的业务的毛保费责任准备金，Ratio 为这部分业务在评估日的法定准备金占所有考察业务的法定准备金总数的比例。

毛保费责任准备金评估同时包括敏感性测试。测试除了需要考察用以贴现的投资收益率的变化对分析结果的影响外，还应包括死亡率及发病率、退保率、营业费用、分红率等主要变量对分析结果的影响。

习　题

1. 假设 10 年期定期寿险，保额是递增的，即

$DB_t = 10\ 000t$，$t = 1, 2, \cdots, 10$

（1）若毛保费为均衡保费，求 NP。

（2）若前 5 年的毛保费是后 5 年毛保费的$\frac{1}{2}$，求 NP_t。

（3）取 $x = 30$ 岁，利率 4%，利用中国经验生命表（1990－1993）CL1（男表）换算表计算（1）和（2）中 NP 的值。

（4）取 $x = 30$ 岁，利率 4%，利用中国经验生命表（2000－2003）CL1 换算表计算（1）和（2）中 NP 的值。

（5）比较（3）和（4）计算结果的差异，体会死亡率变化对净保费的影响。

2. 假设单位保额的 n 年期两全保险，缴费期为 h 年，修正责任准备金的期限等于缴费期，试推导第 t 年末（$1 \leqslant t \leqslant h$）的修正责任准备金。

3. 设某 n 年期两全保险，保额为 1 000 元，费用分布为：

第一年：保费的 75% 及固定费用 50 元；

续年：保费的 10% 及固定费用 10 元。

求第五年 PPM 准备金的表达形式。

4. 已知某终身寿险有如下资料：

（1）毛保费等于 15.0

（2）准备金计算法：一年定期修正法

（3）预定利率等于 2.5%

x	$1\ 000A_x$	$\ddot{a}_x$
30	325	27.67
31	333	27.36
32	341	27.04
33	349	26.71
34	357	26.38
35	365	26.04

求在 31 岁出单情况下每千元保额的续年保费和第三年度末的责任准备金。

5. 假设某一寿险公司在未来五年内，每年均售出一份终身寿险保单。被保险人全为男性，购买保单时年龄为 35 岁，保单死亡给付同为 10 万元，

在这五年中没有保单失效或被保险人死亡。责任准备金采用均衡纯保费方法，下表提供计算准备金的数据：

年龄 x	$1\ 000A_x$	$\ddot{a}_x$
35	300	15.00
36	325	14.50
37	350	14.00
38	375	13.50
39	400	13.00
40	450	12.50

试计算前五年的期末责任准备金总额，前五年的平均责任准备金总额以及前五年的期中责任准备金总额。

6. 准备金负债有哪些突出的特点。
7. 简述准备金的不同类型及其各自的特点。
8. 比较法定准备金的各种评估方法。
9. 简述评估基础对准备金的影响。
10. 比较不同国家评估基础的选择方法。
11. 简述各国准备金评估基础的适用方式。
12. 讨论实务中各种准备金的含义，如平均准备金、期中准备金等。
13. 简述准备金充足性测试的含义以及我国的相关规定。

第十八章　准备金评估Ⅱ

学习目标

□ 了解美国法定评估体系下万能寿险、年金产品及变额产品的评估，侧重于了解美国市场在评估准备金时处理保险产品中诸如灵活缴费、保证选择权、变额责任等特征的方法和思路

□ 熟悉可变动保费万能寿险和固定保费万能寿险等利率敏感型寿险的评估方法

□ 熟悉各种年金的评估方法，包括趸缴保费延期年金、年缴保费年金、可变动保费年金、即期年金

□ 熟悉变额保险的评估方法，主要包括年缴保费变额寿险、趸缴保费变额寿险、变额年金、保证最小死亡给付准备金

§18.1　利率敏感型寿险的评估

传统的寿险产品一般都是在一定的费率及缴费期间条件下提供一个保证的未来现金价值和死亡给付。分红保险产品，如果不考虑未来的分红状况，而只是每年根据分红保险的可分配盈余确定当年度的分红，那么分红保险产品和传统寿险产品一样，有固定的费率、固定的缴费期，定价时设定的保障保持不变，可以用传统的评估技术进行评估。

但对目前许多国家的保险市场上都出现的利率敏感型寿险（也可称之为账户型产品），比如万能保险、投资连结保险等，用传统评估技术处理起来比较困难，上一章介绍的累积法和加拿大的资产负债方法也可用于这类产品的评估。另外本节介绍在美国 CRVM 规则下对此类产品的评估方法，读者可以比较这些方法在评估思想和方法上的差异。

18.1.1　可变动保费万能寿险

万能寿险是一种利率敏感型寿险产品，它具有一个“账户”。“账户”的收入项包括保费、结算利息以及各种可能的持续奖励；“账户”的支出项包含各项扣费以及保障成本等，逐期计算，账户价值属于客户，但在客户退保时，保险公司可以根据合同收取一定的退保费用。万能寿险根据缴费是否固定可分为固定保费万能寿险和可变动保费万能寿险，固定保费万

能寿险可看做是从传统产品向可变动保费万能寿险过渡的产品，目前市场上主要以可变动保费万能寿险为主。可变动保费万能寿险是保单持有人一次或多次保费缴付在时间或金额上有一定程度变化的合同，这种变化不需要事先得到保险人的同意。可变动保费万能寿险对于未来保费的一些假设的要求产生了其特殊的评估问题。

传统评估方法下的“未来保险给付现值与未来保费收入现值的差额”公式不能应用于可变动保费万能寿险，这是因为可变动保费万能寿险的“未来保费”和“未来保险金给付”对任意一个保单都是未知的。

刚开始承保万能寿险时，许多保险公司经常采用退保现金价值作为准备金，这种方法主要基于以下几个理由：（1）现金价值的公式实际上是一种过去法准备金计算公式；（2）某些保单提供永久保障，保单持有人可以通过其缴费水平改变其未来保险金给付水平，未来给付的模式会有很多种，无法有效预测；（3）对于某些永久保障，第一年的费用和退保费用一般小于 CRVM 中的费用补贴，使用退保现金价值实际上更加保守。

早期，还有些保险公司认为，在任何一个时间点上，万能寿险可看成是一个缴清保险保单，因为公司对未来保费没有任何要求。在这种情况下，对于预先支付费用的保单，如果保单的保证死亡率和利率与评估基础相一致，则现金价值即为未来保证保险金给付的合适的准备金。

随着万能寿险的不断发展，一些保险公司的万能保险产品逐渐放弃前端扣费（即在收到保费时扣除初始费用）的做法，改为后端扣费，即只在计算退保价值时进行扣费，从账户价值中扣取一定的费用。这时保单账户价值、退保现金价值（扣除退保费用后的净值）或者一些中间价值哪一个更适合作为准备金成为争论的焦点。

与上述考虑不同，美国保险监督官协会在传统险 CRVM 方法基础上，进一步制定了万能保险准备金评估方法，也称为万能险 CRVM 方法，该方法仍采用“未来法”的评估方式，较好实现了万能险和传统险评估方法的统一。对于这种方法更全面地了解可以参考美国保险监督官协会（NAIC）的万能保险模型的规定（Universal Life Insurance Model Regulation 585），该规定于 1983 年 12 月开始实施。该规定包含以下内容：

1. 最小准备金。对万能寿险确定最小准备金的评估类似于传统保险的评估方法，该方法对未来保费收入进行假设，同时假设一个因子 r 用以调整实际保单的运行与假设的保单运行模式之间的差别。计算可变动保费万能寿险的 CRVM 准备金的步骤大致如下：

（1）计算保证期满保费（Guaranteed Maturity Premium，GMP）。GMP 是在一个保费支付期间内按期支付的均衡毛保费，使得在保单期间能提供一个给定保险金额的两全给付。GMP 在保单承保日由死亡保障成本、费用

成本和利率等保证计算得到。如果保单持有人改变保单的保险责任结构，则重新计算 GMP。

(2) 计算各保证期满日账户价值（GMF）。GMF 是在承保日根据保单的各种保证和 GMP 支付的假设计算得到的保单各期末账户价值的预测值。同样，如果保单持有人改变保单的保险责任结构，则需重新计算 GMF。以上两步使用的方法和传统险的评估方法一致。

(3) 计算实际账户价值与预测的 GMF 的比率 r。如 r 大于 1，则取 $r=1$。

(4) 从评估日开始，采用合同约定的保证利率、死亡成本、费用成本扣除假设，采用实际账户价值与 GMF 中较大者和 GMP 的假设向未来规划保单账户价值，由此规划过程得到未来各期的保证死亡给付和保证满期给付。最后采用法定评估假设计算规划得到的保证死亡给付和保证满期给付的现值。

(5) 计算均衡净保费。在承保日，根据保单计划以法定最低评估假设计算均衡净保费，它与步骤 1 中计算的 GMP 对应，计算所使用的保险利益是一致的，但计算假设不同。

(6) 计算均衡净保费准备金。计算方法是 r 乘以评估日未来给付现值（第 4 步计算所得）与未来均衡净保费（第 5 步计算所得）现值的差。

(7) CRVM 准备金是由上面确定的均衡净保费准备金减去 r 乘以未摊回 CRVM 费用补贴。

上述计算步骤中在第 1 步解决了万能险在采用传统险 CRVM 方法时没有明确未来保费的问题，并通过第 2、3、6、7 等步骤明确了账户实际运行结果与保单预期计划有差异时进行调整的机制，实现了万能险准备金与传统险准备金的评估的方法在形式上的一致。

2. 备选最小准备金（Alternative Minimum Reserves）。对于可变动保费万能寿险，如果 GMP 小于评估净保费，则要求计算备选最小准备金（简称 AMR）。可以把 AMR 理解为万能寿险包含了保费不足准备金的最低准备金要求。按美国监管规定，如果 GMP 小于用法定最低标准的死亡率和利率计算得到的评估净保费时，准备金数额应是下面两者中较大的一个：

(1) 根据最小准备金计算方法，根据保单实际使用的保证死亡率基础和评估利率计算得到的准备金；

(2) 根据最小准备金计算方法，采用法定最低标准死亡率和评估利率假设，在 GMP 小于评估净保费的保单年度，用 GMP 代替评估净保费计算得到的准备金。

与传统寿险保单不同，万能寿险中并没有明确给出评估净保费。为了计算 AMR，许多公司计算评估净保费如下：

$$VNP = P^{NL} + \frac{EA}{\ddot{a}} \qquad (18-1)$$

其中：VNP 为评估净保费；P^{NL} 为均衡净保费；EA 为 CRVM 方法允许的初始费用补贴，与传统险的计算方法一致。

导致需要额外计算 AMR 的原因大致如下：

1. 如果死亡率和利率的保证基础与评估基础很相似的话，则对没有附加费用的保单，可以利用 AMR；

2. 如果保险费率的保证死亡率低于评估死亡率，特别是如果保证利率等于评估利率，而且预先附加费用水平很低，则会导致使用 AMR；

3. 保证利率高于评估利率，特别是如果保证死亡率等于评估死亡率，而且费用水平较低，则可利用 AMR；

4. 任何保单计划如果产生较小数额的 GMP，则可能会导致使用 AMR。

综上所述，即如果万能产品设计中保证的死亡成本、费用扣除及结算利率优于法定最低评估假设要求时，就可能导致要额外提取 AMR。

3. *计算示例*。根据保单承保日的信息，可以计算出 GMP、GMF 和均衡净保费。假设每年支付 GMP，对于期间 t，选择期间中 GMF 和保单评价的实际账户价值两者之中较大者，并将其向未来规划到保单期满日。为了计算均衡净保费准备金，则需确定各期间的死亡给付和到期给付的现值，这个现值的计算采用评估基础的利率和生命表。期间 t 的均衡净保费准备金是 r 乘以未来保险金给付现值与未来保费收入现值的差额，其中 r 表示期间 t 的实际账户价值与保证期满账户价值 GMF 的比率（要求 $r \leqslant 1$），用公式可表示为：

$$_tV^{NL} = r \cdot (PVFB_t - P^{NL} \cdot \ddot{a}_{x+t}) \qquad (18-2)$$

其中，$_tV^{NL}$表示均衡净保费准备金。$PVFB_t$ 表示未来保险金给付在时点 t 的现值，这个现值是利用保单的基本保证，假设在以后期间缴费数额为 GMP，由实际账户价值与 GMF 两者中较大者规划出来的结果。$\ddot{a}_{x+t}$是保单剩余期间的单位年金现值。

保单的 CRVM 准备金则是用均衡净保费准备金减去下面一项

$$r \cdot EA^{CRVM} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \qquad (18-3)$$

其中，EA^{CRVM}为第一年的 CRVM 费用补贴。保单计划保费为 GMP，而且满足所有的保单保证项目。$\ddot{a}_x$ 是在承保日的单位年金现值。

【例 18-1】 设某保单的预定附加费用是保费的 3%，保证利率为 4%，承保年龄为 35 岁，GMP 是保单承保至 95 岁保额为 1 000 元的两全保险的保费，则以利率 4.5%、生命表采用 CSO1958（美国）为评估基础的 GMP 为 14.49。在实务中，由于万能寿险账户积累和保证的死亡给付

是以月为基础的，而现值的计算是以年为基础的，所以在计算准备金中出现了困难，它需将以月为单位变化的一系列死亡给付贴现到评估日。有一些方法可以解决这个问题，在本例中，则是利用连续型公式将年平均死亡给付进行贴现。以承保日的保证为基础，假设年费率为 GMP，则可得到均衡死亡给付和到 95 岁时与死亡给付额相等的生存给付。假设死亡给付在死亡时发生，年保费的利率为 4.5%，则可得到 $P^{CRVM}=13.80$，$P^{NL}=13.16$。

假设在第 10 年末的实际账户价值为 195.75 元，退保现金价值 187.99 元，计算 10 年末的期末准备金。在保证基础上，通过积累 GMP 到 10 年末而得到 $GMF_{10}=136.7$ 元，在此例中，由于实际账户价值大于 GMF_{10}，则 $r=1$。下一步在保证基础上将实际账户价值规划①至 95 岁，保险给付的现值为$1\ 000\bar{A}_{45:\overline{50|}}=381.65$ 元②。未来均衡净保费的现值为

$$P^{NL}\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}=(13.16)\cdot(15.6193)=205.55$$

未摊回 CRVM 费用补贴为：

$$\begin{aligned}r\cdot EA^{CRVM}\cdot\frac{\ddot{a}_{45:\overline{50|}}}{\ddot{a}_{35:\overline{60|}}}&=r\cdot(P^{CRVM}-P^{NL})\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}\\&=1\times(13.8-13.16)\times15.6193=10\end{aligned}\tag{18-4}$$

所以，以 4.5% 和 CSO1958 为基础的期末准备金为

$$\begin{aligned}{}_{10}V&=1\ 000\bar{A}_{45:\overline{50|}}-P^{NL}\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}-(P^{CRVM}-P^{NL})\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}\\&=381.65-205.55-10=166.1\end{aligned}\tag{18-5}$$

这个结果小于实际账户价值 195.75 元，而且小于退保现金价值 187.99 元，此时应以退保现金价值为总负债。

【例 18-2】 在上例中，如果 10 年期的实际账户价值为 57.74 元，小于 GMF_{10}，则

$$r=57.75/136.70=0.4224$$

在保证基础上规划 GMF_{10}，得到未来规划保单账户价值。

假设账户价值等于 GMF_{10}时，未来保险金给付的现值为 $1\ 000\bar{A}_{45:\overline{50|}}=334.68$ 元。未来均衡净保费和未摊回费用补贴的现值不变，则期末准备金为：

$$\begin{aligned}{}_{10}V&=r\cdot[1\ 000\bar{A}_{45:\overline{50|}}-P^{NL}\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}-(P^{CRVM}-P^{NL})\cdot\ddot{a}_{45:\overline{50|}}]\\&=0.4224\times(334.68-205.55-10)=50.32\end{aligned}\tag{18-6}$$

【例 18-3】 在例 18-1 的基本上，去掉 3% 的预定附加费用，保证

① 至于如何规划，这里不展开。

② 严格来说，这里的符号应用 $\bar{A}^{*}$，因为 $\bar{A}_{45:\overline{50|}}$有特定意义。

利率变为 4.5%，则要求 AMR。在本例中，我们得到 GMP = 13.04 和 GMF_{10} = 127.59，假设第 10 年的实际账户价值为 177.63 元，评估保费没变。此时

$$P^{CRVM} = 13.80 > GMP \tag{18-7}$$

假设评估基础同样用于计算保费不足准备金，则期末准备金的计算必须用 GMP 代替 P^{NL}，而且使用费用补贴。在 45 岁时未来的保险给付的现值为 382.69 元，所以期末准备金为

$$382.69 - 13.04 \times 15.6193 = 179.01 \text{（元）}$$

由于保证利率与评估利率一致，此结果与账户价值 177.63 元非常接近。

【例 18-4】 在例 18-3 中，假设没有费用附加。通过加入费用附加可以减少 AMR，在上例中，如果加入 3% 的费用附加，所有数字都保持不变，只有 GMP 变为 13.44。由于 P^{CRVM} > GMP，仍需计算 AMR，其值为

$$382.69 - (13.44) \times (15.6193) = 172.77$$

相对于例 18-3，通过附加费用已达到降低 AMR 的效果。如果有更大的费用附加，则最终可能使 GMP 提高到大于 P^{CRVM} 的水平，此时就不必计算 AMR。

在上述例题中的准备金都是期末均衡净保费准备金，如果计算平均准备金则需要适当调整。

18.1.2　固定保费万能寿险

相对于变动保费万能寿险，由于固定保费万能寿险未来的保费计划是规定的，因此固定保费万能寿险准备金的计算过程一般来讲要简单些。

与变动保费万能寿险 CRVM 准备金计算过程相比，固定保费万能寿险准备金的计算有一些变动：(1) GMP 等于毛保费；(2) 未摊回费用补贴由保单在承保时的保证计划确定；(3) r 一般等于 1。

有了上述变动后，对于固定保费万能寿险，计算 CRVM 准备金的过程可简化为：(1) 在费用、死亡保障成本、利率保证基础上规划未来的保险给付，必要时考虑二级保证；(2) 利用评估生命表和利率计算上述的保险给付的现值；(3) 减去保险保证计划的未来 CRVM 净保费的现值。

值得关注的是固定保费万能寿险通常提供二级保证（Second Gurarente），有这种二级保证特征的产品通常约定，无论账户运行的实际情况如何，保险人保证为被保险人提供一套现金价值、死亡保险责任或到期给付的保证。例如，一种最常见的产品设计特征约定，只要客户按要求缴付一定期限、一定金额的保费，无论实际运行的账户价值是否足以支付死亡成

本，保险人均保证保单持续有效并提供约定的死亡保障。称这类产品特征为二级保证，主要是相对于万能险中最低死亡成本、死亡费用扣除及最低保证结算利率而言的。

针对万能保险产品的这类二级保证特征，美国监管部门也制定了专门的评估方法，基本的计算过程是在特定的账户运行情景下，计算保险公司由于二级保证带来的给付成本的增加。

上述讨论都是关于保单年度末准备金的计算过程，在实务中，与上一章的讨论类似，需要把保单年度末准备金调整为评估日准备金。具体计算不是本章的重点，在此不再具体讨论。

18.1.3 对万能保险评估方法的一些简化

对于万能寿险使用 CRVM 方法是比较复杂的，另外在某些情况下，准备金可能是不充分的。因此对于万能寿险可采取其他方法。其中一种得到广泛认可的方法为保证到期保费方法（GMPM）。

在 GMPM 方法中，保险公司仍需计算保证期满保费和保证期满账户价值，而在评估日对未来保证给付的规划过程就不再必要。

如果在时刻 t 实际账户价值小于或等于GMF_t，那么

$$ {}_tV^{GMPM} = r \cdot {}_tV^{CRVM} \qquad (18-8) $$

如果在时刻 t 实际账户价值 F_t 大于GMF_t，那么

$$ {}_tV^{GMPM} = {}_tV^{CRVM} + F_t - GMF_t \qquad (18-9) $$

其中：${}_tV^{CRVM}$是传统 CRVM 两全保险准备金。

当 $r<1$ 时，（18－8）式产生的结果与前面所讲的方法是一致的；当保单的实际账户价值大于保证到期账户价值时，（18－9）式对于大多数保单是一种非常合理的近似。

§18.2 年金评估

在寿险业发展的早期，年金并不占有重要的位置，而且最早的年金都是固定给付的年金种类。后来，随着利率波动对于金融市场的冲击，许多保险公司开始承保趸缴或者可变动保费延期年金，年金保险也成为一种投资工具。随着年金的不断发展，年金准备金数额也大规模增长，许多国家纷纷出台关于最小年金准备金的各种规定，1976 年美国的保险监督官协会（NAIC）在年金保险准备金评估方法（Commissioners Annuity Reserve Valuation Method，CARVM）中明确了美国的年金保险法定准备金的评估方法：年金保单或者满期生存保险保单（不包括任何失能和意外死亡给付）的准备金为：在评估日的未来每年末支付的保证给付（包括保证不丧失保单利

益）的现值与未来评估保费收入的现值差额的最大值。该方法最大的特点是：对年金产品设计中普遍出现的未来保证给付选择权特征，提供了一个明确的评估办法。由于美国市场存在大量在高利率时期的年金产品，该评估方法的明确有重要意义。但对于我国而言，由于目前产品的保证利率有严格的监管，同时目前的市场利率水平仍在监管允许的保证利率之上，年金产品中保证给付选择权的价值还难以反映。

18.2.1　趸缴保费延期年金的评估

1. *评估方法及实例*。对于这类年金的评估，首先是在保单保证基础上对年金账户价值余额向前规划，根据规划的账户价值余额计算保单的未来保证给付，包括年金给付、死亡给付和现金价值。然后，对于每种可能的未来保证给付，利用评估生命表和评估利率，计算未来给付现值减去"未来评估保费"收入现值的差额，年金保险准备金则是这样计算出来的净现值的最大值。关于这种方法，有几点注意之处：（1）这种准备金的计算要求明确未来现金价值，这与一般寿险评估有所不同，后者在评估中只需明确死亡给付和到期给付。这主要是因为某些年金保险作为投资工具，退保是一种正常的获得投资收益的手段。（2）为了计算某份保单的准备金，有必要确定在每年末的所有可能的未来给付，包括死亡给付、年金支付和现金价值，然后计算每个给付的现值。因为一个典型的年金保单至少有 5 至 6 种选择权利，而且有许多可能的年金支付次数，从理论上讲，为了计算某份年金保单的准备金，需要计算数以百计的现值，但由于许多保单的设计，使得很明显就能确定哪次支付能产生最大的现值，因此只须计算很少的未来给付现值即可。

在评估过程中，需要注意积累利率、评估利率及生命表的选择，在确定准备金时，一般有两个独立的过程：第一个过程是计算未来保证给付，这可能需要向未来规划保单账户价值。在未来可以进行年金转换的每个时间点，将规划得到的账户价值按照保证年金转换率转换成年金给付，这个过程采用的是保险合同提供的保证利率和保证转换率等；第二个过程是将在上一个步骤中得到的给付进行贴现，在这个过程中则使用适当的评估生命表和评估利率。需要认识到规划基础和评估基础是完全独立的，但在计算准备金的过程中都是不可缺少的。

对于趸缴保费延期年金（SPDA），准备金的计算过程可通过以下示例来说明。

【例 18－5】　趸缴保费数额为 1 万元，没有附加费用，保证利率在 1～5 年为 10%，以后为 4%，退保费用如表 18－1 所示：

表 18 – 1

保单年度	退保费用：账户价值的比例（%）
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1
8 年以后	0

评估利率为 8%，死亡给付等于退保现金价值，8 年以内不允许年金转换。

表 18 – 2 给出了在保单前 10 年每年末的保证账户价值积累值以及退保现金价值。

表 18 – 2　　保证账户积累值以及退保现金价值

保单年度	账户价值	现金价值
0	10 000	9 300
1	11 000	10 230
2	12 100	11 374
3	13 310	12 645
4	14 641	14 055
5	16 105	15 622
6	16 749	16 414
7	17 419	17 245
8	18 116	18 116
9	18 841	18 841
10	19 594	19 594

表 18 – 3 给出了按照评估利率 8% 计算出来的每个未来退保现金价值在承保日及前 5 年中每个整年数时点的现值。

表 18－3　　未来退保现金价值的现值

保单年度	现金价值	各保单周年日					
		0	1	2	3	4	5
0	9 300	9 300					
1	10 230	9 472	10 230				
2	11 374	9 751	10 531	11 374			
3	12 645	10 038	10 841	11 708	12 645		
4	14 055	10 331	11 157	12 050	13 014	14 055	
5	15 622	10 632	11 483	12 401	13 393	14 465	15 622
6	16 414	10 344	11 171	12 065	13 030	14 072	15 198
7	17 245	10 062	10 867	11 737	12 676	13 690	14 785
8	18 116	9 788	10 571	11 416	12 329	13 316	14 381
9	18 841	9 425	10 179	10 994	11 873	12 823	13 849
10	19 594	9 076	9 802	10 586	11 433	12 348	13 335

对于前 5 年中的每一年，划线的数字即是退保现金价值产生的最大现值。以第 3 年为例，第 3 年末的现金价值的现值为 12 645，在第 4 年末现金价值在第 3 年的现值是 13 014，第 10 年末现金价值在第 3 年的现值为 11 433。贴现时只考虑利率，而不考虑死亡率因素。从表 18－2 可以看出，第 5 年末的退保现金价值 15 622 在前 5 年的每年总是产生评估的最大现值。这样，保单第 3 年末的准备金为 13 393，是第 5 个保单年度退保现金价值的现值。

以上计算说明了如何提前知道哪个期间将产生最大现值，一般而言，对于趸缴保费延期年金，应注意下列事项：

（1）如果年金转换率的计算基础比评估基础更为保守，或者如果利用退保现金价值来确定未来保证年金给付，那么未来保证年金给付将不再进入准备金的计算，这是因为未来保证年金给付的现值通常小于在年金支付日时的现金价值；

（2）对于没有退保费用的保单，如果保证账户价值积累利率小于评估利率，则产生最大现值的现金价值正是评估日的现金价值。如果这个保单的保证积累利率在评估日以后的数年内大于评估利率，而以后的利率等于或小于评估利率，那么最大的现金价值产生于积累利率大于评估利率最后一年末的现金价值。如果保单的保证积累利率总是大于评估利率，则产生最大现值的现金价值是保单期满日的现金价值；

（3）对于有退保费用的保单，如果保证积累利率与退保费用的综合结果在 n 年内大于评估利率，则第 n 年末的现金价值的贴现产生最大现值。如果保证积累利率与退保费用的综合结果有时高于评估利率，有时低于评

估利率，则有必要计算许多时点现金价值的贴现值，以找到哪个现金价值将产生最大现值。

在上述的计算中，为解释第 6 年现金价值的现值小于第 5 年现金价值的现值，计算第 5 年和第 6 年的实际利率

$$i_5=\frac{CSV_5-CSV_4}{CSV_4}=\frac{15\ 622-14\ 055}{14\ 055}=11.15\%$$

$$i_6=\frac{CSV_6-CSV_5}{CSV_5}=\frac{16\ 414-15\ 622}{15\ 622}=5.07\%$$

因为第 5 年的实际利率大于评估利率 8%，第 1 年至第 4 年的实际利率分别为 10%、12.8%、11.2% 和 11.15%；而第 6 年的利率小于评估利率 8%，第 7 年至第 10 年的实际利率为 6.16%、5.05%、4% 和 4%，都小于评估利率 8%，则在前 5 年内，第 5 年末的现金价值产生最大现值。而 5 年后，当年的现金价值将产生最大的现值。

【例 18－6】 趸缴保费数额为 1 万元，没有附加费用，保证利率在 1～4 年为 9%，以后为 5%，退保费用为和例 18－5 的相同。

评估利率为 8%，死亡给付等于退保现金价值，8 年以内不允许年金转换。

表 18－4 给出了在保单前 10 年每年末的保证账户价值积累值以及退保现金价值。

表 18－4　　保证账户积累值以及退保现金价值

保单年度	账户价值	现金价值
0	10 000	9 300
1	10 900	10 137
2	11 881	11 168
3	12 950	12 303
4	14 116	13 551
5	14 822	14 377
6	15 563	15 252
7	16 341	16 178
8	17 158	17 158
9	18 016	18 016
10	18 917	18 917

表 18－5 给出了按照评估利率 8% 计算出来的未来退保现金价值在承保日及前 5 年中每个整年数时点的现值。

表 18－5 未来退保现金价值的现值

保单年度	现金价值	各保单周年日					
		0	1	2	3	4	5
0	9 300	9 300					
1	10 137	9 386	10 137				
2	11 168	9 575	10 341	11 168			
3	12 303	9 767	10 548	11 392	12 303		
4	13 551	9 960	10 757	11 618	12 547	13 551	
5	14 377	9 785	10 568	11 413	12 326	13 312	14 377
6	15 252	9 611	10 380	11 211	12 107	13 076	14 122
7	16 178	9 440	10 195	11 010	11 891	12 843	12 870
8	17 158	9 270	10 012	10 812	11 677	12 612	13 621
9	18 016	9 012	9 733	10 512	11 353	12 261	13 242
10	18 917	8 762	9 463	10 220	11 038	11 921	12 874

在许多情况下，用分析的方法确定哪个现金价值将产生最大现值并不容易，因此在设计保单时就应当注意到，一些产品的特点使得分析变得困难或者不可行。

2. *产品其他特征的评估*。对于趸缴保费延期年金，许多保单的一些产品设计使准备金的计算复杂化，主要包括：

（1）死亡给付大于退保现金价值。许多趸缴保费延期年金在年金受领日前的死亡给付等于未扣除退保费用的账户价值。另外，有些保单则规定最小死亡给付等于已付保费数额。在实务中，为了简化计算过程，按照上述计算方法，现值计算忽略了死亡给付的影响而且贴现时只考虑利率因素，然后再计算死亡给付超过现金价值部分的现值（称为死亡给付准备金）。因为这部分死亡给付准备金的数额相对于其他准备金较小，其计算一般采用较为粗略的方法。通常使用的近似方法是：死亡给付准备金等于所有未来死亡给付超过现金价值的部分，在评估利率和评估生命表基础上计算出来的现值总和。更为准确的方法是：死亡给付准备金等于产生最大现值的年末死亡给付超过现金价值的部分，根据评估利率和评估生命表计算而得的现值总和。

（2）退保费用豁免（Bailout Provisions）。许多带有退保费用的延期年金，当目前不保证账户积累利率低于初始利率某个范围时，提供一个退保费用豁免，使得全部或部分退保费用在有限期间内可以免除，这时含有一个保证储备。这种储备设计用以减轻过去购买者的恐惧，这些人可能会怀疑保险公司在他们的资金被锁入具有高退保费用的保单时，有可能试图降

低具有吸引力的初始利率。显然，当保证储备在评估日有效时，不再使用退保费用，计算当前现金价值在准备金中的贡献时不再考虑退保费用。实务中，在多数情况下这种方法计算的准备金等于在这种条件下的当前账户价值。一般情况下未来保证给付值不能因“较大的”偶然出现的退保费用而减少，尽管退保现金价值并没有此项要求。保证储备退保费用在使用的利率大于长期寿险（20 年或更长）最高利率时发生，即采用比 20 年或更长期限的寿险允许的最高评估利率还要高时，这种情况下的退保费用是“较大的”。对于这样的保单，其准备金必须是下面两者中较大者，①在评估日没有任何退保费用的账户价值；②在确定未来现金价值时忽略退保费用而计算出的准备金值。

【例 18 -7】 保费收入为 1 万元；保证利率：前两年 8%，以后为 4%。退保费用如表 18 -6 所示：

表 18 -6

保单年度	退保费用：账户价值的比例（%）
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6 年以后	0

保证储备利率为 7%；评估利率为 6%；长期寿险利率为 5.5%。

表 18 -7 给出了承保日与前 4 年中每年末的账户价值、现金价值和现金价值在承保日的现值，这里的现值是不考虑退保费用豁免因素的现值。

表 18 -7　　年末账户价值、现金价值及其现值

保单年度	账户价值	现金价值	现值
0	10 000	9 500	9 500
1	10 800	10 260	9 679
2	11 664	11 197	9 965
3	12 131	11 767	9 880
4	12 616	12 364	9 793

我们发现这里出现了“较大的”现值先增后减问题，此问题只发生在第 3 年，因为前 2 年的保证利率为 8%，而保证储备利率只有 7%。

对上述情况②，忽略未来的退保费用，得到表 18 -8。

表 18－8　　现金价值、忽略退保费用的现金价值及其现值

保单年度	现金价值	现金价值忽略退保费用	现值
0	9 500	9 500	9 500
1	10 260	10 260	9 679
2	11 197	11 197	9 965
3	11 767	12 131	10 185
4	12 364	12 616	9 993

这种方法中承保时的准备金为 10 185 元。

对上述情况①，则可得出表 18－9。在此表中，承保时的准备金为 10 381 元。

表 18－9　　没有退保费用的现值

保单年度	账户价值	现值
0	10 000	10 000
1	10 800	10 189
2	11 664	10 381
3	12 131	10 185
4	12 616	9 993

取①和②两者中较大者，则保单承保时的准备金为 10 381 元。

（3）部分退保的退保费用豁免。许多有退保费用的趸缴保费延期年金都包含部分退保的优惠，即保单持有人每年有权提取积累账户价值的一个明确比例，而享受免收退保费用。但是，这种权利通常只允许在保单每个整数年后的一定期限内行使（如 30 天）。保险公司控制费用豁免的部分退保的方法有：①综合法，调整退保费用以反映出这种优惠。例如，如果保险公司允许账户价值的 10% 享受免费退保的优惠，综合法是指将每年的退保费用降低 10%，即如果保单的退保费用为 5%，在这种情况下则变为 4.5%；②逐一法。当保险公司考虑到每次可能发生的费用豁免退保时，则对保单规划出在下一年没有免费退保和有免费退保的情况，以此类推，进而可勾画出一棵"树"，这棵树依赖于保单设计，而且在计算负债时通常不能使用汇合的方法。在实务中，保险公司往往使用第一种方法，而用第二种方法去检验，通常第一种方法产生的准备金小于第二种方法产生的结果。

（4）双轨利率。保险公司为了鼓励保单持有人能够尽可能不退保而等到领取年金，将账户价值分为两个计算，一个用于确定不丧失价值和死亡给付，另一个则用于计算未来的年金给付，其中用于计算未来年金给付的积累利率高于用于确定不丧失价值和死亡给付的利率。为了评估这类保单，

根据准备金计算的基本方法，对于未来退保和死亡给付账户，则是将其按照评估利率贴现至评估日。而第二个账户则是用于计算账户余额的积累，将来根据保证购买率用于购买年金，这些年金按照评估利率和评估生命表贴现至领取日开始，然后再按照评估利率贴现至评估日。准备金是这两者中较大的一个。第二个账户在准备金计算中是否很大，重要因素是保证年金购买率与死亡率和利率评估基础的关系。如果保证年金购买率较大，则第二个账户将产生较大的给付水平，相反则较低。

趸缴保费延期年金有时也免除了在年金领取时的退保费用，这同样可能造成用于购买年金的账户价值超过当前现金价值，这种影响比双利率制的影响会小很多。在计算准备金时使用保守的保证年金购买率可以消除这种影响。如果保证年金购买率不充分保守，从理论上讲，保单应该采用上述的双利率进行评估。在实务中，主要因为提前领取年金的情况很少，因此这个影响往往被忽视掉。

（5）利率指标。有些趸缴保费延期年金保证了一个最小利率，如4%或5%，同时也保证了积累利率不能小于账户标明的利率指标。对于利率指标年金保单的准备金计算，通过假设未来积累利率等于法定评估利率而消除了未来保证因素。这就是说，即使利率指标可能大于评估利率，准备金数额也不相应提高。另外，如果某保单年度没有退保费用，或者账户价值余额与退保现金价值相同时，准备金的数额则等于评估日的账户价值余额。

18.2.2　年缴保费年金的评估

前面所讲的准备金评估方法同样可以应用到年缴保费年金的准备金评估中，不同之处在于未来所有的给付现值减去未来评估保费收入的现值，差额即为准备金，评估保费收入是未来毛保费收入的一部分。

【例 18－8】　在某年金保单中，已知条件如下：年保费 1 000 元；预先附加费用为保费的5%及 25 元之和；保证利率为第 1 至第 5 年为 10%，以后为 4%；退保费用如表 18－10 所示：

表 18－10

保单年度	退保费用：账户价值的比例（%）
1－5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10 年以后	0

评估利率为 8.75%；死亡给付等于退保现金价值。

表 18－11 给出了保单前 10 年中每年末时，在支付下期保费前的保证账户价值积累值和退保现金价值。

表 18－11　　保证账户价值积累值和退保现金价值

保单年度	账户价值	现金价值
1	1 018	967
2	2 137	2 030
3	3 368	3 200
4	4 722	4 486
5	6 212	5 901
6	7 422	7 126
7	8 681	8 421
8	9 991	9 791
9	11 352	11 239
10	12 768	12 768

表 18－12 给出了保单前 10 年每年末的期末现金价值的现值，未来评估保费收入的现值和两者的差。黑体字表示每一评估年中差额最大值。

表 18－12　　现金价值的现值

未来保单年度	现金价值	各保单周年日					
		0	1	2	3	4	5
1	967	889	967				
		925	0				
		(36)	**967**				
2	2 030	1 716	1 867	2 030			
		1 776	925	0			
		(59)	942	2 030			
3	3 200	2 488	2 705	2 942	3 200		
		2 558	1 776	925	0		
		(70)	930	2 017	3 200		
4	4 486	3 207	3 488	3 793	4 125	4 486	
		3 277	2 558	1 776	925	0	
		(70)	930	2 018	3 200	4 486	
5	5 901	3 880	4 219	4 588	4 990	5 427	5 901
		3 938	3 277	2 558	1 776	925	0
		(59)	942	**2 031**	**3 214**	**4 502**	**5 901**

续表

未来保单年度	现金价值	各保单周年日					
		0	1	2	3	4	5
6	7 126	4 308	4 685	5 094	5 540	6 025	6 552
		4 546	3 938	3 277	2 558	1 776	925
		(239)	746	1 818	2 983	4 249	5 627
7	8 421	4 681	5 091	5 536	6 021	6 547	7 120
		5 106	4 546	3 938	3 277	2 558	1 776
		(424)	544	1 598	2 744	3 990	5 345
8	9 791	5 005	5 443	5 919	6 437	7 000	7 613
		5 620	5 106	4 546	3 938	3 277	2 558
		(615)	337	1 373	2 499	3 723	5 055
9	11 239	5 283	5 745	6 248	6 794	7 389	8 035
		6 093	5 620	5 106	4 546	3 938	3 277
		(810)	125	1 142	2 248	3 450	4 758
10	12 768	5 519	6 002	6 527	7 098	7 719	8 394
		6 527	6 093	5 620	5 106	4 546	3 938
		(1 009)	(91)	907	1 992	3 173	4 456

第五个保单年度末的现金价值在第 2 年末的现值为：

$$\frac{5\ 901}{(1.0875)^3}=4\ 588$$

未来评估保费收入，即毛保费扣除预先附加费用后的净保费的现值为：

$$(1\ 000\times0.95-25)\cdot\ddot{a}_{\overline{3}|}=2\ 558$$

两者之差为：4 588 − 2 558 = 2 030（元）

对于年缴保费年金使用分析方法确定准备金比趸缴保费延期年金要困难得多。

18.2.3 可变动保费年金的准备金

对年金准备金的评估，要求将未来保费收入考虑到计算中去，但是由于可变动保费的年金一般对未来的保费支付不做任何要求，因此通常采用趸缴保费延期年金的方法计算准备金，即在评估日假设未来不发生保费收入。在给定条件下，可变动保费年金的准备金可能大于或者小于相应的固定保费年金的准备金，如对后端附加费用较高的产品，当暂时保证利率大于评估利率时，可变动保费年金的准备金较大；而对没有后端附加费用的产品，当利率相近时，可变动保费年金的准备金较小。

18.2.4 即期年金

在即期年金中，如果没有退保现金价值，准备金等于年金的现值，与前面讲述的方法一致。如果即期年金具有现金价值，有可能这些年金现金价值中的某个现值大于年金给付的现值。一般来讲，即期年金的评估利率可以低于延期年金的评估利率。美国的法定准备金评估框架中的即期年金定义为：(1) 年金承保日与第一次年金领取日的时间不超过13个月；(2) 其后的年金支付至少以年付的形式持续5年；(3) 年金的支付方式：在任何一年的支付不能大于前一年支付额的115%。

在延期年金的情况下，如果已开始领取年金，大多数保险公司在年金领取日（作为评估日）对一个“新的即期年金”进行评估。许多即期年金规定，无论年金受领人生存与否都提供一个明确期限的年金支付，这段确定期间的年金支付可看作是一个确定年金，而后来的年金支付则看成是一个延期年金，称这种年金为最低保证年金。例如，10年保证给付的终身年金的准备金应等于 $\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_x$，因为这种保单是一种即期年金保单，因此计算这两部分的利率都是即期年金的利率。

§18.3 变额保险的评估

变额寿险和变额年金的现金价值与保险公司设立的独立账户的资产相匹配。对于变额寿险或变额年金，保险公司对投资结果（不包括保证最低死亡给付）不做任何保证，投资结果取决于独立账户的投资收益。在前面所讲到的CRVM准备金方法和年金的评估方法都是根据保单的未来保证，用未来法确定最低准备金数额，而变额产品没有未来的投资保证，利用传统的准备金方法来评估变额保单面临一些问题。为此，美国保险监管官协会针对不同特点的变额产品分别规定了具体的评估方法，下面所介绍的主要针对两种产品：变额寿险和变额年金。其中，变额寿险又分为3种不同形式：固定保费、可变动保费和两者的混合形式。

另外，一些保险公司为变额保险提供了投资账户转换为普通账户的选择权，如果投保人选择的投资账户为公司的普通账户，那么准备金方法与非变额保单情形下的方法极为相似。

需要注意的是：在变额产品中，保证死亡给付的产品特征非常普遍，对保证死亡给付需要额外计算准备金，在此也特别介绍。

18.3.1 变额寿险

1. 固定保费变额寿险。固定保费变额寿险是按期缴纳固定保费的变额

寿险。这种保单都是预先附加费用保单，死亡给付根据投资收益状况进行调整，根据调整的方法不同，分为两种产品形态：

（1）变额寿险的任何时点的死亡给付额是初始保单面值与某比率的乘积，该比率为实际现金价值除以用假设投资回报率（Assumed Investment Return，AIR）计算得到的现金价值。如果保单具有保证最小死亡给付（GMDB），那么它一般与保单面值相等。

（2）公平设计。在这种保单的设计中，任何超过假设投资回报率（AIR）的投资净收入都以 AIR 为基础作为趸缴净保费，购买缴清变额保险；如果投资收益小于假设投资回报率，附加缴清部分就被取消，而且在这种情况下提供保证最小死亡给付。

图 18－1 描述了以上两种固定保费变额寿险，图中曲线以下部分表示在 AIR 假设下的现金价值。如果保证给付为 G，那么在时刻 t，AIR 假设下的传统现金价值为 Y，实际现金价值为 Z。

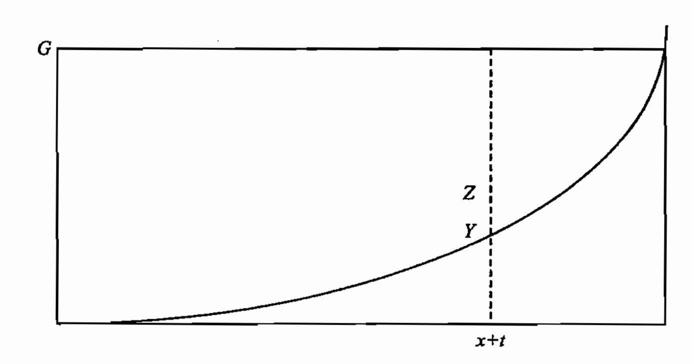


图 18－1 两种固定保费变额寿险的现金价值

如果忽略保证最小死亡给付，对于第一种产品形态，当前保险金额为：

$$FA^{Current}=FA^{Initial}\times\frac{CV_t^{Current}}{CV_t^{Initial}}$$

对准备金，可以使用当前的保险金额，按照传统保险的 CRVM 方法计算：

$${}_t^mV_{x:\overline{n}|}=FA^{Current}\times\left[A_{x+t:\overline{n-t}|}-{}^mP_{x:\overline{n}|}^{CRVM}\times\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right]$$

对于第二种产品形态，当前保险金额为：

$$FA^{Current}=FA^{Initial}\times\frac{CV_t^{Current}-CV_t^{Initial}}{A_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

其中 $A_{x+t:\overline{n-t}|}$ 是根据假设投资回报率（AIR）计算得到的，准备金为：

$${}_t^mV_{x:\overline{n}|}=FA^{Initial}\times\left[A_{x+t:\overline{n-t}|}-{}^mP_{x:\overline{n}|}^{CRVM}\times\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right]+\left[FA^{Current}-FA^{Initial}\right]\times A_{x+t:\overline{n-t}|}$$

对于上述两种固定保费变额寿险都可以采用非变额寿险的方法进行评估，即按评估日的保险金额、合同约定缴费期间、保险期间，按非变额寿险的方法计算准备金。特别地，采用公平设计的保单需要拆分成两份合同。

另外对提供保证死亡给付特征的产品，还需要计算额外的准备金。

2. 变动保费和混合保费的变额寿险。目前在寿险市场上，很多保险公司都提供变动保费变额寿险，或称为变额万能寿险（VUL）。这些保单与传统的万能寿险在许多方面非常相似，如死亡成本是定期计算且以实际风险净额为基础，从积累账户价值中扣除。这种保单的费用可能采用前端附加费用的方式，也可能采用后端扣费的方式，所以保单现金价值等于账户价值减去规定的退保费用。与固定保费变额寿险不同，变动保费变额寿险死亡给付不一定随独立账户的投资结果而变动。变额万能寿险（VUL）与传统万能寿险唯一的区别是 VUL 保单的积累账户价值取决于独立账户的投资，随独立账户的投资结果变动，而不是取决于公司的结算利率。

混合保费产品与可变动保费产品非常类似，准备金的计算与可变动保费产品的准备金计算相同。在混合产品中，采用的不是全部的可变动保费，使用的是定期保费概念，但保单持有人可以多缴保费或者少缴保费。

普通万能寿险的评估方法将未来保证给付利用未来法进行规划，这种方法如果不进行修正是不适用于变额万能寿险的。关于变额万能寿险产品的准备金，在美国的法定准备金要求中，需要按照 NAIC 的万能保险模型的规定（Universal Life Insurance Model Regulation）进行计算，需特别说明的是，在规划未来的保单利益时可以选用以下四种利率假设来进行：①对于有长期利率保证的账户，使用该保证利率；②用评估利率扣减保险合同中已经明示的资产管理费；③4%的利率；④保单贷款的利息率。

另外，对于变额保险需要特别强调，无论准备金如何提取，独立的投资账户的资产值不能小于客户的账户价值总和，否则账户的资产与对客户的负债就可能不匹配。

18.3.2 变额年金

上节讲到的年金准备金的计算方法，通过未来准备金方法计算未来保单保证的贴现值来计算准备金，不能应用于变额年金。对于预先附加费用的变额年金，一般认为账户价值是较好的准备金，而正如变额万能寿险一样，对于后端附加费用的保单如何考虑则是一个问题。在变额万能寿险中使用的两种方法可用来确定在变额年金准备金方法中用于规划的利率：（1）对于有长期利率保证的账户，使用该保证利率；（2）用评估利率扣减保险合同中已经明示的资产管理费。

同样，独立账户的资产余额至少应等于客户的账户值总和。

18.3.3 保证最小死亡给付准备金

许多变额保险中为了保证客户在变动的投资收益条件下，仍能享有一

定的死亡保障，提供了保证最小死亡给付（GMDB），GMDB 是保单嵌入式选择权的一种最简单的形式。典型的固定保费变额寿险的 GMDB 在保单有效期内总存在，死亡给付总是不低于保单的初始保额，这种保证与独立账户资金投资行为无关。凡是含有 GMDB 的保单都必须具备附加准备金，而且要求保持在保险公司的普通账户里。通过对 GMDB 的讨论，对保单嵌入式选择权的混合评估方式和独立拆分评估方式有一个直观的概念。保险保障的不断创新，指数连结年金（Equity Index Annuity）等的出现，既对现有的准备金评估理念造成了挑战，同时也加深了我们对保险合同和金融合同关系的理解，促进了一些先进的评估模型的发展。

1. 固定保费寿险保单。固定保费变额寿险的 GMDB 准备金需按两种方法分别测算：一年定期法（OYT）和到达年龄均衡准备金方法，准备金是两者中的较大者。

（1）一年定期法。固定保费变额寿险的一年定期准备金定义为 GMDB 大于其他应付的死亡给付部分的定期成本，其覆盖期间为由评估日开始的一整年，假设独立账户资产的当前价值即刻减少 1/3，而且随后实际投资回报率等于假设投资回报率（AIR）。投资回报在资产立刻减少后等于 AIR 的假设简化了计算过程。对于采用公平设计法的产品，只有当投资回报超过 AIR 时才购买缴清附加。类似地，只有当投资回报小于 AIR 时才购买负的缴清附加。这样，如果投资回报等于 AIR，则不包含 GMDB 的死亡给付额就保持不变，这意味着 GMDB 超过其他应付的死亡给付的部分可以在评估日计算出来，而且在一年内不需要对投资结果进行规划。

（2）到达年龄均衡准备金方法。到达年龄均衡准备金等于保单上一年到达年龄的均衡准备金加上（或减去）当前“支付”的“剩余”。到达年龄均衡准备金和“剩余”在任何年度都不能小于 0。这里的“剩余”等于上一年到达年龄的均衡准备金的一个增加值或减少值，增加值是指上一年到达年龄均衡准备金在评估利率下的增加值，而减少值以 CMDB 超过下一年其他应付的死亡给付部分为基础，根据评估利率和评估死亡率计算得到。这里假设初始剩余为 0。

上面提到的“支付”是均衡年保费，每年计算一次，或正或负，其值等于

$$\frac{A_{x+t}^{GMDB}-A_{x+t}^{SADB}-\text{剩余}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n}|}} \qquad (18-10)$$

这时的独立账户死亡给付（SADB）是指没有 GMDB 时应该支付的死亡给付；n 表示对于这种方法收取费用的未来年数，一般为未来保费缴付年数；SADB 是根据一个假设的独立账户的净回报率计算得到的，这个净回报率可以与假设投资回报率不同，但在任何情况下不能超过允许的最大评

估利率。

用于计算一年定期准备金和到达年龄准备金的评估利率和评估死亡率可以与计算基础准备金[①]的假设不同，但必须确定这个标准是评估寿险保单所允许的标准。对于变额万能寿险，其 GMDB 准备金等于一年定期准备金，除非定期成本是在整个 GMDB 期内而不是在一年内测量的，而变额万能寿险产品没有到达年龄均衡准备金。值得注意的是，如果在 GMDB 期间计算一年定期准备金，可能产生极大的准备金数额（特别是趸缴保费保单），同时也会使计算这些准备金变得极为困难。

2. **可变动保费变额寿险产品**。典型的可变动保费变额寿险保单只在某些期间才具有 GMDB，在这些期间，保单项下的账户价值不足以支撑为保持保单有效而进行的扣除。可变动保费变额保单的 GMDB 准备金定义为：GMDB 所提供的假设独立账户资产的当前值立即减少 1/3，而且以后的净投资收益率等于评估利率时的定期成本。可变动保费寿险保单没有到达年龄均衡准备金，而且定期准备金也不一定限制在一年之内。

3. **变额年金**。大部分的变额年金都提供一个保费退还的死亡给付保证，而这会给保险公司带来风险，因为当账户值下降时死亡给付可能会超过法定准备金。因此，保险公司都对变额年金的 GMDB 提留一定的准备金作为储备。这种方法非常复杂，需要按照以下步骤进行：

（1）需要得到评估日的账户价值、保证最小死亡给付的类型和其他必要的保单信息；

（2）使用评估利率扣减保险合同中明示的资产管理费，忽略 GMDB，从评估日开始规划未来的账户价值和其他保险利益；

（3）通过以上规划得到独立账户准备金（Separate Account Reserve）；

（4）根据账户资产的分类，套用一个固定的资产减值比例和资产收益率，从评估日开始规划未来的账户价值；考虑 GMDB，规划未来保险利益；

（5）通过步骤 4 中的规划，得到保单综合准备金（Integrated Reserve）；

（6）保单综合准备金减去独立账户准备金，差额和 0 较大者就是 GMDB准备金。

本质上来说，无论附加在哪种合同上，GMDB 准备金的评估方法应该是一致的，但是由于美国的法定准备金评估方法对于变额寿险和变额年金的处理方法不一致，导致了附加在其上的 GMDB 的处理方法也很不一致，这是不足之处，目前 NAIC 也在采取努力，试图解决这个问题。

进一步讲，现行的评估体系，无论是中国的精算规定、中国正在制定

---

① 基础准备金是在假设利率（AIR =4%）下计算的，包括 GMDB 下的 CRVM 准备金和缴清附加两部分。

的财务准备金评估方法，还是美国的法定准备金评估方法、美国的一般会计准则，在处理传统保险、万能保险、投资连结保险（类似于本章中的变额保险）时，评估方法不一致的地方非常多。这些评估方法是由于历史的沿革而形成的，这些不一致之处也正是需要读者思考、改善的地方。正是对这些问题的研究，促进精算技术更好地向前发展。

习　题

1. 在例（18－5）中将1—5年的保证利率改为9%，求0—10年度现金价值及第4年的准备金。

2. 在例（18－7）中将保证利率改为：前3年为8%，3年以后为4%，重新计算表18－5、表18－6和表18－7。

3. 在例（18－8）中，如保证利率为：1到5年为9.5%，以后为4%，求0到5保单年度的准备金。

4. 考虑固定保费变额寿险，其设计是公平设计，具有下列特性：

男性，35岁；AIR＝4%；最大允许评估利率：6%；面值（即保额）：10万元；

在第5保单年度的实际现金价值为6 238元；在第5保单年度的表格现金价值为5 316元（表格现金价值是在假设利率（AIR）下计算的现金价值）。

已知：

i	x	$1\,000A_x$	$\ddot{a}_x$	$1\,000q_x$
4%	35	246.82	19.5826	2.11
4%	36	255.13	19.3667	2.24
4%	40	290.81	18.4389	3.02
6%	35	139.51	15.2021	2.11
6%	36	146.08	15.0860	2.24
6%	40	175.31	14.5695	3.02

$1\,000q_{39}=2.79$

求：（1）第五保单年度的基础准备金；

（2）用①一年定期准备金；②到达年龄准备金求第五保单年度的GMDB准备金。

5. 已知某年金：

年保费：1 000元

预先附加费用：3%

保证利率：1～3年8%，以后4%

退保费用：5/4/3/2/1/0%

评估利率：7%

（1）假设为年缴保费年金，求第一年末的准备金。

（2）如果本年金为可变动保费年金，保单签发时缴费1 000元，第二期保费于第一年末尚未支付，求第一年末的准备金。

第十九章　偿付能力监管制度介绍

学习目标

- □ 了解偿付能力额度监管制度的起源及发展以及保险行业偿付能力额度监管制度发展的内部和外部原因，初步认识“偿付能力”这一基本概念
- □ 了解欧盟、美国、加拿大及我国偿付能力额度监管制度的基本内容
- □ 掌握美国风险资本（RBC）监管下的相关计算
- □ 掌握我国目前采用的最低偿付能力的计算方法

保险公司偿付能力（Solvency）简单来讲是指其履行保险合同约定的赔偿或给付责任的能力。保险公司必须具备足够的偿付能力，才能保障被保险人的利益，增强投保人的信心。偿付能力的监管可分为两个层次：一是正常层次的监管。从理论上讲，如果在正常年度没有巨灾发生，只要监督保险公司制定适当、公平、合理的保险费率，自留与其净资产相一致的承保风险，并提足各项准备金，使保险基金增值保值，保险公司就有足够的资金应付赔偿或给付，维持其赔偿或给付保险责任的能力；二是偿付能力额度监管（或称资本充足率监管）。要求保险公司除按监管要求提供各项准备金外，应同时将公司自有资本金维持在一定水平，保证公司在市场出现不利情况时，仍能维持其赔偿或给付保险责任的能力。市场不利情况可能表现为以下形式：发生巨额赔偿或给付，使实际经历的赔偿或给付超出预定的额度；投资由于各种原因出现亏损；费率测算和准备金提存的假设产生偏差，导致少提取了准备金。本章要讨论的偿付能力概念特指后者，即偿付能力额度监管。

§19.1　偿付能力监管简述

本节主要介绍了偿付能力额度监管的相关基本概念及发展背景，同时以美国为例探讨了偿付能力额度监管的发展过程。

19.1.1　偿付能力额度监管的相关概念

1. 最低偿付能力要求。最低偿付能力要求，又可称为最低资本要求，是保险监管部门基于满足公司在遇到市场不利情况下，仍能维持公司正常

偿付能力的最低资本要求。各国在制定最低偿付能力要求标准时，都是基于对市场不利情况（风险）的度量，在具体标准的制定过程中由于考虑到各种风险度量的复杂性，监管部门一般将风险度量的规则进行适当的简化。但随着市场环境的复杂化和公司经营策略及管理水平的差异化增大，简单的计算规则越来越难以准确度量风险和适用所有公司，因此各国对最低偿付能力要求的计算规则有复杂化和灵活化的趋势，允许公司基于自身情况对一些计算过程进行判断。

2. *偿付能力额度*。保险企业偿付能力额度是衡量企业偿付能力大小的标准。偿付能力额度涉及两方面的内容：一是保险企业具备的实际偿付能力额度，实际偿付能力额度是指在任何一个指定日期，其认可资产和认可负债之间的差额；二是保险管理机关要求保险公司必须具备的最低偿付能力额度，即法定偿付能力额度，保险企业法定偿付能力额度是国家或政府主管机关依据立法要求保险企业必须具备的偿付能力额度。

各国对保险企业偿付能力额度的要求不尽相同，计算方法也各异。应该注意的是，计算实际偿付能力额度的资产是指可以立即变现的资产，即认可资产，而不是所有以价值形式体现的动产和不动产，因此公司的实际偿付能力额度虽然与资产负债表中的权益有很大的关系，但在金额上由于非认可资产的影响及其他一些科目的调整，一般存在一定的差异。这主要是因为许多资产特别是固定资产在发生超常年景的赔款时，难以立即兑换成现金用于支付赔款，起不到偿付的作用。

3. *偿付能力充足率*。偿付能力充足率是指实际偿付能力额度与最低偿付能力额度的比例，各国在进行偿付能力监管时，一般要求偿付能力充足率保持在一定的水平之上。我国2008年7月颁布的《保险公司偿付能力管理规定》中特别指出偿付能力充足率与资本充足率是一个概念，偿付能力要求是保险公司经营的一项资本要求。需要注意的是偿付能力充足率的概念与公司资产负债率是完全不同的，偿付能力不足并不等同于我们通常用于描述即将破产的企业时所用的资不抵债的概念。

19.1.2　偿付能力额度监管的动因

保险行业的偿付能力额度监管从无到有，有其特定的背景和行业特点，也有市场环境及管理技术发展的影响。综合来看，保险行业的偿付能力额度监管的形成主要有以下五方面的原因：

1. *保险业的高负债特征*。虽然保险行业为客户提供许多风险保障的服务，但随着储蓄、养老业务在保险行业，特别是寿险行业业务比重的增加，寿险行业越来越具有资产管理的特征，通过对资产管理获得利差越来越成为寿险行业获取利润的重要来源，高负债经营成为行业的基本特征。下面

以2006年至2008年我国证券市场上市公司分行业资产负债率为例说明保险行业的高负债经营的特征（见表19－1）。

表19－1

行业名称	资产负债率［单位:%］		
	2008年度	2007年度	2006年度
银行业	93.89	93.66	93.98
保险业	86.78	81.47	87.37
建筑业	81.20	80.73	87.99
电力、煤气及水的生产和供应业	67.99	57.66	57.32
房地产业	63.91	63.54	65.28
证券、期货业	62.22	74.21	77.04
批发和零售贸易	61.66	63.67	63.25
金融信托业	58.18	58.65	69.58
交通运输、仓储业	57.52	53.12	53.28
综合类	57.25	58.54	61.38
制造业	57.19	55.7	56.22
农、林、牧、渔业	51.48	55.08	53.27
社会服务业	48.37	48.23	48.55
信息技术业	45.05	46.72	51.22
传播与文化产业	44.82	47.45	46.74
采掘业	39.85	39.69	41.84

* 以上数据来自Wind资讯统计的上市公司财务报表数据。

从上述数据我们可以看到，银行业和保险业是资产负债率最高的两个行业，高负债必然带来风险的增加，因此在不能改变行业高负债经营的特点的情况下，必须通过制度要求约束公司对财务杠杆的使用。保险行业的偿付能力监管与银行业的资本充足率的监管在客观上都能实现上述目的。有兴趣的读者可以从巴塞尔协议的发展了解银行业资本充足率监管的发展历程，巴塞尔协议为全球银行业的资本充足率发展提供了统一的监管框架。各国保险行业由于发展阶段和业务结构上的差异较大，要建立统一的偿付能力监管体系将更为复杂，但从主要市场的监管制度发展趋势来看，监管制度的基本框架和思想有趋同的趋势。

2. 保险业资产负债匹配的复杂性。在其他行业，企业负债一般以短期负债为主，1年期以上的负债即列入长期负债，而且长期负债一般金额明确、估值相对简单；与负债对应的资产则大部分是现金、银行存款等流动性较高的资产。在关注这类企业债务的偿付能力时，一般用偿债能力这一概念，管理方法则更多使用传统的财务指标，如流动比例、速动比例、资产负债率等，关注的更多是资产负债时间上的匹配。

保险行业资产负债匹配的难度则要大得多，由于负债的不确定性和长期性，导致不可能有时间上完全合适的资产进行匹配。另外，由于保险行业负债中以长期负债为主，传统的财务管理手段管理流动性的方法无法解决保险行业资产负债匹配的问题。

3. *金融市场的波动性*。如我们所知道，保险行业偿付能力额度监管的历史要远远短于保险行业发展的历史。因此保险行业偿付能力额度监管的动因不仅来自于保险行业的固有特点，也来自于保险行业所处市场环境的变化。

首先是市场利率的波动加剧对财务报表体系提出了深刻的挑战。在利率剧烈波动的环境下，资产负债表中资产与负债价值信息的有效性受到严重影响。一方面，由于记账原则的不同，会出现资产负债价值评估方法不匹配的问题。对于固定利率的资产/负债而言，在采用历史成本记账原则时，不同时期的资产和负债虽然账面价值是相同的，但其内含的利率可能相差巨大；在采用市场价值原则时，利率波动将导致资产价格发生剧烈波动，而负债价格（具体对保险公司而言就是准备金的评估）则很难作出及时、适度的调整。另一方面，资产负债的非价值特征，如久期、凸度等会对资产与负债在利率波动时产生不对等的影响，而这些信息在传统财务报表体系中无法反映。虽然随着世界会计制度改革不断推进，市场价值的评估体系逐步引入到资产与负债评估中，能解决部分价值评估方法不匹配的问题。但是，因为没有有效交易市场的资产与负债仍将大量存在，而且市场有时也会存在失效的情况，评估方法不一致的问题在财务报表体系中仍很难得到彻底的解决。

其次随着金融市场的发展，保险行业资产的结构也经历了一个多样化的过程。权益类的投资在寿险公司的资产组合中有增加的趋势，在一些国家，衍生金融工具也出现在寿险公司的资产组合中，相对于债券而言，这些资产价格的波动性更大。同样这些资产与其对应的负债在市场环境发生变化时，价值也会产生非对等的变化，而这些非对等的影响程度在财务报表体系中无法得到充分揭示。

4. *保险行业风险的多样性*。一般来讲，寿险公司面临的风险可以归纳为市场风险、信用风险、资产负债匹配风险、保险风险等。这些风险在其他行业经营过程中也会大量产生，但就资产负债匹配风险、市场风险、信用风险等风险而言，其风险规模也只有在银行业才能与之相提并论。对寿险公司面临的风险的复杂多样性，有必要建立更为科学合理的制度对这些风险进行度量和管理。而通过对基于风险的资本要求作出规定，使得保险公司在考虑资本要求的情况下，不能通过过多承担风险的方式来获得高额收益，成为了监管部门的必然选择。寿险公司面临的风险的多样性和高负

债的经营特征是保险行业建立偿付能力额度监管制度的主要内在要求。

5. 现代风险管理技术的发展。随着市场环境的变化，寿险公司面临的风险增多，风险管理的技术也在同步发展，破产理论、资产负债匹配管理技术、VaR 风险度量等技术手段的开发和利用为现代保险业建立偿付能力额度管理提供了技术条件。从这一点来讲，偿付能力更应该视为风险管理的概念，而不仅是财务概念。

19.1.3 偿付能力额度监管发展的一般过程

大部分国家保险行业都经历了偿付能力额度监管制度从无到有，从简单到复杂的过程。这一发展过程也同时反映了保险市场环境从简单到复杂，风险管理手段越来越先进的过程。由于我国保险市场发展的时间比较短，而且制度的设计由于有成熟市场可以作为借鉴，为了能更好理解市场环境在偿付能力额度监管制度发展过程中的作用，我们选取了美国偿付能力额度监管制度的发展历程来进行说明，美国的偿付能力额度监管的形成大致经历了以下几个阶段。

1. 1860—1974 年：固定的最低资本限额。传统的最低注册资本或盈余限额要求是各国保险监管当局普遍采纳的对开业资本的要求。美国的保险监管自 19 世纪中期开始发展以来一直致力于将保险公司失去偿付能力的风险限制在一定的可接受范围内。在此期间，有些州不管公司经营何种业务，也不管经营规模，只订立一个最低的开业注册资本额；有些州则根据不同公司的业务种类之不同而相应订立不同的最低注册资本额。在美国，固定的最低注册资本额由立法者主观制订，通常从 50 万美元到 600 万美元不等，并且时有修正。在它实施的将近一个半世纪里，早期破产的保险公司多由于营运方面的不当或因巨灾发生而失去偿付能力，各保险公司受到保险监管机构严格的投资限制，投资策略较为保守，几乎没有保险公司因投资失误而倒闭，因此，在这期间，固定的最低资本限额并未受到严峻挑战。这一阶段反映了早期保险行业以风险保障为主，资产结构相对简单的特点。这一阶段，保险行业的监管与其他行业对资本要求的监管方式没有太大差别，注重于最低注册资本额及盈余分配的监管，尚没有形成偿付能力额度监管制度。

2. 1974—1993 年：财务比率监管时期。随着保险公司数目增加，各州保险监管机构的人力显得不足，为此，NAIC 在 20 世纪 70 年代初期开发了透过财务比率关系的测定来监督保险公司的财务状况，尽早发现有问题的公司的监督工具。根据重要性和相关性原则，初期的 24 项测试指标几经修改、删减，形成稳健或偿付能力测试（Solidity or Solvency Tests）。1975 年该测试又分化为分别适用于产险和寿险的两套指标，强调了偿付能力的重

要性，称为监管测试（Regulatory Tests）。1976 年称之为预警系统（Early Warning System）。1978 年起才被称为保险监督信息系统（Insurance Regulatory Information System），即 IRIS。IRIS 以保险公司的年度财务报告为基础，计算规定的多项财务比率，若某公司有四项以上的比率超出合理区间，就被列为优先检查对象，需要被进一步检查。

自 1990 年起 NAIC 在 IRIS 基础上增加了一些新的检测指标，将全部比率加权汇总并使用 Logistic 回归法确定某公司的财务状况，该值若大于 NAIC 设定的值，表明公司的财务风险较高，并需进一步结合过去五年的财务状况来决定该保险公司是否应被列为优先受检对象，这一套完整的方法被称为财务分析侦察跟踪（Financial Analysis Surveillance Tracking），简称 FAST。

虽然上述方法经过不断修订，但这些方法都存在固有的缺陷，即严重依赖保险公司的财务报表，对未来的经营状况无法分析预测，同时报表本身的准确真实程度对分析结果有决定性作用。而在前文的分析中已经提到，在剧烈波动的金融市场中，资产与负债之间由于估值方法上存在的缺陷，以及其更关注价值变动、无法反映资产负债期限的特点导致财务报表无法提供充分、完整的监管信息。

在此阶段，保险行业的监管部门已开始尝试采用一些创新的手段来对保险公司的偿付能力状况进行监管。现代风险管理理论的出现为保险公司的风险识别、计量和评价提供了有力的工具，资产风险、承保风险、利率风险、行业风险、附属机构风险等的分类、计量，促进了保险监管机构的监管技术的革新。

3. 1994 年至今：RBC（Risk Based Capital）规则正式颁布并实行。从 20 世纪中期开始，经济环境发生变化：一方面，资本市场日益发达，共同基金的发展使保险公司推销保险商品的竞争日趋激烈，投资报酬压力空前加大，人寿保险公司不得不在储蓄型产品如递延年金中提供更有利于客户的投资保证契约等；另一方面，保险公司在被迫给予投保人极高的保证利率的压力下放弃了保守的投资策略，投资于高风险、高报酬的证券，发放商业不动产贷款，购买担保债券甚至垃圾债券等。但进入 20 世纪 80 年代后，美国的利率水平一路下滑（参见图 17－1），使得上述高风险投资工具和房地产的价值大大缩水，保险公司无法如预期的那样取得相当于向客户承诺的保证利率的投资收益，保险公司的亏损严重。同时，公司的资产负债严重不匹配，因为利率下降引起保单持有者的保单质押贷款申请增加，加剧了保险公司的现金流出。在此期间，美国保险监督官协会虽然先后使用过 IRIS 和 FAST 这两套财务比率指标来分析保险公司的财务状况，以预测可能出现偿付能力危机的公司，但失去偿付能力的保险公司的数量和规

模都显著增加。

在此背景下，美国的保险监管当局认为固定最低资本限额的规定不但缺乏弹性，对于规模较大的公司根本无法限制，而且无法捕捉保险公司在承保及投资方面承担的风险。因此，发展一个较具弹性且能反映整体经营风险的监管工具已成为当务之急。

与此同时，同样属于金融行业的银行业也被同样的问题所困扰。20 世纪 80 年代末和 90 年代初，同样受到利率长期走低的重大影响的储贷协会大量破产倒闭，迫使银行业监管机构重新审视银行业的监督工具。1989 年，由比利时、法国、加拿大、德国、意大利、日本、卢森堡、挪威、瑞典、瑞士、英国及美国共 12 国银行监管机构、中央银行的代表组成的巴塞尔委员会（Basle Committee）在银行监督管理的议程中通过了《发展银行业的最适风险基础资本公式》的议案，该公式被美联储和联邦存款保险公司采纳，适用于所有在联邦政府注册的银行。

美国保险行业方面，虽然 Spencer Kimball 早在其著作《保险与公共政策》（1960）中就已提及 RBC 的概念，他指出，固定最低资本标准作为设立保险公司的资本要求可能是合理的，但在保险业务不断增长的情况下，固定资本要求就难以为继了。但全国统一的偿付能力监管制度的设计的则始于 1990 年一次 NAIC 会议中提出的偿付能力议程（Solvency Agenda），NAIC 副总裁建议制订以承保业务变动及其他风险因素为基准而变动其所需资本及盈余的公式，该议程获得了通过。他随即指定 NAIC 的检查监督小组着手进行此项工作，并于 1990 年 3 月 26 日成立 RBC 小组。为了使工作顺利进行，寿险业最适 RBC 的工作小组另成立了一个咨询建议委员会，两个工作小组通力协作，经过对学术文献的深入探讨及广泛的电脑模拟测算，初步完成了 RBC 规则的风险基础资本系数的确定和计算公式的设计。1992 年 12 月，NAIC 在亚特兰大举行的会议上核准了这份关于寿险业的风险基础资本需求公式，规定 1994 年 3 月公布的 1993 年度寿险公司财务报告开始正式使用该规则，向保险监督官报告各寿险公司的 RBC 计算过程及结果。随后，对产险业的 RBC 公式从 1995 年开始应用于当年公布的 1994 年产险公司的财务报告。

从此 RBC 正式成为美国保险监管当局衡量保险公司偿付能力额度的基本方法，保险公司在向其所在州的保险监管机构提交年度财务报告时必须同时报告它们的风险基础资本和调整资本。在计算 RBC 的过程中，必然涉及投资品种、负债结构等属于公司商业秘密的内容，不宜向公众公开，因此保险公司仅被要求公开报告总的比率，即调整资本/风险基础资本，具体计算过程及细节在另一份保密报告中向保险监管机构提交，而这份报告是毋需公开的。

19.1.4　偿付能力额度监管制度的意义

偿付能力额度监管制度的使用者主要包括监管部门、外部评级机构、内部管理部门和投资者。从前述中我们可以知道，在偿付能力额度监管制度的形成过程中，监管部门是主要的推动力量，但保险公司以及外部评级机构也积极参与了偿付能力额度监管制度的形成。偿付能力额度监管制度对不同的使用者具有不同的意义，这些使用者的关注点也不尽相同。

对监管部门而言，偿付能力监管制度提供了一个很好的监控保险公司潜在财务状况变化的工具，弥补了传统财务管理方法不能很好预测保险公司财务状况变化趋势的不足，并为监管部门在保险公司没有失去偿付能力之前介入保险公司经营提供了法律依据。偿付能力额度监管使得监管部门在保险公司失去偿付能力之前，能及时发现公司可能存在的危险，并采取相应措施，如增加资本金、调整资产结构、控制业务量、控制风险暴露水平等，改善公司财务状况变化趋势。对于保险公司依据偿付能力额度监管制度出具的偿付能力报告，虽然监管者也关注公司偿付能力充足率状况的变动原因，但更多是依据偿付能力充足率采取监管行动、偿付能力充足率水平是监管部门关注的重点。

对信用评级机构而言，公司的偿付能力水平是评价公司财务稳健状况的重要参考。信用评级机构对保险公司的信用评级将影响公司的融资成本，如果保险公司是上市公司，同样也会对公司的股票价格造成影响。

对公司内部管理部门而言，偿付能力额度监管制度具有多方面的意义：一是要管理公司的实际偿付能力额度和最低偿付能力额度，使公司的偿付能力充足率水平符合监管要求，并要对公司偿付能力充足率的变化进行预测和管理；二是最低偿付能力额度的计算及偿付能力充足率体现了公司的风险承担状况，是公司风险管理体系的重要组成部分；三是由于偿付能力额度监管将影响公司的利润分配，并产生资本的机会成本，从股东利益最大化的角度出发，公司在进行产品定价时，需要考虑偿付能力对股东价值带来的影响。

§19.2　偿付能力监管制度的简单介绍

本节主要介绍了欧盟和美国偿付能力制度的基本内容，由于我国偿付能力监管制度制定初期较多地参考了发达市场的经验，我国的偿付能力监管制度在本节第三部分介绍。

19.2.1　欧盟偿付能力额度监管实践

统一的欧盟偿付能力监管框架始于1973年的第1号非寿险指令和1979

年的第 1 号寿险指令（European Directive）。参与国家有比利时、丹麦、德国、法国、爱尔兰、英国、意大利、卢森堡、荷兰、希腊、西班牙、葡萄牙、奥地利、瑞典和芬兰（共 15 国），各国关于偿付能力的监管基本相同，其中又以英国最具有代表性。随着 20 世纪 90 年代初期欧洲内部统一市场的实现，为适应保险业发展的要求，从 1997 年开始，欧盟组织了多次关于偿付能力体系修改和完善的评估工作，这些工作可以统称为“偿付能力 I 号工程（Solvency I Project）”。在此期间，欧盟委员会和欧盟理事会于 2000 年颁布了“金融服务行动计划（Financial Services Action Plan）”，目标是在金融服务行业建立“谨慎监管体系（Prudential Supervisory Regime）”的基础上，加快欧洲金融市场一体化建设步伐。按照这一指令的要求，欧盟委员会下属的保险委员会拟定了“偿付能力 II 号工程（Solvency II Project）”，目标是建立一套适应保险市场发展趋势和现实需要、避免过分复杂的全新保险偿付能力监管体系，统一成员国的保险监管立法规范，提高欧洲保险市场的运行效率。欧盟偿付能力 I 号工程的实施才是本章所讨论的偿付能力额度监管制度的开始，因此也可以说欧盟偿付能力额度监管的开始时间与美国相差不大。

欧盟新的偿付能力监管体系将由三个层次组成的：第一个层次是对责任准备金的评估，第二个层次是对资产价值的评估与认可，第三个层次是偿付能力边际的确定（一般称之为固定比例法，即偿付能力边际与资产和负债之间的关系用比例固定下来），这三个层次基本上反映了偿付能力需要考虑的主要因素，其中第二和第三层次构成了本章所讨论的偿付能力额度监管的内容。下面对偿付能力 I 号工程和偿付能力 II 号做简单的介绍。

1. *穆勒报告与偿付能力 I 标准*。1994 年欧盟监管委员会成立并正式启动了偿付能力 I 项目，该项目旨在对欧盟当时的保险监管体系进行全面的评估，在参考和借鉴别国偿付能力监管经验的基础上，提出相应的改革方案，经过详细评估，1997 年 4 月，欧盟监管委员会提交了以该委员会主席穆勒博士命名的研究报告，即“穆勒报告”。报告认为，以往的偿付能力监管体系基本框架可以保持不变，但需要根据市场变化做相应修改和补充；此外，应设置独立的投资指标，以衡量保险公司的投资风险。

欧盟对偿付能力额度监管的主要依据有两个：一是法定偿付能力额度，为保险监管机关规定保险公司必须具备的偿付能力额度；二是实际偿付能力额度，即保险公司认可资产与认可负债的差额。

（1）法定偿付能力额度的评估方法。偿付能力额度评估法的原理是：分析引起实际支出与预计支出偏差的风险因素，然后将各种风险量化成偿付能力额度指标。引起偏差的风险因素包括承保风险（技术方面）、投资

风险、费用风险、管理风险等。这些风险因素的量化值见下表，它们可以看作是欧盟监管部门对相关风险度量的经验值（见表19－2）。

表19－2　　寿险公司风险对应法定偿付能力表

序　号	风险类型	对应偿付能力保证金
1	投资风险	责任准备金的3%
2	死亡率波动风险	保额资本的0.3%
3	费用风险	责任准备金的1%
4	管理风险	最低自有资本的绝对数值的要求

根据上述标准，欧盟国家的寿险和其他长期性保险业务的法定偿付能力额度由两部分构成。第一部分为责任准备金的4%，其主要是针对利率风险、费率风险以及其他类型的风险，包括继续签发新业务的业务量风险。第二部分是“风险保额”的0.3%，这里的“风险保额”是指保险业务的保险金总额与责任准备金之差，在特定的情况下这一比率可以降低。偿付能力额度的计算基于总准备金和风险保额，对于存在再保险的情况这两个比率可适当减少。

（2）实际偿付能力计算与认可资产及负债的评估

保险公司实际偿付能力额度＝认可资产－认可负债

保险公司资产和负债的评估方法在一些情况下，是大概的、原则性的规定，保险公司具有一定的灵活度，但为满足偿付能力额度管理的谨慎要求，监管部门一般规定一个最低基础，保险公司所得评估结果的保守程度都不应低于在最低基础下得到的结果。

资产的价值应以其当时的市场价值为基础评估，并且应满足条例中的认可限制。某些资产在确定法定偿付能力额度时可能由于不符合认可要求，其认可价值可能为零。责任准备金的评估要符合法定最低准备金的要求。

（3）监控措施。对此，欧盟规定两种水平的干预：一是如果保险公司的实际偿付能力额度达不到最低偿付能力额度要求，保险监管者将要求其提交一份短期内扭转财务状况的整改报告；二是针对“所需准备金”（一般为法定偿付能力额度的1/3），即如果保险公司实际偿付能力额度达不到此要求，那么财政部将对该公司采取更加严厉的干预措施，公司必须立即着手增加资本以扭转这一状况。

2. 偿付能力Ⅱ项目及其进展。偿付能力Ⅱ项目是偿付能力Ⅰ项目的延续，它不仅仅是对欧盟现有偿付能力监管系统的简单的评估和改进，而是在借鉴美国、加拿大等国的偿付能力监管工具的基础上，借鉴《新巴塞尔资本协议》监管思路，以更基础更广阔的视角全面审视现有的监管体系。在构建未来欧盟的监管体系时，充分考虑国际保险业的发展、国际保险会

计准则的修改、风险管理理论的成熟、内部控制的完善等诸多因素。偿付能力Ⅱ项目的重点在于设计出一套全面衡量保险公司所面临风险的方法，同时促进保险公司自身开发和完善内部风险管理体系。

在偿付能力及相关资本充足性的规定上，欧盟偿付能力Ⅱ项目大致改革方向如下：

（1）在资产评估方面，由于欧盟现行监管制度没有规定资产评估的具体方法与标准，实际操作中都是由成员国监管机构自行设定，没有可比性，可以借此机会统一资产的评估方法与标准，并借欧盟境内推行统一国际会计准则这一契机，要求成员国公司以市场价值为标准公允评估其资产；统一非认可资产的标准和比例，减少成员国的随意性；同时，引入风险资产评估法（即 VaR），建立资产与资本充足率之间的合理关系模型。

（2）在责任准备金方面，统一责任准备金评估模型和假设的披露规则，要求保险公司根据不同的精算假设对准备金进行多情境敏感性测试，并对赔付率等重要指标基于不同的概率模型进行压力测试，最大限度地反映保险公司面临的负债和风险状况。同时对保险公司的再保险安排和风险控制措施进行全面审慎的评价，防止保险公司通过再保险（尤其是财务再保）和风险转移产品安排进行“监管套利（Supervisory Arbitrage）”。

（3）在偿付能力边际的计算上，应避免现行“固定比例法”的结构性缺限，重点是对保险公司的风险状况进行全面的界定，现行规定主要评价的是保险公司的承保风险及责任准备金与相应资产不匹配的风险，忽视了保险公司面临的运营风险、市场风险、信用风险及总体资产与总体负债不匹配的风险。应鼓励保险公司通过建立内部风险评估模型（Internal Models），对其所面临的风险，尤其是运营风险和市场风险进行全面的评估，并借鉴 RBC 法，确定风险与资本及偿付能力间的对应关系，而不仅仅是偿付能力与资产或负债之间的关系，真正防范和控制保险公司的总体风险（Aggregate Risks）。

“偿付能力Ⅱ号工程”关注的不仅是偿付能力或资本是否充足的问题，更重要的是将偿付能力监管植根于评价和控制保险公司的经营风险，确保保险公司财务稳健的基础之上。

19.2.2 美国监管实践——风险资本法（RBC）

作为国民经济的重要组成部分，保险公司与商业银行有很多相似之处，随着保险业的发展，传统的保险监管也面临着很多难题，特别是破产案例的不断增加使有效预防和及时识别保险公司丧失偿付能力成为保险监管者的首要目标。美国保险监督官协会（National Association of Insurance Commissioners/NAIC）先后针对人寿/健康保险公司（1993）和财产/意外保险

公司（1994）实施了风险资本标准（Risk – Based Capital Standards），即根据公司规模和风险状况来评估资本和盈余的充足性。其基本理念是：保险公司的违约风险主要取决于现金流的风险（变异程度），而现金流与公司的资产和负债紧密相关；最低风险资本标准对应着设定的无偿付能力的最大概率；风险资本标准系统的相关目标是为了使监管者能够在损失程度扩大之前，根据早期预测结果进行干预，以减少公司丧失偿付能力后的实际成本；风险资本标准通过适当的方式，将保险公司各类资产、负债及其他风险的风险费用加总，得到一个总数，即为公司所需的资本数额；风险费用主要通过对不同类别的资产、负债的经验现金支付流进行统计分析来确定；监管者根据规定的资本和盈余计算公式来评估保险公司报告的法定资本和盈余，从而识别资本和盈余水平不足的公司。总之，NAIC 希望 RBC 标准能够成为这样一种资本充足性标准：（1）将资本要求与风险更加紧密地联系起来；（2）增加总的资本要求以应付日益增加的破产数目；（3）促进各州资本标准的一致性；（4）进一步明确监管者的干预权限。

美国于 1993 年开始实行 RBC 制度。NAIC 提出的风险资本（risk – based capital，RBC）概念是在每家保险公司自身的风险状况下，评价该保险公司的资本和盈余是否充足。RBC 制度由四部分组成：RBC 计算公式、RBC 报告、一套 RBC 标准和专门为保险监察官设计的后续措施程序（以便保险监察官在发现某保险公司的 RBC 结果低于标准时使用）。

RBC 比率的计算是，先将保险公司上报的不同资产乘上其相应的不同风险权重，再将其乘积加总，从而得到 NAIC 认为的保险公司的最小风险资本金，代入公式得到 RBC 比率，再与预定的标准比较，确定是否采取相应的后续措施。保险公司提交给政府保险监督管理部门的 RBC 报告是不公开的，目的是防止保险公司或其竞争者不正当利用 RBC 信息。

1. 寿险公司 RBC 监管相关计算公式

（1）NAIC 的最低风险资本要求。寿险公司的最低风险资本要求考虑了五种类型的风险：（1）关联企业风险（C_0），即对关联企业的投资无法收回的风险。（2）资产风险（C_1），它是指保险公司持有的资产面临的违约或市价跌落的风险，但不包括因为利率波动而造成的市价跌落的风险。每类资产都根据该资产承受的风险被赋予一个系数。（3）定价风险（C_2），它是指保险公司关于死亡率、发病率、续保率、费用率所作的假设可能与实际发生的情况不一致所造成的风险。风险基数为有效保险责任减去再保险。因为大数法则，持有大量扣除再保险后的有效保单的保险公司，风险系数就较小。（4）利率风险（C_3），它是指在利率变动的情况下，由于资产与负债的不匹配而造成保险公司损失的风险。需要强调的是，因为利率波动造成的保险公司资产贬值或负债增值的风险属于利率风险，而不属于

资产风险或定价风险。（5）一般管理风险（C_4），它是指保险公司面临的以上四类风险以外的风险，包括：进入新业务系列的市场风险；地理上扩张造成的风险；税法变化造成的风险；欺诈；管理失误；法律诉讼；保证责任的基金的评估；害怕偿付能力不足造成的资产抽逃。

这五种类型的风险都被囊括入寿险公司 RBC 公式中，以得出保险公司的法定风险资本，RBC 计算公式的关键是合理确定不同项目的风险的计算因子。在保险公司实务中，这些风险有时也被划分为下列四类。

资产违约风险（C_1）是为保险公司因资产给付违约所提供的储备。确定资产违约风险（C_1）时，必须考虑资产类型、资产组合质量（包括 NAIC 对债券的评级）、同类资产的分散程度及资产的期限结构等因素，采用相应的一定的系数和规则进行计算。

保险风险（C_2）是为保险公司因不利趋势、经验或保费不足等情况提供更高的保障。寿险因子按风险净额计算。因此，健康险因子按保费计算，但考虑到风险的聚合效应，保险风险（C_2）是风险净额的减函数。

利率风险（C_3）按保险责任准备金来计算，其风险因子取决于风险水平（低、中、高）及公司的精算意见是否合格。低度风险水平包括个人寿险准备金、不能退保或因市场价值调整而使退保风险不大的个人年金准备金；允许按面值退保但退保费用较高（5% 或 5% 以上）的个人年金准备金属于中度风险；可以自由按面值退保且退保费用低于帐户价值 5% 的延期年金属于高度风险。

营业风险（C_4）按保费水平计算。对于各类规模的保险公司，寿险和年金的风险因子为 2%，健康险为 0.5%。

NAIC 采用的最低风险资本的公式为：

$$\text{NAIC 最低风险资本和盈余} = \sqrt{(C_1 + C_3)^2 + C_2^2} + C_0 + C_4$$

因为 NAIC 认为随机变量 C_2 与 C_1、C_3 是相互独立的，而 C_1 与 C_3，C_4 与所有其他四个随机变量都是完全相关的，并且做了两个技术性的假设：第一，这四个随机变量符合正态分布；第二，偏差的关键统计量是标准差。

（2）总调整后资本。寿险公司的总调整后资本（Total Adjusted Capital/TAC）为以下各项之和：公司的法定资本和盈余、资产评估准备金、自主投资准备金和保单分红责任的 50%。其中分红责任乘以 50% 是由于分红对未来财务不利情形提供了一种缓冲，为了在调整后资本中反映这种缓冲效果，因此 NAIC 建议将其乘上 50% 的调整因子。

（3）风险资本比率。风险资本比率是总调整后资本与授权控制水平对应的资本数额之比，其计算公式为：

$$\text{风险资本（RBC）比率} = \frac{\text{总调整后资本}}{\theta \times \text{风险资本总额}}$$

系数 θ 是一个调节系数，在采用风险资本制度的前两年较小，1994 年为 0.4，1995 年为 0.45，目前为 0.5。其中 θ 与风险资本总额的乘积又称为授权控制水平的资本数额。

为了更好地理解 RBC 比率的计算方法，下面给出一个例子。

假设 ABC 公司的财务状况如下：

① 资本和盈余共计 800 000 元。

② 公司的全部资产构成（表 19－3）：

表 19－3

债券等级	账面价值	C－1 因子
AAA	2 000 000	0.3%
BB	5 000 000	4%
B	3 000 000	12%

③ 其余的要求资本构成（表 19－4）：

表 19－4

风险类别	计算基础	平均 RBC 因子
C－2	150 000 000	0.1%
C－3	4 000 000	1%
C－4	500 000	2%

这里假设不存在关联企业风险，即不考虑关联企业的投资无法收回的风险。求该公司的 RBC 比率。

解： 由题意可知，该公司的总调整后资本（TAC）为 800 000 元。

$C_0 = 0$

$C_1 = 2\ 000\ 000 \times 0.3\% + 5\ 000\ 000 \times 4\% + 3\ 000\ 000 \times 12\% = 566\ 000$

$C_2 = 150\ 000\ 000 \times 0.1\% = 150\ 000$

$C_3 = 4\ 000\ 000 \times 1\% = 40\ 000$

$C_4 = 500\ 000 \times 2\% = 10\ 000$

授权控制水平对应的资本数额为：

$$(\sqrt{(C_1 + C_3)^2 + C_2^2} + C_0 + C_4)/2$$

$$= (\sqrt{(566\ 000 + 40\ 000)^2 + 150\ 000^2} + 0 + 10\ 000)/2 = 317\ 144.20 \text{ 元}$$

所以，该公司的 RBC 比率为：

风险资本（RBC）比率 $= 800\ 000/317\ 144\ 20 = 252\%$。

2. 监管机构的干预措施。监管机构一般根据风险资本比率采取相应的干预措施。根据 RBC 比率的具体值，NAIC 确定了四个不同层次，要求有

关监管者采取相应的干预措施。干预层次分别为（表 19－5）：

表 19－5　　风险资本比率范围及 RBC 水平

风险资本比率（%）	RBC 水平
200 或更大	适当水平
150～199	公司行动水平
100～149	法定行动水平
70～99	授权控制水平
70 以下	强制控制水平

公司行动水平指当保险公司的资本达不到授权控制水平的 200% 时，保险公司必须向保险监督官提供一份方案，对其财务状况作出解释，并提出相应的改进意见。

监管行动水平指当保险公司的资本达不到授权控制水平的 150% 时，保险监督官必须对其进行审查，如有需要，还可以提出改进措施。

授权控制水平指当保险公司的资本达不到授权控制水平，即 100% 时，保险监督官可以依法对其进行整顿或清算。

强制控制水平指当保险公司的资本达不到授权控制水平的 70% 时，保险监督官必须对其进行接管。

3. *美国的 RBC 存在的不足*。美国的 RBC 突破了传统的桎梏，从风险的角度来分析公司的资本需求，这开创了风险监管新模式，但就其模型而言，它仍存在以下不足：

（1）风险反映不够全面。RBC 模型中没有体现公司的规模和组织形式对寿险公司偿付能力的影响，没有考虑产品组合风险和诸如道德风险之类的难以量化的风险因素。

（2）RBC 没有考虑资产分散化程度对偿付能力风险的影响，而是将各种资产独立地分析，假设各类资产项目之间正相关，这样会夸大保险公司的资产风险。

（3）RBC 的实施导致大量为了符合规定而不是基于经济理由的交易的产生，而且，许多公司会根据 RBC 的计算公式有针对性地降低风险和增加资本以取得较高的 RBC 比率，以此来吸引那些安全性比较强的投保者。由于 RBC 框架的内在不完善性，这些行动可能扭曲市场决策，造成不必要的价格提高或导致其他非效率。

不过需要指出的是，在目前的技术条件下，上述缺陷尚无可行的解决办法或虽然能够解决但在监管层面无实施的可行性。

19.2.3　加拿大监管实践——最低资本额及盈余要求（MCCSR）

加拿大金融管理局（OSFI）是加拿大的保险公司、银行及联邦养老金

计划的监管机构。加拿大金融管理局对保险公司的监管主要集中于保险公司的偿付能力。对偿付能力的监管，加拿大金融管理局在基本保单准备金的要求之外，增加了对不利偏差的准备、最低持续资本及盈余要求（MCCSR）、动态资本充足情况测试（DCAT）等额外的三个层次进行监管，以确保保险公司的偿付能力。

加拿大最低持续资本和盈余要求 MCCSR（Minimum Continuing Capital and Surplus Requirements）最初由加拿大人寿与健康保险联合会制定并采用。根据加拿大金融监管机构的规定，所有获得联邦执照的寿险公司都必须满足 MCCSR 要求。MCCSR 要求与美国的 RBC 方法运用相似，不同之处在于 MCCSR 将寿险公司面临的风险分为四类（而不是五类）：即资产风险（Asset Risk）、定价风险（Pricing Risk）、利率风险（Interest Rate Risk）、定价中的利息率风险也称利率边际定价风险（Interest Margin Pricing Risk）。利率边际定价风险专门描述了由于利率波动，使实行的利率低于预期的利率而造成保单的准备金不足的风险。MCCSR 要求的最低风险资本就是将资产风险、利率风险、定价风险和利率边际定价风险的风险调整值相加而得出，最后按保险人以报告资本除以最低风险资本求出保险人的 MCCSR 比率。如果一家寿险公司的 MCCSR 比率低于 120%，则该保险人要受到监管机关的进一步监管审查。

1. *最低风险资本额要求*（Required Capital）。在加拿大，最低风险资本额要求是保险公司所面临的各种资产和负债的风险因素所必须要求的资本额的总和。对于传统险来说，风险因素包括：资产风险、死亡率/发病率/退保率风险、定价利差风险和利率变化风险（由资产负债不匹配引起）。

（1）资产风险（C-1）。资产风险包括表内以及表外项目，其中关于分红型保单以及投资连结型保单的风险需要区别其他保单作单独处理，满足一定标准[①]的这类产品其风险因子为一般风险因子的 50%。表内项目的资产风险包括资产损失的风险，股票市值减少以及相应的收入减少等。为计算各表内项目组成部分的资本要求，需要用相应的风险因子乘以各组成部分的市场价值。加拿大金融管理局对不同类别的资产，如长期债券、抵押债券或证券等，定义了不同的风险因子（MCCSR factor）。

如对于长期债券，如信用评级为 AAA 级，相应风险因子为 0.25%；如评级为 B 级，则相应风险因子为 8%；如低于 B 级，则风险因子为 16%。对于贷款，住房抵押贷款风险因子为 2%，商业贷款风险因子为 4%，一般股票及共同基金的风险因子为 15%，由公司及其附属子公司使用的不动产的风险因子为 4%。根据资产价值及各自的风险因子即可计算相应的资

① OSFI 定义的标准分红型产品的定义见附录 B。

本额。

（2）死亡率/疾病率/退保率风险。这类风险是指使用的死亡率、疾病率、退保率错误的风险，即保险定价风险。加拿大金融管理局对这些风险因素定义了不同的资本额算法。例如，基于死亡率风险的资本额为风险保额和风险因子的乘积。风险因子的确定则与风险保额大小、保费保证期长度等因素有关，调整的原则是需反映大数法则；在加拿大，对于分红型寿险需要降低其风险因子。基于疾病率风险的资本额，在 MCCSR 中被简化，主要集中在残疾收入上。考虑退保率风险，则先将保单按照退保率的增加或者减少是否对保险人更有利分为两类，基于退保率风险的资本额为两种退保率假设下的准备金的差额。

（3）定价利差风险。定价利差风险是指定价过低所造成的风险。保险公司需要一定的资本金来应对因未来投资不利，造成定价不足而带来的损失。利差可能来自投资及定价人员的沟通不善，缺乏足够的新债券以及投资机会等。因过去投资及定价决策造成的损失应在保单准备金中体现出来。定价利差风险部分的资本额为保单准备金和风险因子的乘积，该风险因子会因不同的产品类型而不同。如满足前述标准的分红型保单及可调整保费，可调整利率的非分红型保单的风险因子为 0.005，而其他产品的风险因子为 0.01。

上述（2）和（3）的风险加和为 C－2 风险。

（4）利率变化风险（C－3，由资产负债不匹配引起）。利率变化风险主要是指由于利率变化引起的资产和负债不匹配的风险。保险公司要实现资金运用的安全性、流动性、盈利性三者的均衡，不能只靠资产或者负债单方面的管理，而必须根据经济环境的变化和公司业务状况对资产和负债进行统一的协调管理。因此公司需要一定的资金来应对因利率变化造成资产与负债不匹配的情形。对于传统的人寿保险产品来说，基于该风险的资本额可基于准备金乘以相应的风险因子来计算。风险因子由产品类型决定（见表 19－6）：

表 19－6

风险因子	费率及利率保证期	产　　品
0.01	小于 5 年	除万能寿险外的人寿及健康保险
0.02	5 到 10 年	
0.03	超过 10 年	
0.015	小于 5 年	除万能寿险外的两全保险
0.03	5 到 10 年	
0.05	超过 10 年	
0.01	趸缴保费年金及伤残年金	

目前，在加拿大的最低资本额要求计算中，还未考虑保险公司的其他经营性风险，这也是加拿大金融管理局将来需要研究和完善的地方。与之相应，监管当局将前面 C－1、C－2 及 C－3 资本要求做一个 20% 的增加作为考虑经营性风险的资本要求。

2. 实际总资本额（Available Capital）。在加拿大，计算 MCCSR 比率中所用的实际总资本额的计算比较复杂，分为主要资本额（Core Capital）和补充资本额（Supplementary Capital）两部分。主要是在保险公司资产负债表权益项目基础上对某些科目进行调整。

19.2.4　我国的偿付能力监管制度

我国偿付能力监管制度形成与 2003 年，经过不断地发展和完善，我国已形成一套完整的偿付能力监管措施。2008 年为了进一步完善我国的偿付能力监管体系，中国保监会 2008 年第 1 号主席令颁布了修订的偿付能力管理办法，将偿付能力管理制度和偿付能力相关技术及计算规定分开，以便于偿付能力相关计算及技术文件能及时根据市场环境变化进行调整和修订。目前我国的偿付能力监管制度包含以下三方面的内容：

1. 最低偿付能力计算规定。根据保监会新的要求，寿险公司最低偿付能力的计算规定大致如下（见表 19－7）。

表 19－7

项　目	比　例
一、短期人身险业务	max((1)+(2), (3)+(4))
(1) 自留保费净值：1 亿元以下部分	18%
(2) 自留保费净值：1 亿元以上部分	16%
(3) 最近 3 年综合赔款均值：7 000 万元以下部分	26%
(4) 最近 3 年综合赔款均值：7 000 万元以上部分	23%
二、长期人身险业务的最低资本	本项下列各细项之和
保险合同负债	4%
投资连结保险保单分拆后其他风险部分的负债	1%
其他混合保险合同分拆后其他风险部分的负债	4%
未通过重大保险风险测试的保单负债	4%
3 年内的定期死亡保险合同风险保额	0.1%
3～5 年定期死亡保险合同风险保额	0.15%
5 年以上定期死亡保险合同风险保额	0.3%
未区分保险期的死亡保险合同风险保额	0.3%
其他保险合同的风险保额	0.3%

自留保费净值＝直接保费收入＋分入保费－分出保费－营业税金

通过表 19 - 7 我们可以看到，我国目前采用的最低偿付能力计算规定与欧盟偿付能力 I 号的相关规定比较类似。

2. 实际偿付能力额度。实际偿付能力额度，根据监管要求等于认可资产减去认可负债。认可资产根据不同资产的流动性特点及风险特征确定了相应的认可比例。

值得注意的是，实际偿付能力额度不等于公司一般会计准则下的所有者权益，主要有两方面的原因：一是在偿付能力报告中，有些资产是非认可的资产；二是偿付能力报告中的保险合同准备金负债不等于一般会计准则下的保险合同准备金负债，在偿付能力报告中保险合同准备金负债采用按法定方法评估准备金。这一处理方式与欧盟偿付能力 I 号的方式类似。

3. 监管措施。根据保险公司偿付能力管理规定的要求，我国对处于不同偿付能力水平的保险公司实施分类监管：

（1）不足类公司，指偿付能力充足率低于 100% 的保险公司；

（2）充足I类公司，指偿付能力充足率在 100% 到 150% 之间的保险公司；

（3）充足 II 类公司，指偿付能力充足率高于 150% 的保险公司。

对于不足类公司，中国保监会应当区分不同情形，采取下列一项或者多项监管措施：

（1）责令增加资本金或者限制向股东分红；

（2）限制董事、高级管理人员的薪酬水平和在职消费水平；

（3）限制商业性广告；

（4）限制增设分支机构、限制业务范围、责令停止开展新业务、责令转让保险业务或者责令办理分出业务；

（5）责令拍卖资产或者限制固定资产购置；

（6）限制资金运用渠道；

（7）调整负责人及有关管理人员；

（8）接管；

（9）中国保监会认为必要的其他监管措施。

另外，中国保监会可以要求充足 I 类公司提交和实施预防偿付能力不足的计划，当充足 I 类公司和充足 II 类公司存在重大偿付能力风险的，中国保监会可以要求其进行整改或者采取必要的监管措施。

本章参考文献

1. 傅安平：《寿险公司偿付能力监管》，中国社会科学出版社 2004 年版。

2. 李秀芳、傅安平：《寿险精算》，中国人民大学出版社 2002 年版。

3. 中国保险监督管理委员会：《2000 保险规章制度汇编》，中国政法大学出版

社 2001 年版。

4. 中国保险监督管理委员会：《2001 保险规章制度汇编》，中国政法大学出版社 2002 年版。

5. 魏迎宁等：《人身保险》，中国金融出版社 1997 年版。

6. 蔡秋杰："加快费率市场化步伐培育中资保险公司竞争力"，《保险研究》，2003 年第 1 期。

7. 傅文惠："风险资本法在我国寿险公司偿付能力监管中的运用研究"，"中国优秀硕士学位论文全文数据库"，2005 年。

8. 周力生："欧盟偿付能力监管体系改革及意义"，《保险研究》，2005 年第 2 期。

9. 邹小珍、王海艳："未来欧盟保险业偿付能力监管体系"，《上海保险》，2004 年第 8 期。

10. 周伏平："美国保险监督官协会 RBC 管窥"，《精算通讯》第二卷第四期，2000 年第 12 期。

11. 裴光：《中国保险业监管研究》，中国金融出版社 1999 年第 10 期。

12. 丁昶、黄洋："英国寿险业偿付能力监管体系变化及影响"，《保险研究》，2004 年第 10 期。

13. 曹志东、卢雅菲、俞自由：《保险偿付能力监管及其国际比较研究》，《上海交通大学学报（社科版）》，2001 年第 1 期。

14. 占梦雅："保险公司最低资本要求的计算原理和模型研究"，《精算通讯》第五卷第一期，2005 年第 6 期。

15. 王剑："美国运用风险基础资本衡量保险公司偿付能力额度的研究"，"中国优秀硕士学位论文全文数据库"，2001 年。

16. 魏巧琴："发达国家保险偿付能力的动态监管及其借鉴"，《上海保险》，2002 年第 11 期。

17. 李建英、刘婷婷："保险偿付能力监管的国际比较与启示"，《江西财经大学学报》，2004 年第 6 期。

18. 粟芳、俞自由："偿付能力额度的计算模型"，《预测》，2001 年第 5 期。

习 题

1. ABC 公司的财务状况如下：

（1）资本和盈余共计 800 000 元。

（2）该公司当前的 $C_0=0$，$C_1=560\ 000$，$C_2=120\ 000$，$C_3=35\ 000$，$C_4=8\ 000$。

（3）某项业务的风险如下：

风险类别	计算基础	平均 RBC 因子
C－1	6 000 000	6%
C－2	80 000 000	0.1%
C－3	2 500 000	1%
C－4	300 000	2%

（4）假设该业务的50%进行了比例再保险，分入公司支付一定数额的佣金，增加了分出公司的资本盈余，数额为转移出的资产价值的3%，再保险部分的资产的 RBC 因子为 0.5%。

（5）比例再保险可以转移资产风险（C_1），对 RBC 比率的影响：

① 佣金提前获得补偿，总调整后资本（TAC）的值增加。

② 如果资产转移的 RBC 附加超过分保附加（0.5%），C_1 就会下降。

③ C_2 和 C_3 下降的额度与分保额相同。

④ C_4 是在再保险之前加于保费上的一个系数，所以没有变化。

求再保险后该公司的授权控制水平的资本数额的变化及新的 RBC 比率。

2. ABC 公司的净风险保额为 2 300 亿元，其中个险为 700 亿元，团险为1 600 亿元，负债的 RBC 因子如下：

净风险保额（亿元）	个险因子	团险因子
最初的 5	0.15%	0.12%
接下来的 45	0.1%	0.08%
接下来的 200	0.075%	0.06%
超过 250	0.06%	0.05%

求该公司的 C_2。

3. 增加高等级债券的持有量同时减少持有低等级债券可以有效地减少公司的 RBC，在假定其他条件不变的条件下，计算下列公司 C_1 的减少额。

债券等级	RBC 因子	当前资产分布	调整组合后的资产分布
1	0.3%	3 000	6 000
2	1%	5 000	3 200
3	4%	1 200	400
4	9%	600	200
5	20%	150	150
6	30%	50	50
		总计 10 000	总计 10 000

4. 简述偿付能力额度监管的相关基本概念，如最低偿付能力要求、偿付能力额度、偿付能力充足率。

5. 简述偿付能力额度监管的动因。

6. 简述美国的偿付能力额度监管发展的一般过程。

7. 简述偿付能力额度监管制度的意义。

8. 简述欧盟偿付能力额度监管实践的过程。

9. 阐述美国监管实践中的风险资本法（RBC）及存在的不足。

10. 简述 RBC 公式中各种风险的含义。

11. 简述加拿大监管实践中的最低资本额及盈余要求（MCCSR）。

12. 简述我国寿险公司的偿付能力监管制度包含的内容。

附　　表

附表 A　标准正态分布表

表一　　分布函数值

x	0	1	2	3	4
0	0.5	0.841345	0.97725	0.99865	0.999968
0.1	0.539828	0.864334	0.982136	0.999032	0.999979
0.2	0.57926	0.88493	0.986097	0.999313	0.999987
0.3	0.617911	0.903199	0.989276	0.999517	0.999991
0.4	0.655422	0.919243	0.991802	0.999663	0.999995
0.5	0.691462	0.933193	0.99379	0.999767	0.999997
0.6	0.725747	0.945201	0.995339	0.999841	0.999998
0.7	0.758036	0.955435	0.996533	0.999892	0.999999
0.8	0.788145	0.96407	0.997445	0.999928	0.999999
0.9	0.81594	0.971284	0.998134	0.999952	1

举例说明：最后一行第三列的数值，对应于 $\Phi(1.9)=0.971284$。

表二　　分位数值

p	$\Phi^{-1}(p)$
0.5	0
0.55	0.1257
0.6	0.2533
0.65	0.3853
0.7	0.5244
0.75	0.6745
0.8	0.8416
0.85	1.0364
0.9	1.2816
0.925	1.4395
0.95	1.6449
0.975	1.96
0.98	2.0537
0.985	2.1701
0.99	2.3263
0.995	2.5758

附表 I （A） 中国人寿保险业经验生命表（1990—1993）（男 CL1）

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
0	0.003037	1 000 000	3 037	998 482	73 641 337	73.64
1	0.002157	996 963	2 150	995 888	72 642 855	72.86
2	0.001611	994 813	1 603	994 011	71 646 967	72.02
3	0.001250	993 210	1 242	992 589	70 652 956	71.14
4	0.001000	991 968	992	991 472	69 660 367	70.22
5	0.000821	990 976	814	990 570	68 668 894	69.29
6	0.000690	990 163	683	989 821	67 678 325	68.35
7	0.000593	989 480	587	989 186	66 688 504	67.40
8	0.000520	988 893	514	988 636	65 699 317	66.44
9	0.000468	988 379	463	988 147	64 710 682	65.47
10	0.000437	987 916	432	987 700	63 722 534	64.50
11	0.000432	987 484	427	987 271	62 734 834	63.53
12	0.000458	987 058	452	986 832	61 747 563	62.56
13	0.000516	986 606	509	986 351	60 760 731	61.59
14	0.000603	986 097	595	985 799	59 774 380	60.62
15	0.000706	985 502	696	985 154	58 788 581	59.65
16	0.000812	984 806	800	984 406	57 803 427	58.70
17	0.000907	984 007	892	983 560	56 819 020	57.74
18	0.000981	983 114	964	982 632	55 835 460	56.79
19	0.001028	982 150	1 010	981 645	54 852 828	55.85
20	0.001049	981 140	1 029	980 625	53 871 183	54.91
21	0.001048	980 111	1 027	979 597	52 890 558	53.96
22	0.001030	979 084	1 008	978 579	51 910 961	53.02
23	0.001003	978 075	981	977 585	50 932 381	52.07
24	0.000972	977 094	950	976 619	49 954 797	51.13
25	0.000945	976 144	922	975 683	48 978 178	50.18
26	0.000925	975 222	902	974 771	48 002 494	49.22
27	0.000915	974 320	892	973 874	47 027 723	48.27
28	0.000918	973 428	894	972 982	46 053 849	47.31
29	0.000933	972 535	907	972 081	45 080 868	46.35
30	0.000963	971 627	936	971 160	44 108 787	45.40
31	0.001007	970 692	977	970 203	43 137 627	44.44
32	0.001064	969 714	1 032	969 198	42 167 424	43.48
33	0.001136	968 682	1 100	968 132	41 198 226	42.53

续表

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
34	0.001222	967 582	1 182	966 991	40 230 094	41.58
35	0.001321	966 400	1 277	965 761	39 263 103	40.63
36	0.001436	965 123	1 386	964 430	38 297 341	39.68
37	0.001565	963 737	1 508	962 983	37 332 911	38.74
38	0.001710	962 229	1 645	961 406	36 369 928	37.80
39	0.001872	960 583	1 798	959 684	35 408 522	36.86
40	0.002051	958 785	1 966	957 802	34 448 838	35.93
41	0.002250	956 819	2 153	955 742	33 491 036	35.00
42	0.002470	954 666	2 358	953 487	32 535 294	34.08
43	0.002713	952 308	2 584	951 016	31 581 807	33.16
44	0.002981	949 724	2 831	948 309	30 630 791	32.25
45	0.003276	946 893	3 102	945 342	29 682 482	31.35
46	0.003601	943 791	3 399	942 092	28 737 140	30.45
47	0.003958	940 393	3 722	938 532	27 795 048	29.56
48	0.004352	936 670	4 076	934 632	26 856 516	28.67
49	0.004784	932 594	4 462	930 363	25 921 884	27.80
50	0.005260	928 133	4 882	925 692	24 991 521	26.93
51	0.005783	923 251	5 339	920 581	24 065 829	26.07
52	0.006358	917 911	5 836	914 993	23 145 248	25.22
53	0.006991	912 075	6 376	908 887	22 230 255	24.37
54	0.007686	905 699	6 961	902 218	21 321 368	23.54
55	0.008449	898 738	7 593	894 941	20 419 149	22.72
56	0.009288	891 144	8 277	887 006	19 524 208	21.91
57	0.010210	882 867	9 014	878 360	18 637 202	21.11
58	0.011222	873 853	9 806	868 950	17 758 842	20.32
59	0.012333	864 047	10 656	858 719	16 889 892	19.55
60	0.013553	853 391	11 566	847 608	16 031 173	18.79
61	0.014892	841 825	12 536	835 556	15 183 565	18.04
62	0.016361	829 288	13 568	822 504	14 348 009	17.30
63	0.017972	815 720	14 660	808 390	13 525 504	16.58
64	0.019740	801 060	15 813	793 154	12 717 114	15.88
65	0.021677	785 247	17 022	776 736	11 923 961	15.18
66	0.023800	768 225	18 284	759 084	11 147 224	14.51
67	0.026125	749 942	19 592	740 146	10 388 141	13.85
68	0.028671	730 349	20 940	719 879	9 647 995	13.21
69	0.031457	709 410	22 316	698 252	8 928 116	12.59

续表

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
70	0.034504	687 094	23 707	675 240	8 229 864	11.98
71	0.037835	663 386	25 099	650 837	7 554 624	11.39
72	0.041474	638 287	26 472	625 051	6 903 788	10.82
73	0.045446	611 815	27 805	597 912	6 278 737	10.26
74	0.049779	584 010	29 071	569 474	5 680 825	9.73
75	0.054501	554 939	30 245	539 816	5 111 350	9.21
76	0.059644	524 694	31 295	509 047	4 571 534	8.71
77	0.065238	493 399	32 188	477 305	4 062 487	8.23
78	0.071317	461 211	32 892	444 765	3 585 182	7.77
79	0.077916	428 319	33 373	411 632	3 140 418	7.33
80	0.085069	394 946	33 598	378 147	2 728 786	6.91
81	0.092813	361 348	33 538	344 579	2 350 639	6.51
82	0.101184	327 810	33 169	311 226	2 006 060	6.12
83	0.110218	294 641	32 475	278 404	1 694 834	5.75
84	0.119951	262 166	31 447	246 443	1 416 430	5.40
85	0.130418	230 719	30 090	215 674	1 169 987	5.07
86	0.141651	200 629	28 419	186 420	954 313	4.76
87	0.153681	172 210	26 465	158 977	767 893	4.46
88	0.166534	145 745	24 271	133 609	608 916	4.18
89	0.180233	121 473	21 893	110 526	475 307	3.91
90	0.194795	99 580	193 98	89 881	364 781	3.66
91	0.210233	80 182	16 857	71 754	274 900	3.43
92	0.226550	63 325	14 346	56 152	203 146	3.21
93	0.243742	48 979	11 938	43 010	146 994	3.00
94	0.261797	37 041	9 697	32 192	103 985	2.81
95	0.280694	27 344	7 675	23 506	71 793	2.63
96	0.300399	19 668	5 908	16 714	48 287	2.46
97	0.320871	13 760	4 415	11 552	31 573	2.29
98	0.342055	9 345	3 196	7 747	20 020	2.14
99	0.363889	6 148	2 237	5 030	12 274	2.00
100	0.386299	3 911	1 511	3 156	7 244	1.85
101	0.409200	2 400	982	1 909	4 088	1.70
102	0.432503	1 418	613	1 111	2 179	1.54
103	0.456108	805	367	621	1 068	1.33
104	0.479911	438	210	333	446	1.02
105	1.000000	228	228	114	114	0.50

附表 I (B) 中国人寿保险业经验生命表(1990—1993)(女 CL2)

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
0	0.002765	1 000 000	2 765	998 618	77 764 813	77.76
1	0.001859	997 235	1 854	996 308	76 766 195	76.98
2	0.001314	995 381	1 308	994 727	75 769 887	76.12
3	0.000966	994 073	960	993 593	74 775 160	75.22
4	0.000734	993 113	729	992 748	73 781 567	74.29
5	0.000573	992 384	569	992 100	72 788 818	73.35
6	0.000458	991 815	454	991 588	71 796 719	72.39
7	0.000375	991 361	372	991 175	70 805 131	71.42
8	0.000315	990 989	312	990 833	69 813 955	70.45
9	0.000274	990 677	271	990 541	68 823 122	69.47
10	0.000249	990 406	247	990 282	67 832 581	68.49
11	0.000240	990 159	238	990 040	66 842 298	67.51
12	0.000248	989 921	246	989 799	65 852 258	66.52
13	0.000269	989 676	266	989 543	64 862 459	65.54
14	0.000302	989 410	299	989 260	63 872 916	64.56
15	0.000341	989 111	337	988 942	62 883 656	63.58
16	0.000382	988 774	378	988 585	61 894 714	62.60
17	0.000421	988 396	416	988 188	60 906 129	61.62
18	0.000454	987 980	449	987 756	59 917 941	60.65
19	0.000481	987 531	475	987 294	58 930 185	59.67
20	0.000500	987 056	494	986 810	57 942 891	58.70
21	0.000511	986 563	504	986 311	56 956 082	57.73
22	0.000517	986 059	510	985 804	55 969 771	56.76
23	0.000519	985 549	511	985 293	54 983 967	55.79
24	0.000519	985 037	511	984 782	53 998 674	54.82
25	0.000519	984 526	511	984 271	53 013 893	53.85
26	0.000520	984 015	512	983 759	52 029 622	52.87
27	0.000525	983 503	516	983 245	51 045 863	51.90
28	0.000533	982 987	524	982 725	50 062 617	50.93
29	0.000546	982 463	536	982 195	49 079 892	49.96
30	0.000566	981 927	556	981 649	48 097 697	48.98
31	0.000592	981 371	581	981 081	47 116 048	48.01
32	0.000625	980 790	613	980 484	46 134 968	47.04
33	0.000666	980 177	653	979 851	45 154 484	46.07

续表

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
34	0.000714	979 524	699	979 175	44 174 634	45.10
35	0.000772	978 825	756	978 447	43 195 459	44.13
36	0.000838	978 069	820	977 659	42 217 012	43.16
37	0.000914	977 250	893	976 803	41 239 353	42.20
38	0.001001	976 356	977	975 868	40 262 550	41.24
39	0.001098	975 379	1 071	974 844	39 286 682	40.28
40	0.001208	974 308	1 177	973 720	38 311 839	39.32
41	0.001331	973 131	1 295	972 483	37 338 119	38.37
42	0.001468	971 836	1 427	971 123	36 365 636	37.42
43	0.001620	970 409	1 572	969 623	35 394 513	36.47
44	0.001790	968 837	1 734	967 970	34 424 890	35.53
45	0.001979	967 103	1 914	966 146	33 456 920	34.59
46	0.002188	965 189	2 112	964 133	32 490 774	33.66
47	0.002420	963 077	2 331	961 912	31 526 641	32.74
48	0.002677	960 747	2 572	959 461	30 564 729	31.81
49	0.002962	958 175	2 838	956 756	29 605 268	30.90
50	0.003277	955 337	3 131	953 771	28 648 513	29.99
51	0.003627	952 206	3 454	950 479	27 694 741	29.08
52	0.004014	948 752	3 808	946 848	26 744 262	28.19
53	0.004442	944 944	4 197	942 845	25 797 414	27.30
54	0.004916	940 746	4 625	938 434	24 854 569	26.42
55	0.005440	936 122	5 093	933 576	23 916 135	25.55
56	0.006020	931 029	5 605	928 227	22 982 559	24.69
57	0.006661	925 424	6 164	922 342	22 054 333	23.83
58	0.007370	919 260	6 775	915 873	21 131 990	22.99
59	0.008154	912 485	7 440	908 765	20 216 117	22.16
60	0.009022	905 045	8 165	900 962	19 307 352	21.33
61	0.009980	896 880	8 951	892 404	18 406 390	20.52
62	0.011039	887 929	9 802	883 028	17 513 986	19.72
63	0.012209	878 127	10 721	872 766	16 630 958	18.94
64	0.013502	867 406	11 712	861 550	15 758 192	18.17
65	0.014929	855 694	12 775	849 307	14 896 642	17.41
66	0.016505	842 919	13 912	835 963	14 047 335	16.67
67	0.018044	829 007	14 959	821 528	13 211 372	15.94
68	0.020162	814 048	16 413	805 842	12 389 844	15.22
69	0.022278	797 636	17 770	788 751	11 584 002	14.52

续表

年龄(x)	死亡率 q_x	生存人数 l_x	死亡人数 d_x	生存人年数		平均余命 $\mathring{e}_x$
				L_x	T_x	
70	0.024610	779 866	19 192	770 270	10 795 251	13.84
71	0.027180	760 673	20 675	750 336	10 024 982	13.18
72	0.030009	739 998	22 207	728 895	9 274 646	12.53
73	0.033132	717 792	23 782	705 901	8 545 751	11.91
74	0.036549	694 010	25 365	681 327	7 839 850	11.30
75	0.040313	668 644	26 955	655 167	7 158 523	10.71
76	0.044447	641 689	28 521	627 429	6 503 356	10.13
77	0.048984	613 168	30 035	598 150	5 875 927	9.58
78	0.053958	583 133	31 465	567 400	5 277 777	9.05
79	0.059405	551 668	32 772	535 282	4 710 376	8.54
80	0.065364	518 896	33 917	501 938	4 175 094	8.05
81	0.071876	484 979	34 858	467 550	3 673 157	7.57
82	0.078981	450 121	35 551	432 345	3 205 607	7.12
83	0.086722	414 570	35 952	396 594	2 773 261	6.69
84	0.095145	378 617	36 024	360 606	2 376 668	6.28
85	0.104291	342 594	35 729	324 729	2 016 062	5.88
86	0.114207	306 864	35 046	289 341	1 691 333	5.51
87	0.124933	271 818	33 959	254 839	1 401 991	5.16
88	0.136511	237 859	32 470	221 624	1 147 153	4.82
89	0.148980	205 389	30 599	190 089	925 529	4.51
90	0.162374	174 790	28 381	160 599	735 439	4.21
91	0.176721	146 409	25 873	133 472	574 840	3.93
92	0.192046	120 535	23 148	108 961	441 368	3.66
93	0.208364	97 387	20 292	87 241	332 407	3.41
94	0.225680	77 095	17 399	68 396	245 166	3.18
95	0.243992	59 696	14 565	52 413	176 770	2.96
96	0.263285	45 131	11 882	39 190	124 357	2.76
97	0.283531	33 249	9 427	28 535	85 167	2.56
98	0.304690	23 822	7 258	20 192	56 632	2.38
99	0.326708	16 563	5 411	13 858	36 440	2.20
100	0.349518	11 152	3 898	9 203	22 582	2.02
101	0.373037	7 254	2 706	5 901	13 379	1.84
102	0.397173	4 548	1 806	3 645	7 478	1.64
103	0.421820	2 742	1 157	2 163	3 833	1.40
104	0.446863	1 585	708	1 231	1 669	1.05
105	1.000000	877	877	438	438	0.50

附表Ⅱ 中国人寿保险业经验生命表（1990—1993）换算表

生命表：男 CL1；年利率：4%

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
0	1 000 000.0	24 059 056.5	519 539 219.4	2 920.2	74 651.7	4 076 778.9
1	958 618.3	23 059 056.5	495 480 162.8	1 988.2	71 731.5	4 002 127.2
2	919 760.1	22 100 438.3	472 421 106.3	1 424.7	69 743.3	3 930 395.7
3	882 960.0	21 180 678.1	450 320 668.0	1 061.2	68 318.5	3 860 652.4
4	847 938.7	20 297 718.1	429 139 989.9	815.3	67 257.3	3 792 333.9
5	814 510.4	19 449 779.4	408 842 271.8	643.0	66 441.9	3 725 076.6
6	782 540.1	18 635 269.0	389 392 492.3	519.2	65 799.0	3 658 634.7
7	751 923.2	17 852 728.9	370 757 223.3	428.7	65 279.8	3 592 835.7
8	722 574.3	17 100 805.8	352 904 494.4	361.3	64 851.0	3 527 556.0
9	694 421.7	16 378 231.4	335 803 688.6	312.5	64 489.7	3 462 704.9
10	667 400.7	15 683 809.7	319 425 457.2	280.4	64 177.3	3 398 215.2
11	641 451.0	15 016 409.0	303 741 647.5	266.4	63 896.8	3 334 037.9
12	616 513.4	14 374 958.0	288 725 238.5	271.5	63 630.4	3 270 141.1
13	592 529.8	13 758 444.6	274 350 280.5	294.0	63 358.9	3 206 510.8
14	569 446.2	13 165 914.8	260 591 835.9	330.2	63 064.9	3 143 151.9
15	547 214.3	12 596 468.6	247 425 921.0	371.5	62 734.7	3 080 087.0
16	525 796.1	12 049 254.3	234 829 452.4	410.5	62 363.2	3 017 352.3
17	505 162.6	11 523 458.2	222 780 198.1	440.6	61 952.7	2 954 989.1
18	485 292.7	11 018 295.6	211 256 739.9	457.8	61 512.1	2 893 036.4
19	466 169.9	10 533 002.8	200 238 444.3	460.8	61 054.4	2 831 524.2
20	447 779.5	10 066 833.0	189 705 441.4	451.7	60 593.6	2 770 469.8
21	430 105.5	9 619 053.5	179 638 608.5	433.4	60 141.9	2 709 876.2
22	413 129.6	9 188 947.9	170 019 555.0	409.2	59 708.5	2 649 734.3
23	396 830.8	8 775 818.3	160 830 607.0	382.7	59 299.4	2 590 025.8
24	381 185.4	8 378 987.5	152 054 788.7	356.3	58 916.7	2 530 726.4
25	366 168.2	7 997 802.1	143 675 801.2	332.7	58 560.4	2 471 809.7
26	351 752.1	7 631 633.9	135 677 999.1	312.9	58 227.7	2 413 249.3
27	337 910.3	7 279 881.9	128 046 365.1	297.3	57 914.8	2 355 021.7
28	324 616.4	6 941 971.6	120 766 483.3	286.5	57 617.5	2 297 106.9
29	311 844.6	6 617 355.2	113 824 511.7	279.8	57 331.0	2 239 489.3
30	299 570.9	6 305 510.5	107 207 156.5	277.4	57 051.2	2 182 158.3
31	287 771.5	6 005 939.7	100 901 646.0	278.6	56 773.8	2 125 107.1
32	276 424.7	5 718 168.1	94 895 706.4	282.8	56 495.2	2 068 333.3
33	265 510.2	5 441 743.4	89 177 538.2	290.0	56 212.4	2 011 838.1

续表

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
34	255 008.3	5 176 233.2	83 735 794.8	299.6	55 922.4	1 955 625.7
35	244 900.6	4 921 224.9	78 559 561.6	311.1	55 622.7	1 899 703.3
36	235 170.3	4 676 324.3	73 638 336.7	324.7	55 311.7	1 844 080.6
37	225 800.6	4 441 154.0	68 962 012.4	339.8	54 987.0	1 788 768.9
38	216 776.1	4 215 353.4	64 520 858.4	356.4	54 647.2	1 733 782.0
39	208 082.2	3 998 577.3	60 305 505.0	374.5	54 290.7	1 679 134.8
40	199 704.5	3 790 495.1	56 306 927.7	393.8	53 916.2	1 624 844.1
41	191 629.7	3 590 790.7	52 516 432.5	414.6	53 522.3	1 570 927.9
42	183 844.7	3 399 161.0	48 925 641.9	436.6	53 107.8	1 517 405.5
43	176 337.1	3 215 316.3	45 526 480.9	460.0	52 671.1	1 464 297.8
44	169 094.9	3 038 979.1	42 311 164.6	484.7	52 211.1	1 411 626.6
45	162 106.6	2 869 884.2	39 272 185.5	510.6	51 726.4	1 359 415.5
46	155 361.1	2 707 777.6	36 402 301.3	537.9	51 215.8	1 307 689.1
47	148 847.7	2 552 416.5	33 694 523.7	566.5	50 677.9	1 256 473.3
48	142 556.3	2 403 568.7	31 142 107.2	596.5	50 111.4	1 205 795.4
49	136 476.9	2 261 012.4	28 738 538.5	627.8	49 514.8	1 155 684.0
50	130 600.0	2 124 535.5	26 477 526.1	660.5	48 887.1	1 106 169.2
51	124 916.3	1 993 935.6	24 352 990.6	694.6	48 226.5	1 057 282.1
52	119 417.3	1 869 019.2	22 359 055.0	730.1	47 531.9	1 009 055.6
53	114 094.2	1 749 602.0	20 490 035.7	767.0	46 801.9	961 523.7
54	108 939.0	1 635 507.7	18 740 433.8	805.1	46 034.9	914 721.8
55	103 944.0	1 526 568.7	17 104 926.1	844.4	45 229.8	868 686.9
56	99 101.7	1 422 624.7	15 578 357.4	885.1	44 385.4	823 457.1
57	94 405.0	1 323 523.0	14 155 732.7	926.8	43 500.3	779 071.7
58	89 847.3	1 229 118.0	12 832 209.7	969.5	42 573.5	735 571.4
59	85 422.1	1 139 270.7	11 603 091.7	1 013.0	41 604.0	692 997.9
60	81 123.7	1 053 848.6	10 463 821.0	1 057.2	40 591.0	651 393.9
61	76 946.3	972 724.9	9 409 972.5	1 101.8	39 533.8	610 802.9
62	72 885.1	895 778.6	8 437 247.5	1 146.6	38 432.0	571 269.1
63	68 935.2	822 893.5	7 541 469.0	1 191.3	37 285.4	532 837.0
64	65 092.6	753 958.4	6 718 575.4	1 235.5	36 094.2	495 551.6
65	61 353.5	688 865.8	5 964 617.1	1 278.8	34 858.7	459 457.4
66	57 714.9	627 512.3	5 275 751.3	1 320.8	33 579.9	424 598.8
67	54 174.4	569 797.3	4 648 239.0	1 360.9	32 259.1	391 018.9
68	50 729.9	515 623.0	4 078 441.7	1 398.5	30 898.2	358 759.9
69	47 380.2	464 893.1	3 562 818.7	1 433.1	29 499.7	327 861.7
70	44 124.7	417 513.0	3 097 925.5	1 463.9	28 066.6	298 362.0

续表

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
71	40 963.7	373 388.2	2 680 412.5	1 490.3	26 602.6	270 295.4
72	37 897.9	332 424.5	2 307 024.3	1 511.3	25 112.4	243 692.8
73	34 929.0	294 526.6	1 974 599.8	1 526.3	23 601.1	218 580.4
74	32 059.2	259 597.6	1 680 073.2	1 534.5	22 074.7	194 979.4
75	29 291.7	227 538.3	1 420 475.6	1 535.0	20 540.2	172 904.7
76	26 630.1	198 246.6	1 192 937.3	1 527.2	19 005.2	152 364.4
77	24 078.6	171 616.6	994 690.6	1 510.4	17 478.0	133 359.2
78	21 642.1	147 538.0	823 074.0	1 484.1	15 967.5	115 881.3
79	19 325.6	125 895.9	675 536.1	1 447.9	14 483.5	99 913.7
80	17 134.5	106 570.3	549 640.2	1 401.5	13 035.6	85 430.3
81	15 073.9	89 435.8	443 069.9	1 345.2	11 634.0	72 394.7
82	13 148.9	74 362.0	353 634.0	1 279.3	10 288.8	60 760.6
83	11 363.9	61 213.1	279 272.1	1 204.3	9 009.5	50 471.8
84	9 722.5	49 849.2	218 059.0	1 121.4	7 805.2	41 462.3
85	8 227.2	40 126.7	168 209.8	1 031.7	6 683.8	33 657.1
86	6 879.0	31 899.6	128 083.0	936.9	5 652.1	26 973.3
87	5 677.5	25 020.6	96 183.5	839.0	4 715.2	21 321.2
88	4 620.2	19 343.0	71 162.9	739.8	3 876.2	16 606.0
89	3 702.7	14 722.9	51 819.9	641.7	3 136.4	12 729.8
90	2 918.6	11 020.2	37 097.0	546.7	2 494.7	9 593.4
91	2 259.7	8 101.6	26 076.8	456.8	1 948.1	7 098.7
92	1 716.0	5 842.0	17 975.2	373.8	1 491.3	5 150.6
93	1 276.2	4 126.0	12 133.2	299.1	1 117.5	3 659.4
94	928.0	2 849.8	8 007.2	233.6	818.4	2 541.9
95	658.7	1 921.9	5 157.3	177.8	584.8	1 723.5
96	455.6	1 263.2	3 235.5	131.6	407.0	1 138.7
97	306.5	807.6	1 972.3	94.6	275.4	731.7
98	200.1	501.1	1 164.7	65.8	180.9	456.3
99	126.6	301.0	663.6	44.3	115.0	275.5
100	77.4	174.4	362.6	28.8	70.7	160.4
101	45.7	96.9	188.3	18.0	42.0	89.7
102	26.0	51.2	91.3	10.8	24.0	47.7
103	14.2	25.3	40.1	6.2	13.2	23.7
104	7.4	11.1	14.8	3.4	7.0	10.5
105	3.7	3.7	3.7	3.6	3.6	3.6

附表Ⅲ　　　　中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）

年龄	非养老金业务表			养老金业务表
	男（CL1）	女（CL2）	男（CL3）	女（CL4）
0	0.000722	0.000661	0.000627	0.000575
1	0.000603	0.000536	0.000525	0.000466
2	0.000499	0.000424	0.000434	0.000369
3	0.000416	0.000333	0.000362	0.00029
4	0.000358	0.000267	0.000311	0.000232
5	0.000323	0.000224	0.000281	0.000195
6	0.000309	0.000201	0.000269	0.000175
7	0.000308	0.000189	0.000268	0.000164
8	0.000311	0.000181	0.00027	0.000158
9	0.000312	0.000175	0.000271	0.000152
10	0.000312	0.000169	0.000272	0.000147
11	0.000312	0.000165	0.000271	0.000143
12	0.000313	0.000165	0.000272	0.000143
13	0.00032	0.000169	0.000278	0.000147
14	0.000336	0.000179	0.000292	0.000156
15	0.000364	0.000192	0.000316	0.000167
16	0.000404	0.000208	0.000351	0.000181
17	0.000455	0.000226	0.000396	0.000196
18	0.000513	0.000245	0.000446	0.000213
19	0.000572	0.000264	0.000497	0.00023
20	0.000621	0.000283	0.00054	0.000246
21	0.000661	0.0003	0.000575	0.000261
22	0.000692	0.000315	0.000601	0.000274
23	0.000716	0.000328	0.000623	0.000285
24	0.000738	0.000338	0.000643	0.000293
25	0.000759	0.000347	0.00066	0.000301
26	0.000779	0.000355	0.000676	0.000308
27	0.000795	0.000362	0.000693	0.000316
28	0.000815	0.000372	0.000712	0.000325
29	0.000842	0.000386	0.000734	0.000337
30	0.000881	0.000406	0.000759	0.000351
31	0.000932	0.000432	0.000788	0.000366
32	0.000994	0.000465	0.00082	0.000384
33	0.001055	0.000496	0.000855	0.000402

续表

年龄	非养老金业务表			养老金业务表
	男（CL1）	女（CL2）	男（CL3）	女（CL4）
34	0.001121	0.000528	0.000893	0.000421
35	0.001194	0.000563	0.000936	0.000441
36	0.001275	0.000601	0.000985	0.000464
37	0.001367	0.000646	0.001043	0.000493
38	0.001472	0.000699	0.001111	0.000528
39	0.001589	0.000761	0.001189	0.000569
40	0.001715	0.000828	0.001275	0.000615
41	0.001845	0.000897	0.001366	0.000664
42	0.001978	0.000966	0.001461	0.000714
43	0.002113	0.001033	0.00156	0.000763
44	0.002255	0.001103	0.001665	0.000815
45	0.002413	0.001181	0.001783	0.000873
46	0.002595	0.001274	0.001918	0.000942
47	0.002805	0.001389	0.002055	0.001014
48	0.003042	0.001527	0.002238	0.001123
49	0.003299	0.00169	0.002446	0.001251
50	0.00357	0.001873	0.002666	0.001393
51	0.003847	0.002074	0.00288	0.001548
52	0.004132	0.002295	0.003085	0.001714
53	0.004434	0.002546	0.0033	0.001893
54	0.004778	0.002836	0.003545	0.002093
55	0.005203	0.003178	0.003838	0.002318
56	0.005744	0.003577	0.004207	0.002607
57	0.006427	0.004036	0.004676	0.002979
58	0.00726	0.004556	0.005275	0.00341
59	0.008229	0.005133	0.006039	0.003816
60	0.009313	0.005768	0.006989	0.004272
61	0.01049	0.006465	0.007867	0.004781
62	0.011747	0.007235	0.008725	0.005351
63	0.013091	0.008094	0.009677	0.005988
64	0.014542	0.009059	0.010731	0.006701
65	0.016134	0.010148	0.0119	0.007499
66	0.017905	0.011376	0.013229	0.008408
67	0.019886	0.01276	0.014705	0.009438
68	0.022103	0.014316	0.016344	0.010592
69	0.024571	0.016066	0.018164	0.011886

续表

年龄	非养老金业务表			养老金业务表
	男（CL1）	女（CL2）	男（CL3）	女（CL4）
70	0.027309	0.018033	0.020184	0.013337
71	0.03034	0.020241	0.022425	0.014964
72	0.033684	0.022715	0.024911	0.016787
73	0.037371	0.025479	0.027668	0.018829
74	0.04143	0.028561	0.030647	0.021117
75	0.045902	0.031989	0.033939	0.023702
76	0.050829	0.035796	0.037577	0.026491
77	0.056262	0.040026	0.041594	0.029602
78	0.062257	0.044726	0.046028	0.03307
79	0.068871	0.049954	0.05092	0.036935
80	0.076187	0.055774	0.056312	0.041241
81	0.084224	0.062253	0.062253	0.046033
82	0.093071	0.069494	0.068791	0.051365
83	0.1028	0.077511	0.075983	0.057291
84	0.113489	0.086415	0.083883	0.063872
85	0.125221	0.096294	0.092554	0.071174
86	0.13808	0.107243	0.102059	0.079267
87	0.152157	0.119364	0.112464	0.088225
88	0.167543	0.132763	0.123836	0.098129
89	0.184333	0.147553	0.136246	0.109061
90	0.202621	0.16385	0.149763	0.121107
91	0.2225	0.181775	0.164456	0.134355
92	0.244059	0.201447	0.180392	0.148896
93	0.267383	0.222987	0.197631	0.164816
94	0.292544	0.246507	0.216228	0.182201
95	0.319604	0.272115	0.236229	0.201129
96	0.348606	0.299903	0.257666	0.221667
97	0.379572	0.329942	0.280553	0.24387
98	0.412495	0.362281	0.304887	0.267773
99	0.447334	0.396933	0.330638	0.293385
100	0.48401	0.433869	0.357746	0.320685
101	0.522397	0.473008	0.386119	0.349615
102	0.562317	0.514211	0.415626	0.380069
103	0.603539	0.557269	0.446094	0.411894
104	0.64577	0.601896	0.477308	0.444879
105	1	1	1	1

附表Ⅲ　　单生命精算函数

生命表（2000—2003）男 CL1，年利率 4%

年龄	$\ddot{a}_x$	${}^2\ddot{a}_x$	$1\,000A_x$	$1\,000\,{}^2A_x$
0	24.41895	13.13432	60.80947	9.097223
1	24.37331	13.13396	62.56502	9.124145
2	24.32291	13.13201	64.50352	9.271265
3	24.26793	13.12854	66.6179	9.533558
4	24.20872	13.12368	68.89528	9.899614
5	24.14572	13.11767	71.31862	10.35313
6	24.07932	13.11071	73.87223	10.87846
7	24.00991	13.10299	76.54177	11.46068
8	23.93768	13.09463	79.31987	12.0916
9	23.86261	13.08562	82.20723	12.77124
10	23.78454	13.07589	85.21011	13.50559
11	23.70331	13.06536	88.33407	14.30011
12	23.61882	13.05396	91.58401	15.15973
13	23.53093	13.04165	94.96409	16.0888
14	23.43967	13.02841	98.47417	17.08711
15	23.3451	13.01431	102.1114	18.15152
16	23.24737	12.9994	105.8704	19.2757
17	23.14661	12.9838	109.7456	20.45286
18	23.04296	12.96758	113.7322	21.67667
19	22.93645	12.95078	117.8289	22.94426
20	22.82696	12.93336	122.0399	24.25839
21	22.71415	12.91514	126.3789	25.63279
22	22.59765	12.89594	130.8596	27.08133
23	22.47711	12.87556	135.4957	28.61897
24	22.3522	12.85381	140.3	30.25994
25	22.22269	12.83055	145.2812	32.01478
26	22.08836	12.80564	150.4477	33.89391
27	21.94899	12.77894	155.808	35.90863
28	21.80429	12.75023	161.3736	38.07404
29	21.65411	12.71942	167.1497	40.39881
30	21.49837	12.68641	173.1395	42.88947
31	21.33711	12.65116	179.3421	45.54837
32	21.17032	12.61365	185.7569	48.37821
33	20.99801	12.57383	192.3844	51.38295

续表

年龄	$\ddot{a}_x$	$^2\ddot{a}_x$	$1\,000A_x$	$1\,000^2A_x$
34	20.81989	12.53147	199.235	54.57837
35	20.63582	12.48644	206.3147	57.97596
36	20.44566	12.43858	213.6283	61.58633
37	20.24931	12.38776	221.1805	65.42019
38	20.04668	12.33387	228.9737	69.48646
39	19.83775	12.27678	237.0095	73.79318
40	19.62244	12.21638	245.2907	78.35021
41	19.40061	12.15248	253.8226	83.17122
42	19.17201	12.08481	262.615	88.27586
43	18.93635	12.0131	271.679	93.68648
44	18.6933	11.93699	281.027	99.42839
45	18.44262	11.85618	290.6685	105.5247
46	18.1842	11.77045	300.6076	111.9928
47	17.91807	11.67963	310.8436	118.8448
48	17.64428	11.58358	321.3737	126.0912
49	17.36287	11.48212	332.1972	133.7451
50	17.07371	11.37499	343.3187	141.8276
51	16.77655	11.2618	354.7479	150.3675
52	16.47098	11.14202	366.5008	159.4037
53	16.15658	11.01512	378.5932	168.9773
54	15.83304	10.8806	391.0367	179.1261
55	15.50043	10.73817	403.8297	189.872
56	15.15932	10.58789	416.9493	201.2094
57	14.81076	10.43017	430.3552	213.1082
58	14.4561	10.26565	443.996	225.5203
59	14.09669	10.09502	457.8196	238.3934
60	13.73357	9.918796	471.7857	251.6885
61	13.36741	9.737252	485.869	265.3848
62	12.99846	9.550396	500.0594	279.482
63	12.62672	9.358037	514.3569	293.9943
64	12.25218	9.159966	528.7623	308.9375
65	11.87495	8.956058	543.271	324.3211
66	11.49542	8.746387	557.8685	340.1395
67	11.11424	8.531244	572.5294	356.3707
68	10.73223	8.311067	587.222	372.9816
69	10.35029	8.086383	601.912	389.9326
70	9.969255	7.857704	616.5671	407.1851

续表

年龄	$\ddot{a}_x$	$^2\ddot{a}_x$	$1\ 000A_x$	$1\ 000^2A_x$
71	9.589916	7.625538	631.1571	424.7005
72	9.213036	7.390407	645.6525	442.4397
73	8.839301	7.152799	660.0269	460.3657
74	8.469382	6.913222	674.2545	478.4404
75	8.103902	6.672169	688.3115	496.6263
76	7.7435	6.430176	702.1731	514.8832
77	7.388806	6.187798	715.8152	533.1691
78	7.040469	5.945635	729.2127	551.4388
79	6.699157	5.704334	742.3401	569.6435
80	6.365523	5.464557	755.1722	587.7331
81	6.04034	5.227102	767.6792	605.6476
82	5.724056	4.992524	779.844	623.3451
83	5.417203	4.761468	791.646	640.7768
84	5.120253	4.534557	803.0672	657.8959
85	4.833626	4.312385	814.0913	674.6574
86	4.55769	4.09552	824.7042	691.0184
87	4.292739	3.884484	834.8947	706.9398
88	4.039012	3.679759	844.6534	722.385
89	3.79668	3.481775	853.9738	737.3217
90	3.565851	3.290911	862.8519	751.7212
91	3.346571	3.107493	871.2857	765.559
92	3.138822	2.931787	879.2761	778.8149
93	2.942524	2.764	886.826	791.4734
94	2.757546	2.604283	893.9405	803.523
95	2.583691	2.452722	900.6273	814.9574
96	2.420706	2.309337	906.8959	825.7748
97	2.268264	2.174075	912.7591	835.9796
98	2.125944	2.04678	918.2329	845.5832
99	1.993143	1.927127	923.3407	854.6102
100	1.868884	1.814443	928.1199	863.1115
101	1.751272	1.707207	932.6434	871.2019
102	1.635926	1.60157	937.0798	879.1715
103	1.511056	1.486598	941.8825	887.8454
104	1.340606	1.327506	948.4382	899.848
105	1	1	961.5385	924.5562

附表Ⅲ　　联生状态精算函数

生命表（2000—2003）男 CL1，年利率 4%

年龄	$\ddot{a}_{xx}$	${}^2\ddot{a}_{xx}$	$1\,000A_{xx}$	$1\,000{}^2A_{xx}$	$\ddot{a}_{xx+10}$	${}^2\ddot{a}_{xx+10}$	$1\,000A_{xx+10}$	$1\,000{}^2A_{xx+10}$
0	23.83816	13.03697	83.14763	16.44197	23.37552	12.98768	100.941512	20.1599383
1	23.78602	13.038	85.15297	16.36378	23.29462	12.9793	104.052966	20.7927095
2	23.72607	13.03602	87.4589	16.51334	23.20764	12.96867	107.398522	21.5943375
3	23.65872	13.03116	90.04935	16.87992	23.11471	12.95583	110.972711	22.5629091
4	23.58468	13.02374	92.89677	17.44	23.01623	12.94095	114.760201	23.6856051
5	23.5049	13.01419	95.96547	18.16023	22.91278	12.9243	118.73912	24.9417773
6	23.42022	13.00295	99.22228	19.00849	22.80496	12.90619	122.886211	26.3082146
7	23.33145	12.99041	102.6367	19.954	22.69333	12.88692	127.179447	27.7618805
8	23.23902	12.97682	106.1917	20.97927	22.57829	12.86671	131.604161	29.2867318
9	23.14297	12.96219	109.8858	22.083	22.45993	12.84562	136.156658	30.8781273
10	23.04307	12.94639	113.7282	23.2756	22.33807	12.82355	140.843583	32.5427229
11	22.9391	12.92928	117.7269	24.56631	22.21231	12.80029	145.680412	34.2973956
12	22.83091	12.91076	121.8881	25.96322	22.08228	12.77563	150.681417	36.1584441
13	22.71836	12.89075	126.2168	27.47311	21.94763	12.74933	155.860496	38.1425147
14	22.60156	12.86927	130.7092	29.09363	21.80812	12.72125	161.226138	40.260874
15	22.48073	12.84643	135.3566	30.81649	21.66371	12.69133	166.780513	42.5180632
16	22.35623	12.82243	140.145	32.627	21.51441	12.65955	172.522705	44.9152408
17	22.22844	12.79748	145.0601	34.5094	21.36025	12.62591	178.45198	47.453762
18	22.09768	12.77178	150.0893	36.44874	21.20115	12.59031	184.571068	50.1390064
19	21.96411	12.74543	155.2264	38.43664	21.03713	12.55275	190.879738	52.9730935
20	21.82764	12.7184	160.4753	40.47569	20.86811	12.51314	197.38041	55.9612819
21	21.68768	12.69038	165.8586	42.58977	20.6939	12.47134	204.080591	59.115028
22	21.54365	12.66105	171.3979	44.80274	20.51433	12.42719	210.987403	62.4458681
23	21.395	12.63006	177.1153	47.14035	20.32916	12.38051	218.109169	65.9673143
24	21.24121	12.59711	183.0305	49.62655	20.13798	12.33099	225.462415	69.7033946
25	21.08196	12.56197	189.1553	52.27776	19.94055	12.27841	233.055797	73.6699103
26	20.91698	12.52443	195.5008	55.10982	19.7367	12.22259	240.896187	77.8813129
27	20.74597	12.48426	202.0781	58.13994	19.52625	12.16333	248.990206	82.3524915
28	20.5685	12.44115	208.9039	61.39236	19.30903	12.1004	257.345001	87.0997566
29	20.38445	12.39495	215.9826	64.87835	19.08502	12.0337	265.960935	92.1318915
30	20.19382	12.34555	223.3146	68.60462	18.85423	11.96312	274.837472	97.4569793
31	19.99679	12.293	230.8926	72.56934	18.6167	11.88855	283.973248	103.082426
32	19.79354	12.23731	238.7099	76.7709	18.37235	11.80984	293.371084	109.021236
33	19.5842	12.17847	246.7616	81.20976	18.12107	11.72675	303.03592	115.289749

续表

年龄	$\ddot{a}_{xx}$	${}^2\ddot{a}_{xx}$	$1\,000A_{xx}$	$1\,000{}^2A_{xx}$	$\ddot{a}_{xx+10}$	${}^2\ddot{a}_{xx+10}$	$1\,000A_{xx+10}$	$1\,000{}^2A_{xx+10}$
34	19.36841	12.11619	255.0611	85.90876	17.86246	11.6389	312.982417	121.917585
35	19.14605	12.05027	263.6135	90.88182	17.59632	11.54598	323.218611	128.927521
36	18.91704	11.98057	272.4216	96.14064	17.3226	11.44779	333.746097	136.335257
37	18.68133	11.90692	281.4874	101.6965	17.0414	11.3442	344.561563	144.15091
38	18.43896	11.82925	290.8093	107.5567	16.75288	11.23511	355.658302	152.380606
39	18.19003	11.74747	300.3835	113.726	16.45721	11.12045	367.030243	161.031516
40	17.93458	11.6615	310.2084	120.2123	16.15438	10.99998	378.677686	170.119583
41	17.67253	11.57113	320.2873	127.0299	15.84419	10.87338	390.607888	179.670924
42	17.40359	11.47604	330.6312	134.2037	15.52623	10.74011	402.837392	189.725741
43	17.12742	11.37585	341.253	141.7629	15.20002	10.59958	415.38366	200.327901
44	16.84363	11.27009	352.1682	149.7414	14.86521	10.45123	428.261189	211.519866
45	16.55194	11.1584	363.3871	158.1679	14.52179	10.29474	441.469509	223.325906
46	16.25235	11.04054	374.9095	167.0595	14.17041	10.13021	454.984293	235.738278
47	15.94509	10.91644	386.7271	176.4227	13.8122	9.958132	468.761586	248.720803
48	15.63046	10.78604	398.8284	186.2601	13.4486	9.779221	482.746086	262.218522
49	15.30868	10.64927	411.2047	196.5784	13.08102	9.594234	496.883939	276.174691
50	14.9797	10.50586	423.8578	207.3982	12.71044	9.403673	511.136955	290.55128
51	14.64325	10.35534	436.798	218.7538	12.33739	9.20773	525.485033	305.333978
52	14.29878	10.19704	450.0468	230.6964	11.9619	9.00624	539.926933	320.535163
53	13.94574	10.03024	463.6252	243.2807	11.58375	8.798839	554.471082	336.182292
54	13.58377	9.854303	477.5474	256.5541	11.20278	8.585181	569.123831	352.301446
55	13.21308	9.66899	491.8045	270.5348	10.81917	8.365165	583.878224	368.900247
56	12.83482	9.474717	506.3532	285.1915	10.43368	8.139145	598.7046	385.952113
57	12.45083	9.27247	521.1218	300.4498	10.04761	7.907899	613.553454	403.398127
58	12.06343	9.063633	536.0218	316.2052	9.66253	7.67249	628.364239	421.158333
59	11.67487	8.849656	550.9664	332.3484	9.280031	7.434058	643.075715	439.146511
60	11.28686	8.631663	565.8899	348.7946	8.901399	7.193572	657.638511	457.289702
61	10.90042	8.410328	580.7529	365.493	8.527583	6.951788	672.016038	475.530819
62	10.51591	8.18585	595.542	382.4285	8.159231	6.709257	686.183426	493.828238
63	10.13321	7.958084	610.261	399.612	7.796728	6.466346	700.125836	512.15434
64	9.752204	7.726844	624.9152	417.0576	7.440416	6.223401	713.830169	530.483069
65	9.372912	7.492069	639.5034	434.7699	7.090637	5.980784	727.283175	548.78704
66	8.995762	7.254006	654.0092	452.7303	6.747877	5.738989	740.466273	567.02892
67	8.621567	7.013228	668.4013	470.8955	6.412728	5.498629	753.356606	585.162586
68	8.251339	6.770507	682.6408	489.2073	6.085854	5.260401	765.928693	603.135432
69	7.886155	6.526711	696.6863	507.6002	5.767934	5.025048	778.156385	620.891357
70	7.526946	6.28264	710.5021	526.0139	5.459565	4.793274	790.016723	638.377291

续表

年龄	$\ddot{a}_{xx}$	$^{2}\ddot{a}_{xx}$	$1\,000A_{xx}$	$1\,000^{2}A_{xx}$	$\ddot{a}_{xx+10}$	$^{2}\ddot{a}_{xx+10}$	$1\,000A_{xx+10}$	$1\,000^{2}A_{xx+10}$
71	7.174532	6.039039	724.0565	544.392	5.161393	4.565852	801.484902	655.534798
72	6.82965	5.796629	737.3212	562.6804	4.87375	4.343315	812.548061	672.32388
73	6.492881	5.556028	750.2738	580.8322	4.596979	4.126212	823.193117	688.702971
74	6.164753	5.317839	762.8941	598.8021	4.331348	3.915046	833.409711	704.634122
75	5.845682	5.082594	775.1661	616.5498	4.077043	3.710258	843.190644	720.084096
76	5.536079	4.85084	787.0739	634.0343	3.834207	3.512254	852.530483	735.022232
77	5.236306	4.623099	798.6036	651.2159	3.602911	3.321382	861.426494	749.422343
78	4.946725	4.399912	809.7413	668.0539	3.383185	3.137953	869.877483	763.260928
79	4.667696	4.181834	820.4732	684.5066	3.175013	2.962233	877.884108	776.517917
80	4.399537	3.969396	830.787	700.5337	2.978328	2.794438	885.448932	789.176989
81	4.142714	3.763281	840.6648	716.0838	2.793076	2.634792	892.574007	801.221305
82	3.897263	3.563799	850.1053	731.1335	2.619041	2.483359	899.267645	812.645971
83	3.663319	3.371352	859.1031	745.6524	2.45601	2.340194	905.538092	823.446909
84	3.440947	3.186282	867.6559	759.6148	2.303729	2.205302	911.395053	833.623669
85	3.230155	3.008878	875.7633	772.9988	2.161907	2.078639	916.849736	843.179637
86	3.030901	2.839381	883.4269	785.7864	2.030227	1.960119	921.914354	852.121175
87	2.843074	2.677962	890.651	797.9644	1.908339	1.849614	926.602356	860.458091
88	2.666523	2.524747	897.4414	809.5235	1.795868	1.746955	930.928164	868.203111
89	2.501042	2.379802	903.8061	820.4587	1.692392	1.651915	934.908015	875.373291
90	2.346391	2.243147	909.7542	830.7685	1.597385	1.564163	938.562131	881.993654
91	2.202293	2.114752	915.2964	840.4551	1.510015	1.483081	941.922498	888.110758
92	2.068439	1.994547	920.4446	849.5238	1.428397	1.407081	945.061658	893.844472
93	1.944497	1.882418	925.2116	857.9832	1.34658	1.330761	948.208472	899.602354
94	1.830122	1.778227	929.6107	865.8438	1.240964	1.231696	952.270631	907.076207
95	1.72495	1.681799	933.6558	873.1187	1	1	961.538462	924.556213
96	1.628614	1.59294	937.361	879.8225				
97	1.540741	1.511438	940.7407	885.9714				
98	1.460965	1.437066	943.8091	891.5823				
99	1.388922	1.369588	946.5799	896.6731				
100	1.32425	1.308759	949.0673	901.2623				
101	1.266575	1.254306	951.2856	905.3704				
102	1.215396	1.205839	953.254	909.027				
103	1.169371	1.162182	955.0242	912.3206				
104	1.120653	1.116012	956.898	915.8038				
105	1	1	961.5385	924.5562				

附表Ⅳ　　中国人寿保险业经验生命表（2000—2003）换算表

生命表：男 CL1；年利率：4%

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
0	1 000 000.0	24 418 953.7	535 238 965.2	694.2	60 809.5	3 832 839.7
1	960 844.2	23 418 953.7	510 820 011.5	557.1	60 115.2	3 772 030.2
2	923 331.6	22 458 109.5	487 401 057.8	443.0	59 558.1	3 711 915.0
3	887 375.8	21 534 777.9	464 942 948.3	355.0	59 115.1	3 652 356.8
4	852 891.0	20 647 402.1	443 408 170.4	293.6	58 760.2	3 593 241.7
5	819 793.9	19 794 511.1	422 760 768.3	254.6	58 466.6	3 534 481.5
6	788 008.8	18 974 717.2	402 966 257.2	234.1	58 212.0	3 476 015.0
7	757 466.6	18 186 708.4	383 991 540.0	224.3	57 977.8	3 417 803.0
8	728 109.0	17 429 241.8	365 804 831.6	217.7	57 753.5	3 359 825.2
9	699 887.0	16 701 132.8	348 375 589.8	210.0	57 535.8	3 302 071.7
10	672 758.3	16 001 245.8	331 674 457.0	201.8	57 325.8	3 244 535.9
11	646 681.2	15 328 487.4	315 673 211.3	194.0	57 124.0	3 187 210.1
12	621 614.8	14 681 806.2	300 344 723.8	187.1	56 930.0	3 130 086.1
13	597 519.5	14 060 191.4	285 662 917.6	183.9	56 742.9	3 073 156.1
14	574 354.1	13 462 671.9	271 602 726.2	185.6	56 559.0	3 016 413.2
15	552 078.0	12 888 317.8	258 140 054.3	193.2	56 373.5	2 959 854.2
16	530 651.0	12 336 239.8	245 251 736.5	206.1	56 180.3	2 903 480.7
17	510 035.2	11 805 588.8	232 915 496.7	223.1	55 974.1	2 847 300.4
18	490 195.3	11 295 553.5	221 109 907.9	241.8	55 751.0	2 791 326.3
19	471 099.9	10 805 358.2	209 814 354.3	259.1	55 509.2	2 735 575.3
20	452 721.5	10 334 258.3	199 008 996.1	270.3	55 250.1	2 680 066.2
21	435 038.9	9 881 536.8	188 674 737.8	276.5	54 979.7	2 624 816.1
22	418 030.1	9 446 497.9	178 793 201.0	278.2	54 703.2	2 569 836.3
23	401 673.9	9 028 467.8	169 346 703.1	276.5	54 425.1	2 515 133.1
24	385 948.3	8 626 794.0	160 318 235.3	273.9	54 148.6	2 460 708.0
25	370 830.3	8 240 845.6	151 691 441.3	270.6	53 874.7	2 406 559.4
26	356 296.9	7 870 015.4	143 450 595.7	266.9	53 604.0	2 352 684.8
27	342 326.3	7 513 718.4	135 580 580.3	261.7	53 337.2	2 299 080.7
28	328 898.3	7 171 392.1	128 066 861.9	257.7	53 075.5	2 245 743.5
29	315 990.6	6 842 493.8	120 895 469.8	255.8	52 817.7	2 192 668.1
30	303 581.3	6 526 503.2	114 052 976.0	257.2	52 561.9	2 139 850.3
31	291 647.9	6 222 922.0	107 526 472.8	261.4	52 304.7	2 087 288.4
32	280 169.3	5 931 274.1	101 303 550.8	267.8	52 043.4	2 034 983.6
33	269 125.8	5 651 104.8	95 372 276.8	273.0	51 775.6	1 982 940.3

续表

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
34	258 501.8	5 381 979.0	89 721 172.0	278.6	51 502.6	1 931 164.7
35	248 280.8	5 123 477.2	84 339 193.0	285.0	51 224.0	1 879 662.1
36	238 446.5	4 875 196.4	79 215 715.9	292.3	50 938.9	1 828 438.1
37	228 983.1	4 636 749.9	74 340 519.5	301.0	50 646.6	1 777 499.2
38	219 875.1	4 407 766.8	69 703 769.5	311.2	50 345.6	1 726 852.6
39	211 107.2	4 187 891.7	65 296 002.7	322.5	50 034.4	1 676 507.0
40	202 665.1	3 976 784.5	61 108 111.1	334.2	49 711.9	1 626 472.6
41	194 536.1	3 774 119.4	57 131 326.5	345.1	49 377.7	1 576 760.7
42	186 708.8	3 579 583.3	53 357 207.1	355.1	49 032.5	1 527 383.1
43	179 172.6	3 392 874.5	49 777 623.8	364.0	48 677.4	1 478 350.5
44	171 917.3	3 213 701.9	46 384 749.3	372.8	48 313.4	1 429 673.1
45	164 932.4	3 041 784.6	43 171 047.4	382.7	47 940.6	1 381 359.7
46	158 206.1	2 876 852.2	40 129 262.8	394.8	47 558.0	1 333 419.0
47	151 726.5	2 718 646.1	37 252 410.6	409.2	47 163.2	1 285 861.1
48	145 481.7	2 566 919.6	34 533 764.5	425.5	46 754.0	1 238 697.9
49	139 460.7	2 421 437.9	31 966 844.9	442.4	46 328.5	1 191 943.9
50	133 654.4	2 281 977.2	29 545 407.0	458.8	45 886.1	1 145 615.4
51	128 055.1	2 148 322.8	27 263 429.8	473.7	45 427.3	1 099 729.4
52	122 656.2	2 020 267.7	25 115 107.0	487.3	44 953.6	1 054 302.1
53	117 451.3	1 897 611.5	23 094 839.2	500.7	44 466.3	1 009 348.5
54	112 433.2	1 780 160.2	21 197 227.7	516.5	43 965.5	964 882.2
55	107 592.3	1 667 727.0	19 417 067.5	538.3	43 449.0	920 916.7
56	102 915.9	1 560 134.7	17 749 340.5	568.4	42 910.7	877 467.7
57	98 389.2	1 457 218.8	16 189 205.8	608.0	42 342.3	834 557.0
58	93 996.9	1 358 829.6	14 731 987.0	656.2	41 734.3	792 214.7
59	89 725.5	1 264 832.7	13 373 157.4	710.0	41 078.1	750 480.5
60	85 564.6	1 175 107.2	12 108 324.8	766.2	40 368.1	709 402.4
61	81 507.4	1 089 542.6	10 933 217.6	822.1	39 601.9	669 034.2
62	77 550.4	1 008 035.2	9 843 675.0	875.9	38 779.8	629 432.3
63	73 691.7	930 484.8	8 835 639.8	927.6	37 903.9	590 652.5
64	69 929.8	856 793.1	7 905 155.0	977.8	36 976.3	552 748.6
65	66 262.4	786 863.2	7 048 362.0	1 028.0	35 998.5	515 772.4
66	62 685.9	720 600.8	6 261 498.8	1 079.2	34 970.5	479 773.9
67	59 195.7	657 914.9	5 540 897.9	1 131.9	33 891.3	444 803.4
68	55 787.0	598 719.2	4 882 983.0	1 185.6	32 759.4	410 912.2
69	52 455.8	542 932.2	4 284 263.8	1 239.3	31 573.7	378 152.8
70	49 198.9	490 476.4	3 741 331.7	1 291.9	30 334.4	346 579.0

续表

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
71	46 014.7	441 277.5	3 250 855.3	1 342.4	29 042.5	316 244.6
72	42 902.6	395 262.8	2 809 577.7	1 389.5	27 700.1	287 202.1
73	39 862.9	352 360.2	2 414 315.0	1 432.4	26 310.6	259 501.9
74	36 897.3	312 497.3	2 061 954.8	1 469.9	24 878.2	233 191.4
75	34 008.3	275 600.0	1 749 457.5	1 501.0	23 408.3	208 313.2
76	31 199.3	241 591.7	1 473 857.4	1 524.8	21 907.3	184 904.9
77	28 474.5	210 392.4	1 232 265.7	1 540.4	20 382.5	162 997.6
78	25 838.9	181 917.9	1 021 873.3	1 546.8	18 842.1	142 615.1
79	23 298.3	156 079.0	839 955.4	1 542.9	17 295.3	123 773.1
80	20 859.4	132 780.7	683 876.4	1 528.1	15 752.4	106 477.8
81	18 529.0	111 921.4	551 095.6	1 500.6	14 224.3	90 725.4
82	16 315.8	93 392.4	439 174.3	1 460.1	12 723.8	76 501.1
83	14 228.1	77 076.6	345 781.9	1 406.4	11 263.6	63 777.3
84	12 274.5	62 848.5	268 705.3	1 339.4	9 857.2	52 513.7
85	10 463.0	50 574.0	205 856.8	1 259.8	8 517.8	42 656.4
86	8 800.7	40 111.0	155 282.8	1 168.5	7 258.0	34 138.6
87	7 293.8	31 310.3	115 171.7	1 067.1	6 089.5	26 880.6
88	5 946.1	24 016.5	83 861.4	957.9	5 022.4	20 791.1
89	4 759.5	18 070.4	59 844.9	843.6	4 064.5	15 768.7
90	3 732.9	13 310.9	41 774.5	727.3	3 220.9	11 704.2
91	2 862.0	9 578.0	28 463.6	612.3	2 493.6	8 483.2
92	2 139.6	6 716.0	18 885.6	502.1	1 881.3	5 989.6
93	1 555.2	4 576.3	12 169.7	399.8	1 379.2	4 108.3
94	1 095.6	3 021.1	7 593.4	308.2	979.4	2 729.0
95	745.3	1 925.5	4 572.3	229.0	671.2	1 749.7
96	487.6	1 180.3	2 646.8	163.4	442.2	1 078.5
97	305.4	692.7	1 466.5	111.5	278.7	636.3
98	182.2	387.3	773.8	72.3	167.3	357.5
99	102.9	205.1	386.5	44.3	95.0	190.3
100	54.7	102.2	181.4	25.5	50.8	95.2
101	27.1	47.5	79.2	13.6	25.3	44.5
102	12.5	20.4	31.7	6.7	11.7	19.2
103	5.2	7.9	11.3	3.0	4.9	7.5
104	2.0	2.7	3.4	1.2	1.9	2.6
105	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7

附表 V　　示例服务表

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{(i)}$	$q_x^{(r)}$	S_x
30	100 000	0.001	0.199	—	—	1
31	79 910	0.001	0.1799	—	—	1.06
32	65 454	0.0011	0.15061	—	—	1.124
33	55 524	0.0011	0.10269	—	—	1.191
34	49 761	0.00121	0.0798	—	—	1.262
35	45 730	0.0014	0.05889	0.00101	—	1.338
36	42 927	0.00149	0.04489	0.001	—	1.419
37	40 893	0.00159	0.03499	0.0011	—	1.504
38	39 352	0.0018	0.03001	0.00119	—	1.594
39	38 053	0.00189	0.02599	0.00129	—	1.689
40	36 943	0.00211	0.02201	0.00141	—	1.791
41	36 000	0.00231	0.02	0.0015	—	1.898
42	35 143	0.00259	0.01801	0.00159	—	2.012
43	34 363	0.00279	0.01601	0.00169	—	2.133
44	33 659	0.00309	0.015	0.00181	—	2.261
45	32 989	0.0034	0.014	0.002	—	2.397
46	32 349	0.0038	0.01301	0.00219	—	2.54
47	31 734	0.00419	0.01301	0.00249	—	2.693
48	31 109	0.0046	0.01199	0.0028	—	2.854
49	30 506	0.00511	0.01101	0.00311	—	3.026
50	29 919	0.00562	0.00999	0.00341	—	3.207
51	29 350	0.0062	0.00998	0.00382	—	3.4
52	38 763	0.00511	0.00668	0.00312	—	3.604
53	38 185	0.00547	0.00657	0.00346	—	3.82
54	27 593	0.00819	0.0079	0.00518		4.049
55	27 006	0.00889	0.00789	0.00581	—	4.292
56	26 396	0.00981	0.00689	0.0064	—	4.549
57	25 786	0.0107	0.0069	0.0071	—	4.822
58	25 149	0.01181	0.00588	0.00791	—	5.112
59	24 505	0.0129	0.0049	0.00869	—	5.418
60	23 856	0.01312	—	—	0.14889	5.743
61	19 991	0.01491	—	—	0.07939	6.088
62	18 106	0.01569	—	—	0.14868	6.453
63	15 130	0.01791	—	—	0.08923	6.841
64	13 509	0.01902	—	—	0.14849	7.251
65	11 246	0.01814	—	—	0.39552	7.686
66	6 594	0.02229	—	—	0.19745	8.147
67	5 145	0.02313	—	—	0.29582	8.636
68	1 504	0.05519	—	—	0.91822	9.154
69	2 040	0.02402	—	—	0.49216	9.704
70	987	0.01722	—	—	0.98278	10.286

附　　录

附录Ⅰ　人身保险精算规定

人寿保险预定附加费用率规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于非利差返还型长期（保险期间一年以上）人寿保险（非分红）。

第二部分　人寿保险保险费的构成

二、人寿保险的毛保费由纯保费和附加费用构成。附加费用分为两部分：管理费和佣金（个人业务）/手续费（团体业务）。

三、个人业务的佣金由支付给代理人的直接佣金和间接佣金构成。直接佣金是保险公司根据代理人销售保单的情况而直接向其支付的现金报酬；间接佣金包括保险公司支出的代理人经理的管理报酬、代理人和代理人经理的各种奖励、津贴和福利（如保险待遇等）。

四、管理费是附加费用扣除佣金/手续费的剩余部分。

第三部分　预定附加费用率

五、预定附加费用率由保险公司基于对其运营成本和销售成本的分析和预测确定。

六、预定附加费用率是预定附加费用占毛保费的一定百分比。

平均附加费用率是保单预定附加费用精算现值之和占保单毛保费精算现值之和的一定百分比。

第四部分　个人人寿保险业务预定附加费用率规定

七、保险公司在厘定个人寿险保险费时，各保单年度的预定附加费用率必须符合下列限制：

（一）按交费期限的不同，各保单年度预定附加费用率不得超过下表规定的上限：

期交保费预定附加费用率上限						
保单年度	交费期限为10年以下		交费期限为10年至19年		交费期限为20年及以上	
	死亡险、健康险(%)	年金险、生死两全(%)	死亡险、健康险(%)	年金险、生死两全(%)	死亡险、健康险(%)	年金险、生死两全(%)
第一年	60.0	35.0	70.0	45.0	75.0	50.0
第二年	35.0	20.0	40.0	25.0	45.0	25.0
第三年	35.0	20.0	40.0	25.0	45.0	25.0
以后各年	25.0	15.0	30.0	15.0	30.0	15.0

（二）平均附加费用率不得超过下表规定的上限：

平均附加费用率上限		
交费方式	两全保险、年金保险（%）	死亡保险、健康保险（%）
分　期	18.0	35.0
趸　交	10.0	20.0

第五部分　团体人寿保险业务附加费用率规定

八、保险公司在厘定团体寿险保险费时，各保单年度的预定附加费用率必须符合下列限制：

（一）各保单年度预定附加费用率不得超过下表规定的上限：

保单年度	期交保费预定附加费用率上限	
	两全保险、年金保险（%）	死亡保险、健康保险（%）
第一年	15.0	30.0
以后各年	12.0	18.0

（二）平均附加费用率不得超过下表规定的上限：

平均附加费用率上限		
交费方式	两全保险、年金保险（%）	死亡保险（%）
分　期	12.0	18.0
趸　交	8.0	10.0

人寿保险精算规定

第一部分　适用范围

一、人寿保险是指以人的生存或死亡为给付保险金条件的保险，分为

年金保险（包括定期年金、终身年金）和非年金保险（包括定期死亡保险、终身死亡保险、两全保险）。

二、本规定适用于非利差返还型的长期（保险期间一年以上）人寿保险（非分红）和保证续保保险费的一年期定期寿险，其他一年定期人寿保险的精算规定按《意外伤害保险精算规定》执行。

第二部分　保　险　费

三、保险费应当根据预定利息率、预定死亡率、预定附加费用率等事项采用换算表方法进行计算。

（一）预定利息率

保险公司在厘定保险费时，应根据本公司对未来资金运用收益率的预测按照谨慎的原则确定预定利息率，所采用的预定利息率应当符合中国保险监督管理委员会的规定。

（二）预定死亡率

保险公司在厘定保险费时，预定死亡率应当采用中国人寿保险业经验生命表（1990—1993）所提供的数据。根据保险责任的不同，保险公司应当按照下表所列经验生命表的适用范围，选择使用相应的经验生命表。

中国人寿保险业经验生命表（1990－1993）

名　　称	适 用 范 围
CL1（1990－1993）	非年金保险男表
CL2（1990－1993）	非年金保险女表
CL3（1990－1993）	非年金保险混合表
CL4（1990－1993）	年金保险男表
CL5（1990－1993）	年金保险女表
CL6（1990－1993）	年金保险混合表

（三）预定附加费用率

保险公司在厘定保险费时，预定附加费用率按《人寿保险预定附加费用率规定》执行。

第三部分　保单最低现金价值

四、保单年度末保单价值准备金

保单年度末保单价值准备金指为计算保单年度末保单最低现金价值，按照本条所述计算基础和计算方法算得的准备金数值。

（一）计算基础

1．费用率和死亡率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定附加费用

率和预定死亡率；

2. 利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加上2%。

（二）计算方法

1. 根据该保单的保险责任和各保单年度纯保费按上述计算基础计算。

2. 保单各保单年度纯保费为该保单年度的毛保费扣除险种报备时厘定保险费所采用的该保单年度的预定附加费用。

（三）保单年度末保单价值准备金不包括该保单在保单年度末的生存给付金额

五、保单年度末保单最低现金价值是保险公司确定人寿保险保单现金价值最低标准，其计算公式为：

$r\times\max\{$保单年度末保单价值准备金，$0\}$

系数 r 按下列公式计算：

$r=k\%+t\times(100\%-k\%)/\min\{20, n\}$，当 $t<\min\{20, n\}$ 时。

$r=100\%$，当 $t>\min\{20, n\}$ 时。

其中：

1. n 为保单交费期间（趸交保费时，$n=1$）

2. t 为保单经过的保单年度，$t=1, 2, \cdots$

3. 参数 k 按下表取值：

k 值		
	两全保险、年金保险	定期死亡保险、终身死亡保险
期交个人业务	90	80
期交团体业务	95	85
趸交个人业务	100	100
趸交团体业务	100	100

六、保单年度末保单现金价值

保险公司可以将根据本规定所确定的保单年度末保单最低现金价值作为保单年度末保单现金价值，也可以按其他合理的计算基础和方法确定保单现金价值，但要保证其数值不低于保单年度末保单最低现金价值。

七、保单年度中保单现金价值根据保单年度末保单现金价值按合理的方法确定。

第四部分　法定责任准备金

八、会计年度末保单法定未到期责任准备金应当用“未来法”逐单计算。

对确实不能用“未来法”逐单计算的条款，经中国保险监督管理委员

会同意，可以采用“过去法”逐单计算。

九、法定未到期责任准备金的计算基础

（一）评估利息率不得高于下面两项规定的最低值

1. 中国保险监督管理委员会每年公布的未到期责任准备金评估利息率；

2. 该险种厘定保险费所使用的预定利息率。

（二）评估死亡率

1. 终身年金以外的人寿保险采用险种报备时厘定保险费所使用的经验生命表；

2. 终身年金保险采用按下面规定调整后的中国寿险业经验生命表中的年金保险经验生命表，分别计算未到期责任准备金。

- 80% ×年金保险经验生命表；
- 120% ×年金保险经验生命表。

十、法定未到期责任准备金的计算方法

（一）终身年金以外的人寿保险采用一年期完全修正方法

（二）终身年金保险采用下述修正均衡纯保费方法：

1. 修正纯保费的确定

（1）修正后首年纯保费 α

$\alpha=(1-\min\{$首年预定费用率，$r\})\times$首年毛保费

其中：个人业务：$r=0.35$

团体业务：$r=0.15$

（2）修正后续年均衡纯保费 β

按下面公式和法定未到期责任准备金计算基础计算

$\alpha+\beta$ 在交费期初的精算现值 $=P$ 在交费期初的精算现值

其中：P 为根据法定未到期责任准备金计算基础确定的交费期间均衡纯保费。

2. 根据上述法定未到期责任准备金计算基础和修正方法计算修正准备金，取二者最大值（参见九（二））。

（三）如果按修正方法计算的续年评估均衡纯保费高于毛保费，还应计提保费不足准备金。保费不足准备金为保单在未来的交费期间内，评估纯保费与毛保费之差在保单年度末按评估基础计算的精算现值。

（四）保单年度末保单法定未到期责任准备金为上述修正准备金与保费不足准备金之和，并且不低于保单年度末保单现金价值。

（五）会计年度末法定未到期责任准备金的计算，应当根据所对应的上一保单年度末的保单法定未到期责任准备金，扣除保单在上一保单年度末的生存给付金额后和该保单年度末保单法定未到期责任准备金进行插值

计算，并加上未到期评估纯保费（如果评估纯保费大于评估毛保费，则为未到期毛保费）。

（六）会计年度末保单法定未到期责任准备金数额是会计年度末保单责任准备金计提的最低标准。保险公司可采用其他合理的计算基础和评估方法计算会计年度末保单责任准备金，但要保证所提取的保单未到期责任准备金不低于会计年度末法定未到期责任准备金。

十、法定未决赔款准备金

（一）人寿保险保单在会计年度末应计提已发生已报案未决赔款准备金和已发生未报案未决赔款准备金，其提取规定按《意外伤害保险精算规定》中关于未决赔款准备金提取的规定执行；

（二）对在会计年度末已满期但未给付满期保险金的保单、分期支付保险金但尚有未到期支付的保单，均要提取未决赔款准备金。

1. 已满期但未给付满期保险金的保单，按满期保险金额提取已发生已报案未决赔款准备金；

2. 分期支付保险金但尚有未到期支付的保单，根据保单未了给付责任按保单未到期责任准备金的计算基础计算，提取已发生已报案未决赔款准备金。

利差返还型人寿保险精算规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于利差返还型长期（保险期限一年以上）人寿保险（非分红）。

二、利差返还型人寿保险是指在保险合同中约定，当保险合同约定的利差返还利息率高于厘定保险费所采用的预定利息率形成利差益时，向保单持有人进行利差返还的人寿保险。

第二部分　保　险　费

三、保险公司在厘定保险费时，所采用的预定利息率应当符合中国保险监督管理委员会的规定。

四、保险费计算的其他规定按《人寿保险的精算规定》执行。

第三部分　利差返还金额的计算

五、保险公司应在利差返还保单的每一保单年度末，计算保单在该保单年度的利差返还金额，并在对应的保单周年日根据保险合同约定的利差返还金额选择权对其进行处置。

六、利差返还利息率等于过去一个保单年度内中国人民银行颁布的居

民二年期定期储蓄存款年利息率的算术平均值。

七、保单年度中利差返还金额应当根据上一保单年度末保单现金价值（V_0）和该保单年度末保单现金价值（V_1）加上该保单年度给付金额（B）后按照下面公式计算：

$$\max(i - i', 0) \times (V_0 + V_1 + B) \div 2$$

其中：i 为利差返还利息率；

i'为利差返还保单的预定利息率。

第四部分　保单现金价值

八、利差返还型人寿保险保单的现金价值计算，按《人寿保险精算规定》中“保单现金价值”计算规定执行。

第五部分　法定责任准备金

九、利差返还人寿保险保单法定未到期责任准备金的

计提按《人寿保险精算规定》中“法定未到期责任准备金”的计提规定执行。

十、利差返还人寿保险保单法定未决赔款准备金计提按《人寿保险精算规定》中“法定未决赔款准备金”的计提规定执行。

十一、利差返还保单其他准备金的提取，按照下述方法执行：

（一）在会计年度末，对利差返还保单在下一年度保单周年日将要支付的利差返还金额要提取合理的利差返还准备金。

（二）对有储蓄积累或抵缴保险费利差返还金额选择权的保单，在会计年度末应按利差返还金额的储蓄积累额或利差返还金额抵缴保险费后的积累额提取准备金。

意外伤害保险精算规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于保险期限为一年及一年以内的人身意外伤害保险。

第二部分　保险费率

二、预定损失率可根据本公司的经验数据编制，也可采用其他公司（如再保险公司）已有的经验表，或根据保险市场经验制定。

三、预定附加费用率应当符合下述限制：

（一）个人业务不得超过毛保费的35%；

（二）团体业务不得超过毛保费的25%。

第三部分　法定责任准备金

三、会计年度末未到期责任准备金应当按照本会计年度自留毛保费的50%提取，也可以按其他方法提取，但提取的总额不应低于本会计年度自留毛保费的50%。

四、未决赔款准备金

（一）已发生已报案未决赔款准备金

1. 对已提出保险赔付金额要求的，按照提出的保险赔付金额提取，但不超过该保单对该保险事故所承诺的保险金额。

2. 对未提出保险赔付金额要求的，按该保单对该保险事故所承诺的保险金额提取。

（二）已发生未报案未决赔款准备金根据保险公司经验数据计提，但不得高于本会计年度赔款实际支出额的4%。

健康保险精算规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于健康保险。

二、健康保险包括医疗保险、疾病保险和收入保障保险。按保险期间的长短，将健康保险分为短期健康保险（保险期间为一年及一年以内）和长期健康保险（保险期间一年以上）。

第二部分　短期健康保险

三、短期健康保险险种包括：

（一）短期医疗保险

（二）短期疾病保险

（三）短期收入保障保险

四、短期健康保险的预定损失率/预定发病率可根据本公司的经验数据编制，也可采用其他公司（如再保险公司）已有的经验表，或根据保险市场的经验制定。其他精算规定按《意外伤害保险精算规定》执行。

第三部分　长期健康保险

五、长期健康保险险种包括：

（一）长期医疗保险

（二）长期疾病保险

（三）长期收入保障保险

六、长期健康保险的预定损失率/预定发病率可根据本公司的经验数据编制，也可采用其他公司（如再保险公司）已有的经验表，或根据保险市场的经验制定。其他规定参照《人寿保险精算规定》中有关死亡保险的规定执行。

附录Ⅱ　分红保险管理暂行办法

第一条　为规范分红保险业务，促进保险市场健康发展，根据《保险公司管理规定》，制定本办法。

第二条　本办法所称分红保险，是指保险公司将其实际经营成果优于定价假设的盈余，按一定比例向保单持有人进行分配的人寿保险产品。

第三条　本办法所称保单持有人，是指按照合同约定，享有保险合同利益及红利请求权的人。

第四条　红利分配的方式包括增加保额或现金分配等，保险公司应当在保险条款中载明其采用的红利分配方式。

第五条　保险公司设计、拟订的分红保险产品，应当经中国保险监督管理委员会（以下简称中国保监会）批准后方可销售，修改时亦同。

第六条　保险公司必须开发专门的电脑系统，并确保能够支持分红保险产品。

第七条　中国保监会可以限制分红保险产品销售的地域范围。

第八条　保险公司申报分红保险产品，应当提交以下材料：

一、一般产品报备要求提交的材料；

二、分红保险财务管理办法；

三、分红保险业务管理办法；

四、红利分配方法；

五、收入分配和费用分摊原则；

六、中国保监会要求的其他材料。

第九条　分红保险的销售人员应当具备以下条件：

一、参加过分红保险专门培训且合格；

二、有一年以上寿险产品销售经验，且业绩良好；

三、没有严重违规行为和欺诈行为。

第十条　分红保险、非分红保险以及分红保险产品与其附加的非分红保险产品必须分设账户，独立核算。

第十一条　分红保险采用固定费用率的，其相应的附加保费收入和佣金、管理费用支出等不列入分红保险账户；采用固定死亡率方法的，其相应的死亡保费收入和风险保额给付等不列入分红保险账户。

第十二条 保险公司每一会计年度向保单持有人实际分配盈余的比例不低于当年全部可分配盈余的70%。

第十三条 分红保险保单应当附带产品说明书，用非专业性语言说明该产品的性质、特征、费用率、红利及红利分配方式、保单持有人承担的风险等事项。

第十四条 保险公司应当将分红保险的产品说明书随产品同时上报中国保监会。中国保监会发现其违反法律、法规和本办法，或有不实陈述的，可以责令保险公司修改或停止使用。

第十五条 保险公司应当于每年三月一日前向中国保监会报送分红保险专题财务报告，包括资产负债表、利润表、收入分配和费用分摊报告等内容。该报告须由精算责任人签字，并经符合资格的会计师事务所审计。分红保险采用固定费用率的，保险公司无需报送费用分摊报告。

第十六条 保险公司应于每年四月一日前，将分红业务年度报告上报中国保监会，报告内容应包括：

一、分红保险业务年度盈余；

二、保单持有人盈余分配方案；

三、红利准备金提取方案；

四、红利分配对公司偿付能力影响的评估；

五、分配后公司实际偿付能力额度低于其法定偿付能力额度的，还须提交今后12个月的营运计划。

第十七条 精算责任人应当在年度分红报告上签字，并对红利分配的公平性做出评价。

第十八条 年度分红方案违反本办法的，或影响保险公司偿付能力的，中国保监会有权否决该报告，并依照有关规定对其精算责任人做出处罚。

第十九条 保险公司每一会计年度应当至少向保单持有人寄送一次分红业绩报告，使用非专业性语言说明：

一、投资收益状况；

二、费用支出及费用分摊方法，采用固定费用率方式的除外；

三、本年度盈余和可分配盈余；

四、保单持有人应获红利金额；

五、红利计算基础和计算方法等等。

第二十条 禁止对客户进行误导、欺骗和故意隐瞒。

第二十一条 保险公司违反本办法，侵犯保单持有人利益的，中国保监会可视情节轻重给予下述一项或几项处罚：

一、责令改正；

二、责令其停止销售该分红保险产品；

三、取消其经营此类业务的资格；

四、责令将原有业务转让给其他保险公司。

第二十二条　本办法的解释权属于中国保监会。

第二十三条　本办法自发布之日起实施

附录Ⅲ　投资连结保险管理暂行办法

第一条　为规范投资连结保险健康发展，根据《保险公司管理规定》，制定本办法。

第二条　本办法所称投资连结保险（以下简称连结保险），是指包含保险保障功能并至少在一个投资账户拥有一定资产价值的人身保险产品。

第三条　投资账户是指保险公司依照本办法设立的，资产单独管理的资金账户。投资账户应划分为等额单位，单位价值由单位数量及投资账户中资产或资产组合的市场价值决定。投保人可以选择其投资账户，投资风险完全由投保人承担。除本办法另有规定外，保险公司的投资账户与其管理的其他资产或其投资账户之间不得存在债权、债务关系，也不承担连带责任。

第四条　投资账户的设立、合并、分立、关闭、清算等事宜，应当事先报中国保险监督委员会（以下简称中国保监会）批准。

第五条　在中华人民共和国境内销售连结保险产品，必须事先经中国保监会批准，修改亦同。

第六条　中国保监会可以限制连结保险产品的销售地域范围。

第七条　保险公司申报的连结保险产品应当满足以下最低要求：

一、该产品必须包含一项或多项保险责任；

二、该产品至少连结到一个投资账户上；

三、保险保障风险和费用风险由保险公司承担；

四、投资账户的资产单独管理；

五、保单价值应当根据该保单在每一投资账户中占有的单位数及其单位价值确定；

六、投资账户中对应某张保单的资产产生的所有投资净收益（损失），都应当划归该保单。

七、每年至少应当确定一次保单的保险保障；

八、每月至少应当确定一次保单价值。

第八条　保险公司上报投资连结产品应当提交以下材料：

一、一般产品报备要求提交的材料；

二、产品可行性论证，包括该产品满足本办法确定的最低要求论证，

和管理系统支持论证；

三、投资连接产品财务管理办法；

四、投资连接产品业务管理办法；

五、中国保监会要求的其他材料。

第九条 连结保险的销售人员应具备以下条件：

一、参加过连结保险专门培训且合格；

二、一年以上寿险产品销售经验且业绩良好；

三、没有严重违规行为和欺诈行为。

第十条 保险公司应当每月至少评估一次投资账户中的单位价值，并向保单持有人公布。公布方式需上报中国保监会。

第十一条 只连结一个投资账户的连结保险，其投资账户按成本价计算，其中国有商业银行存款、国债之和不得少于20%。

第十二条 投资账户与任何关联账户之间，不得发生买卖、交易和财产转移行为。为建立该账户，或为支持该投资账户的运作而发生的现金转移，不在此限。

第十三条 投资账户的管理人员不得自营或者代人经营与该投资账户同类的业务，不得从事任何损害该投资账户利益的活动。不得与该投资账户进行交易。

第十四条 保险公司扣除的费用应详细列明费用的性质和使用方法。

第十五条 保险公司销售连结保险保单时，应当提供产品说明书，使用非专业性语言说明以下事项：

一、保单基本特征及其风险，包括投资连结部分利益如何反映投资账户的投资表现和影响这部分利益波动的重要因素；

二、该投资账户投资策略和主要投资工具；

三、该投资账户运作方式及其受到的限制；

四、过去十年该投资账户的业绩，如果运作时间不足十年，则为其存续时间的业绩；

五、费用扣除办法；

六、投资账户采用的单位价值评估方法；

七、未来可能的投资连结部分利益给付情况，但应申明是建立在投资收益率假设基础上的。

第十六条 禁止对客户误导、欺骗和故意隐瞒。

第十七条 连结保险的产品说明书应随产品一并上报中国保监会。中国保监会发现产品说明书违反本办法或有不实陈述的，可以责令保险公司修改或停止使用。

第十八条 保险公司应当在每个保单周年日后三十日内，向保单持有

人寄送一份报告，使用非专业性语言，说明业绩、保单持有人在每个投资账户中持有的单位数、单位价值、保单价值、投资管理人简介、保险金额、部分解约、费用扣除等内容。

第十九条　保险公司应当及时提示投保人缴纳保费。

第二十条　销售连结保险产品的保险公司应当在每年三月底之前向中国保监会呈报投资账户的年度财务报告。

第二十一条　保险公司应当至少每半年在中国保监会指定的报纸上作信息公告，信息公告的内容包括：

一、投资账户财务状况的简要说明；

二、投资账户过去五年的投资收益率，投资账户设立不足五年的，为设立期间各年的投资收益率；

三、投资账户在报告日的资产组合；

四、上期投资账户管理费用；

五、投资账户投资策略的任何变动。

第二十二条　投资账户日净赎出价值达前一日投资账户资产1%的，保险公司应向中国保监会报告。会计年度内投资账户累计净赎出比例达到或超过年初投资账户资产30%的，或发生经营亏损的，投资账户管理人自身难以扭转或发生可能严重危害保单持有人利益情形的，保险公司可向中国保监会申请关闭投资账户。

净赎出为会计期间内累计赎出与累计买入之差。

第二十三条　保险公司违反本办法，或侵犯保单持有人利益的，中国保监会可视情节轻重给予下述一项或几项处罚：

一、责令改正；

二、责令其停止销售该连结保险产品；

三、取消其经营此类业务的资格；

四、责令将原有业务转让给其他保险公司。

第二十四条　本办法的解释权属于中国保监会。

第二十五条　本办法自发布之日起实施。

附录Ⅳ　人身保险新型产品精算规定

分红保险精算规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于个人分红保险。

二、分红保险可以采取终身寿险、两全保险或年金保险的形式。保险

公司不得将其他产品形式设计为分红保险。

第二部分　保险费

三、保险费应当根据预定利息率、预定死亡率、预定附加费用率等要素采用换算表方法进行计算。

（一）预定利息率

保险公司在厘定保险费时，应根据公司对未来投资回报率的预测按照谨慎的原则确定预定利息率，所采用的预定利息率应当符合中国保险监督管理委员会（以下简称“保监会”）的规定。

（二）预定死亡率

保险公司在厘定保险费时，预定死亡率应当采用中国人寿保险业经验生命表（1990－1993）所提供的数据。根据保险责任的不同，保险公司应当按照下表所列经验生命表的适用范围，选择使用相应的经验生命表。

中国人寿保险业经验生命表（1990－1993）

名　称	适用范围
CL1（1990－1993）	非年金保险男表
CL2（1990－1993）	非年金保险女表
CL3（1990－1993）	非年金保险混合表
CL4（1990－1993）	年金保险男表
CL5（1990－1993）	年金保险女表
CL6（1990－1993）	年金保险混合表

（三）预定附加费用率

保险公司在厘定保险费时，预定附加费用率按《关于下发有关精算规定的通知》（保监发［1999］90号文）中的《人寿保险预定附加费用率规定》执行。

第三部分　保单最低现金价值

四、保单年度末保单价值准备金

保单年度末保单价值准备金指为计算保单年度末保单最低现金价值，按照本条所述计算基础和计算方法算得的准备金数值。

（一）计算基础

1. 死亡率和费用率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定死亡率和预定附加费用率；

2. 对于保险期限小于10年的保险产品，利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加1%；对于保险期限等于或大于10年的保险产

品，利息率采用险种报备时厘定保险费所使用的预定利息率加2%。

（二）计算方法

1. 根据该保单的保险责任和各保单年度净保费按上述计算基础采用“未来法”计算。

2. 保单各保单年度净保费为该保单年度的毛保费扣除附加费用。其中，毛保费是指按保单年度末保单价值准备金的计算基础重新计算的保险费，附加费用为毛保费乘以险种报备时厘定保险费所采用的该保单年度的预定附加费用率。

（三）保单年度末保单价值准备金不包括该保单在保单年度末的生存给付金额。

五、保单年度末保单最低现金价值

保单年度末保单最低现金价值是保险公司确定人寿保险保单现金价值最低标准，其计算公式为：

$$MCV = r \times \max(PVR,\ 0)$$

系数 r 按下列公式计算：

$r = k + \dfrac{t \times (1-k)}{\min(20,\ n)}$，当 $t < \min(20,\ n)$ 时。

$r = 1$，当 $t \geqslant \min(20,\ n)$ 时。

其中：

MCV 为保单年度末保单最低现金价值；

PVR 为保单年度末保单价值准备金；

n 为保单交费期间（趸交保费时，$n = 1$）；

t 为已经过保单年度，$t = 1, 2, \cdots$；

参数 k 的取值按如下标准：对于趸交业务，$k = 1$；对于期交两全保险和年金保险，$k = 0.9$；对于期交终身保险，$k = 0.8$。

六、保单年度末保单现金价值

保险公司可以本规定所确定的保单年度末保单最低现金价值作为保单年度末保单现金价值，也可以按其他合理的计算基础和方法确定保单现金价值，但要保证其数值不低于保单年度末保单最低现金价值。

七、保单年度中保单现金价值根据保单年度末保单现金价值按合理的方法确定。

第四部分　盈余分配

八、红利的分配应当满足公平性原则和可持续性原则。

九、保险公司每一会计年度向保单持有人实际分配盈余的比例不低于当年可分配盈余的70%。

可分配盈余的确定应当有一个客观的标准，遵循一贯性的原则。

十、保险公司应对分红保险账户提取分红保险特别储备。

分红保险特别储备是分红保险账户逐年累积的，用于平滑未来的分红水平。保险公司计提的分红保险特别储备不得为负，分红保险账户的任何准备金科目也不得为负。

十一、红利分配方式

（一）现金红利

现金红利分配指直接以现金的形式将盈余分配给保单持有人。

保险公司可以提供多种红利领取方式，比如现金、抵交保费、累积生息以及购买交清保额等。采用累积生息的红利领取方式的，保险公司应当确定红利计息期间，并不得低于6个月。在红利计息期间内，保险公司改变红利累积利率的，对于该保单仍适用改变前的红利累积利率。

（二）增额红利

增额红利分配指在整个保险期限内每年以增加保额的方式分配红利，增加的保额作为红利一旦公布，则不得取消。

采用增额红利方式的保险公司可在合同终止时以现金方式给付终了红利。

十二、红利计算方法

保险公司可以选择现金红利方式或增额红利方式分配盈余。

（一）采用现金红利分配方式的保险公司应根据贡献法计算红利。

1. 贡献法是指在各个保单之间根据每张保单对所产生盈余的贡献按比例分配盈余的方法，按照利差、死差、费差三种利源项目表示，其计算公式为：

$$C=(V_0+P)(i'-i)+(q-q')(S-V_1)+(GP-P-e')(1+i')$$

其中：

C 指该张保单对盈余的贡献；

V_0 指按评估基础计算的上一保单期末准备金，其中不包括上一保单期末的生存给付金金额；

V_1 指按评估基础计算的保单期末准备金；

P 指按评估基础计算的净保费；

i'指实际投资收益率；

i 指评估利息率；

q'指实际经验死亡率；

q 指评估死亡率；

S 指死亡保险金；

GP 指保险费；

e'指实际经验费用支出。

保险公司采用贡献法分配盈余时，可以减少或增加上述公式所包括的利源项目，但对于特定产品选用的利源项目在保险期间内不得改变。

2. 保险公司应按照下列公式计算每张保单实际分配的红利：

$$\frac{C}{\sum_{\Omega} C} \times 可分配盈余 \times R$$

其中，Ω 表示所有分红保单；R 为保险公司确定的不低于70%的比例。

（二）采用增额红利分配方式的保险公司应当根据下列要求计算增额红利和终了红利。

1. 增额红利成本应当按照评估基础计算，每张保单增额红利成本的计算公式为：

$$RB_t \times A$$

其中，RB_t 为该保单在 t 时刻分配到的增额红利；A 为按照评估基础计算的在 t 时刻购买原保单责任的趸交净保费。

2. 终了红利的计算应当按照每张保单对分红保险特别储备的贡献确定：

保险公司根据产品类型、交费方式、交费期限、保险期限等保单信息对所有分红保单分组，计算各组的资产份额，并利用各组的资产份额和责任准备金，划分各组对应的分红保险特别储备，即：

每组对应的分红保险特别储备份额 = 每组的资产份额 − 每组的责任准备金

每张保单享有的终了红利应当与该保单对应的分红保险特别储备份额中将分配给保单持有人的比例大体相当。

第五部分　法定责任准备金

十三、会计年度末保单法定未到期责任准备金应当用“未来法”逐单计算。

十四、法定未到期责任准备金的计算基础

（一）评估利息率不得高于下面两项规定的最低值：

1. 保监会每年公布的未到期责任准备金评估利息率；

2. 该险种厘定保险费所使用的预定利息率。

（二）评估死亡率

1. 终身年金以外的人寿保险采用险种报备时厘定保险费所使用的经验生命表；

2. 终身年金保险采用按下面规定调整后的中国寿险业经验生命表中的年金保险经验生命表，分别计算未到期责任准备金。

- 80% ×年金保险经验生命表；
- 120% ×年金保险经验生命表。

十五、法定未到期责任准备金的计算方法

（一）法定未到期责任准备金的计算采用修正法：

1. 修正净保费的确定

（1）修正后首年净保费 α 按下列公式计算：

$$\alpha = P^{NL} - EA$$

其中，P^{NL}为根据评估基础确定的交费期间均衡净保费，EA 为费用扣除额。

如果 α 的计算结果小于根据评估基础计算的首年自然净保费，则 α 取自然净保费。

（2）修正后续年净保费 β 按下列公式和法定未到期责任准备金计算基础计算：

$\alpha + \beta$ 在交费期初的精算现值 = 在交费期初的精算现值

2. 费用扣除额不得高于基本死亡保险金额的 3.5%。

3. 根据上述法定未到期责任准备金计算基础（即评估基础）和修正方法计算修正准备金。

（二）如果按修正方法计算的续年评估均衡净保费高于毛保费，还应计提保费不足准备金。保费不足准备金为保单在未来的交费期间内，评估净保费与毛保费之差在保单年度末按评估基础计算的精算现值。

（三）保险公司采用增额红利分配方式的，计算法定未到期责任准备金时，保险责任应包括已公布的增额红利部分，但不包括未来增额红利和终了红利。

（四）保单年度末保单法定未到期责任准备金为上述修正准备金与保费不足准备金之和，并且不低于保单年度末保单现金价值。

（五）会计年度末法定未到期责任准备金的计算，应当根据所对应的上一保单年度末的保单法定未到期责任准备金，扣除保单在上一保单年度末的生存给付金额后和该保单年度末保单法定未到期责任准备金进行插值计算，并加上未到期评估净保费（如果评估净保费大于评估毛保费，则为未到期毛保费）。

（六）会计年度末保单法定未到期责任准备金数额是会计年度末保单责任准备金计提的最低标准。保险公司可采用其他合理的计算基础和评估方法计算会计年度末保单责任准备金，但要保证所提取的保单未到期责任准备金不低于会计年度末法定未到期责任准备金。

十六、法定未决赔款准备金

（一）人寿保险保单在会计年度末应计提已发生已报案未决赔款准备金和已发生未报案未决赔款准备金，其提取规定按《意外伤害保险精算规定》中关于未决赔款准备金提取的规定执行；

（二）对在会计年度末已满期但未给付满期保险金的保单、分期支付保险金但尚有未到期支付的保单，均要提取未决赔款准备金：

1. 已满期但未给付满期保险金的保单，按满期保险金额提取已发生已报案未决赔款准备金；

2. 分期支付保险金但尚有未到期支付的保单，根据保单未了给付责任按保单未到期责任准备金的计算基础计算，提取已发生已报案未决赔款准备金。

个人投资连结保险精算规定

第一部分　适用范围

一、本规定适用于个人投资连结保险。

第二部分　基本原则

二、投资连结保险产品及投资账户均不得保证最低投资回报率。

三、在保险合同有效期内，风险保额应大于零。

四、投资连结保险产品应当保证各项费用收取的最高水平。若不保证，应在合同条款中约定变更收费水平的方法。

第三部分　费用的收取

五、投资连结保险产品仅可收取以下费用：

（一）初始费用，即保险费进入个人投资账户之前所扣除的费用。

（二）买入卖出差价，即投保人买入和卖出投资单位的价格之间的差价。

（三）风险保险费，即保单风险保额的保障成本。风险保险费应当通过扣除投资账户单位数的方式收取，其计算方法为风险保额乘以预定风险发生率的一定百分比，该百分比不得大于100%。其中，预定死亡率应当采用中国人寿保险业经验生命表所提供的数据。

保险公司可以收取风险保险费附加费用，但应当通过扣除投资账户单位数的方式收取，并不得超过风险保险费的30%。

（四）保单管理费，即为维持保险合同有效向投保人收取的服务管理费用。该项费用在首年度与续年度可以不同。

（五）资产管理费，按账户资产净值的一定比例收取。该比例每年不得超过2%。

（六）手续费，保险公司可在提供账户转换等服务时收取，用以支付相关的管理费用。

（七）退保费用，即在保单中途退保或部分领取时收取的费用，用以弥补尚未摊销的保单获取成本。退保费用的收取不得高于投保人持有单位价值或者部分领取部分对应的单位价值的以下比例，以下年份均指保单年度：

	比例（%）
第一年	10
第二年	8
第三年	6
第四年	4
第五年	2
第六年及以后	0

六、对于期交保费的投资连结保险，保险公司可以设定最低基本保费和最高基本保费。

一个保单年度的最低基本保费不得高于人民币 3 000 元，最高基本保费不得高于人民币 5 000 元。投保人可以选定在最低基本保费和和最高基本保费之间的任一金额为基本保费，保险公司不得以任何形式限制投保人根据本条规定选择基本保费的权利。

保费期交金额高于基本保费的部分，为额外保费。

七、基本保费的初始费用和买入卖出差价之和，不得超过《人寿保险预定附加费用率规定》规定的 20 年期死亡保险附加费用率的上限。

额外保费的初始费用和买入卖出差价之和，不得超过 10%。

八、趸交保费的初始费用和买入卖出差价之和，不得超过 10%。

九、保险公司对同一投保人、同一被保险人销售有多张投资连结保险保单的，所有有效期交保单的基本保费之和不得高于投保人首次按照本规定选定的基本保费。

第四部分　投资账户评估与投资单位定价

十、投资单位定价应当在各投保人之间保持公平，即在任何投资单位的交易中，不参与交易的投保人其利益不受影响；

十一、评估投资账户时，应包括投资账户内的所有资产及负债。当投资账户有未实现资本利得时，应扣除未实现资本利得的营业税。对于处于扩张阶段的投资账户，预提税金应为预期税金的折现值。对于处于收缩阶段的投资账户，预提税金为不折现的预期税金。

十二、投资账户评估及投资单位的买入价和卖出价

在评估投资账户价值时，必须首先确定投资账户处于扩张阶段还是收

缩阶段。从长期趋势来看，投资单位的申购数量大于投资单位的赎回数量时，该投资账户处于扩张阶段；反之，当投资单位的申购数量小于投资单位的赎回数量时，该投资账户处于收缩阶段。

投资账户价值和投资单位的价格计算如下表所示：

	处于扩展阶段的账户	处于收缩阶段的账户
总资产	以账户资产买入价（即市场主体卖出价）计算的所有投资资产的价值，并加上假设在账户评估日买入所有投资资产时将发生的交易费用和税金 现金资产 应收已卖出资产收入 应收已公布的红利收入 预提利息收入 其他资产	以账户资产卖出价（即市场主体买入价）计算的所有投资资产的价值，并减去假设在账户评估日卖出所有投资资产时将发生的交易费用和税金 现金资产 应收已卖出资产收入 应收已公布的红利收入 预提利息收入 其他资产
总负债	应付已买入资产款项 应付税金 应付资产管理费 其他负债	应付已买入资产款项 应付税金 应付资产管理费 其他负债
账户价值（NAV）	账户价值 = 总资产 − 总负债	账户价值 = 总资产 − 总负债
现存投资单位	N	N
投资单位价值（P）	$P = NAV/N$	$P = NAV/N$
投资单位卖出价（P_b）	$P_b = P$	
投资单位买入价（P_0）	$P_0 = P \times (1 + 买卖差价)$	

投资单位的买入价和卖出价是对投保人而言，其中买入价是客户保费进入投资账户的那部分资金折算为投资单位时所用的价格。卖出价是客户因部分领取，退保或满期给付等原因退出投资账户时，将投资账户中的投资单位兑现为现金时所使用的价格。

保险公司应以合理的人民币货币单位表示投资单位的买入价和卖出价。最小单位应至少保留人民币元小数点后四位。处于扩张阶段的账户，其单位价格应向上舍入；处于收缩阶段的账户，其单位价格应向下舍入。

保险公司采用账户资产买入价或者卖出价作为基础评估投资账户价值确有困难的，经保监会批准，也可以采用其他合理的市场价格作为评估的基础。

十三、保险公司应至少每周对投资账户中的资产价值评估一次。对投保人买入卖出投资单位的要求，保险公司应使用下一个资产评估日的单位价格，否则，需报中国保险监督管理委员会（以下简称“保监会”）批准。

十四、对于每个投资账户，投资账户资产价值不得低于该投资账户所对应的单位准备金金额。当投资账户资产价值高于对应的单位准备金金额时，其超出部分不得高于投资账户资产价值的2%和人民币500万元中的大者。

第五部分　责任准备金

十五、责任准备金可由单位准备金及非单位准备金两部分构成。

（一）单位准备金等于准备金评估日的个人投资账户价值。个人投资账户价值使用投资单位卖出价计算。

（二）为确保将来对个人投资账户之外的理赔、营业费用等支出有足够的支付能力，公司精算责任人应遵循一般被普遍认可的精算原则决定是否提取非单位准备金及其提取方法。

提取方法可以参照下述现金流折现的方式计算非单位准备金，具体步骤如下：

1. 预期在将来的每个时间段内，个人投资账户以外的现金流；

2. 若预期的净现金流在将来的某些时间点为负值，则从最远的负值点（n）往回，按如下递推公式计算：

$$V_{n-1} = -PV_{n-1}(CF_n)$$

$$V_{n-1} = \max(0, PV_{n-t}(V_{n-t+1}) - PV_{n-t}(CF_{n-t+1}))$$

其中：

（1）V_{n-t}为t时刻的责任准备金，$t=1, 2, \cdots, n-1$

（2）CF_t为$[t-1, t]$时间段内的净现金流，$t=1, 2, \cdots, n$

（3）PV_t为相应项目在t时刻的精算现值。

在上述现金流折现的方法中，选取精算假设时应遵循普遍认可的精算原则，其中折现使用的利率应以保险公司预计回报率为基础，但不得高于5%。

十六、责任准备金的其他要求

（一）责任准备金应逐单进行计算。但是，若保险公司精算责任人认为将具有相似特征的保单分组进行计算的结果与逐单计算的结果无实质性差别，经保监会批准后，也可采用分组方法计算。

（二）责任准备金不得低于责任准备金评估日的保单现金价值。

个人万能保险精算规定

第一部分 适用范围

一、本规定适用于个人万能保险。

第二部分 产品基本要素

二、个人万能保险产品应包括以下基本要素。

（一）身故给付

在保险合同有效期内，若被保险人身故，保险公司可按照身故时该保险年度的保险金额给予保险金，也可以以保险金额与当时个人账户价值之和作为身故给付。

在保险合同有效期内，其风险保额应大于零。

（二）结算利率

1. 保险公司应当为万能保险设立单独账户。

在单独账户中，不得出现资产小于负债的情况。一旦资产小于负债，保险公司应当立即补足资金；同时，因结算利率低于实际投资收益率而产生的公司收益也应被转出单独账户。

2. 万能保险的保单可以提供一个最低保证利率。

除本小条第二款的情形外，万能保险的结算利率不得高于单独账户的实际投资收益率，二者之差并不得高于2%。

单独账户的实际投资收益率低于最低保证利率时，万能保险的结算利率应当是最低保证利率。

3. 保险公司可以自行决定结算利率的频率。

（三）费用收取

万能保险保单只可收取以下几种费用：

1. 初始费用，即保费进入个人账户之前所扣除的费用。

2. 风险保险费，即保单风险保额的保障成本。其计算方法为风险保额乘以预定风险发生率的一定百分比，但该百分比不得大于100%。其中，预定死亡率应当采用中国人寿保险业经验生命表所提供的数据。

保险公司可以收取风险保险费附加费用，但不得超过风险保险费的30%。

3. 保单管理费，即为了维持保险合同有效向投保人收取的服务管理费。该费用可以是保证的，也可以是指数关联的。

4. 手续费，保险公司可在提供部分领取等服务时收取，用于支付相关

的管理费用。

5. 退保费用，即在保单中途退保或部分领取时保险公司收取的费用，用于弥补尚未摊销的保单获取成本。该项费用在第一保单年度不得超过领取部分个人账户价值的10%，保单生效5年后该项费用应降为零。

三、对于期交保费的万能保险，保险公司可以设定最低基本保费和最高基本保费。

一个保单年度的最低基本保费不得高于人民币3 000元，最高基本保费不得高于人民币5 000元。投保人可以选定在最低基本保费和和最高基本保费之间的任一金额为基本保费，保险公司不得以任何形式限制投保人根据本条规定选择基本保费的权利。

保费期交金额高于基本保费的部分，为额外保费。

四、基本保费的初始费用不得超过《人寿保险预定附加费用率规定》规定的20年期死亡保险附加费用率的上限。

额外保费的初始费用不得超过10%。

五、趸交保费的初始费用不得超过10%。

六、保险公司对同一投保人、同一被保险人销售有多张万能保险保单的，所有有效期交保单的基本保费之和不得高于投保人首次按照本规定选定的基本保费。

第三部分　保单现金价值与责任准备金

七、现金价值指个人账户价值与退保费用之间的差额。

八、万能保险的责任准备金为责任准备金评估日的个人账户价值。

保险公司精算责任人应当按照普遍认可的精算原则，对万能保险的保证利益提取适度的责任准备金。

九、责任准备金应逐单计算。但是，若公司精算责任人认为将具有相似特征的保单分组进行计算的结果与逐单计算的结果无实质性差别，经保监会批准后，也可采用分组方法计算。

责任准备金不得低于责任准备金评估当日的现金价值。

附录Ⅴ　保险公司偿付能力管理规定

第一章　总　　则

第一条　为了加强保险公司偿付能力监管，维护被保险人利益，促进保险业健康、稳定、持续发展，根据《中华人民共和国保险法》，制定本规定。

第二条　本规定所称保险公司，是指依法设立的经营商业保险业务的

保险公司和外国保险公司分公司。

本规定所称保险公司偿付能力是指保险公司偿还债务的能力。

第三条　保险公司应当具有与其风险和业务规模相适应的资本，确保偿付能力充足率不低于100%。

偿付能力充足率即资本充足率，是指保险公司的实际资本与最低资本的比率。

第四条　保险公司应当建立偿付能力管理制度，强化资本约束，保证公司偿付能力充足。

保险公司董事会和管理层对本公司偿付能力管理负责。外国保险公司分公司的管理层对本公司的偿付能力管理负责。保险公司和外国保险公司分公司应当指定一名高级管理人员负责公司偿付能力管理的具体事务。

第五条　中国保险监督管理委员会（以下简称中国保监会）建立以风险为基础的动态偿付能力监管标准和监管机制，对保险公司偿付能力进行综合评价和监督检查，并依法采取监管措施。

第二章　偿付能力评估

第六条　保险公司应当按照中国保监会制定的保险公司偿付能力报告编报规则定期进行偿付能力评估，计算最低资本和实际资本，进行动态偿付能力测试。

保险公司应当以风险为基础评估偿付能力。

第七条　保险公司的最低资本，是指保险公司为应对资产风险、承保风险等风险对偿付能力的不利影响，依据中国保监会的规定而应当具有的资本数额。

第八条　保险公司的实际资本，是指认可资产与认可负债的差额。

认可资产是保险公司在评估偿付能力时依据中国保监会的规定所确认的资产。认可资产适用列举法。

认可负债是保险公司在评估偿付能力时依据中国保监会的规定所确认的负债。

第九条　保险公司应当按照中国保监会的规定进行动态偿付能力测试，对未来规定时间内不同情形下的偿付能力趋势进行预测和评价。

第十条　在中国境内设有多家分公司的外国保险公司应当合并评估境内所有分支机构的整体偿付能力。

第三章　偿付能力报告

第十一条　保险公司应当按照中国保监会制定的保险公司偿付能力报告编报规则及有关规定编制和报送偿付能力报告，确保报告信息真实、准

确、完整、合规。

保险公司偿付能力报告包括年度报告、季度报告和临时报告。

第十二条 保险公司董事会和管理层对偿付能力报告内容的真实性、准确性、完整性和合规性负责。

第十三条 保险公司应当于每个会计年度结束后，按照中国保监会的规定，报送董事会批准的经审计的年度偿付能力报告。

第十四条 保险公司年度偿付能力报告的内容应当包括：

（一）董事会和管理层声明；

（二）外部机构独立意见；

（三）基本信息；

（四）管理层的讨论与分析；

（五）内部风险管理说明；

（六）最低资本；

（七）实际资本；

（八）动态偿付能力测试。

第十五条 保险公司应当于每季度结束后，按照中国保监会的规定报送季度偿付能力报告。

第十六条 保险公司在定期报告日之外的任何时点出现偿付能力不足的，保险公司董事会和管理层应当在发现之日起 5 个工作日内向中国保监会报告，并采取有效措施改善公司的偿付能力。

第十七条 保险公司发生下列对偿付能力产生重大不利影响的事项的，应当自该事项发生之日起 5 个工作日内向中国保监会报告：

（一）重大投资损失；

（二）重大赔付、大规模退保或者遭遇重大诉讼；

（三）子公司和合营企业出现财务危机或者被金融监管机构接管；

（四）外国保险公司分公司的总公司由于偿付能力问题受到行政处罚、被实施强制监管措施或者申请破产保护；

（五）母公司出现财务危机或者被金融监管机构接管；

（六）重大资产遭司法机关冻结或者受到其他行政机关的重大行政处罚；

（七）对偿付能力产生重大不利影响的其他事项。

第十八条 在中国境内有多家分公司的外国保险公司应当指定一家在华分公司作为主报告机构，负责履行本规定的报告责任。

第十九条 保险公司投资设立的境外保险公司向当地保险监管机构报送按当地监管规则编制的偿付能力报告的，应当同时将该报告报送中国保监会。

第二十条　中国保监会可以根据监管需要，调整保险公司偿付能力报告的报送频率。

第二十一条　保险公司应当根据国家法律、行政法规和中国保监会的规定，公开披露偿付能力状况。

第四章　偿付能力管理

第二十二条　保险公司的综合风险管理，影响公司偿付能力的因素都应当纳入公司的内部偿付能力管理体系。保险公司偿付能力管理体系包括：

（一）资产管理；

（二）负债管理；

（三）资产负债匹配管理；

（四）资本管理。

第二十三条　保险公司应当建立有效的资产管理制度和机制，重点从以下方面识别、防范和化解集中度风险、信用风险、流动性风险、市场风险等资产风险：

（一）加强对承保、再保、赔付、投资、融资等环节的资金流动的监控；

（二）建立有效的资金运用管理机制，根据自身投资业务性质和内部组织架构，建立决策、操作、托管、考核相互分离和相互牵制的投资管理体制；

（三）加强对子公司、合营企业及联营企业的股权管理、风险管理和内部关联交易管理，监测集团内部风险转移和传递情况；

（四）加强对固定资产等实物资产的管理，建立有效的资产隔离和授权制度；

（五）建立信用风险管理制度和机制，加强对债权投资、应收分保准备金等信用风险较集中的资产的管理。

第二十四条　保险公司应当重点从以下方面识别、防范和化解承保风险、担保风险、融资风险等各类负债风险：

（一）明确定价、销售、核保、核赔、再保等关键控制环节的控制程序，降低承保风险；

（二）建立和完善准备金负债评估制度，确保准备金负债评估的准确性和充足性；

（三）建立融资管理制度和机制，明确融资环节的风险控制程序；

（四）严格保险业务以外的担保程序，遵循法律、行政法规和中国保监会的有关规定，根据被担保对象的资信及偿债能力，采取谨慎的风险控制措施，及时跟踪监督。

第二十五条 保险公司应当加强资产负债管理，建立资产负债管理制度和机制，及时识别、防范和化解资产负债在期限、利率、币种等方面的不匹配风险及其他风险。

第二十六条 保险公司应当建立健全资本管理制度，持续完善公司治理，及时识别、防范和化解公司的治理风险和操作风险。

第二十七条 保险公司应当建立资本约束机制，在制定发展战略、经营规划、设计产品、资金运用等时考虑对偿付能力的影响。

第二十八条 保险公司应当建立与其发展战略和经营规划相适应的资本补充机制，通过融资和提高盈利能力保持公司偿付能力充足。

第二十九条 偿付能力充足率不高于150%的保险公司，应当以下述两者的低者作为利润分配的基础：

（一）根据企业会计准则确定的可分配利润；

（二）根据保险公司偿付能力报告编报规则确定的剩余综合收益。

第三十条 保险公司应当建立董事会和管理层负责的偿付能力管理机制，明确相关机构和人员在资产管理、负债管理、资产负债管理、资本管理中的职责、权限以及偿付能力管理的程序和具体措施。

第三十一条 保险公司应当建立偿付能力管理培训制度，对公司偿付能力管理人员和其他相关人员定期进行偿付能力管理及合规培训。

第三十二条 保险公司管理层应当定期对偿付能力管理的有效性进行评估和改进，并向董事会或者股东（大）会报告。

第五章 偿付能力监督

第三十三条 中国保监会对保险公司偿付能力的监督检查采取现场监管与非现场监管相结合的方式。

第三十四条 中国保监会对保险公司报送的偿付能力报告进行审查。

中国保监会可以委托中介机构对保险公司报送的偿付能力报告及相关信息实施审查。

第三十五条 中国保监会在每季度结束后，根据保险公司报送的偿付能力报告和其他资料对保险公司偿付能力进行分析。

第三十六条 中国保监会定期或者不定期对保险公司偿付能力管理的下列内容实施现场检查：

（一）偿付能力管理的合规性和有效性；

（二）偿付能力评估的合规性和真实性；

（三）对中国保监会监管措施的执行情况；

（四）中国保监会认为需要检查的其他方面。

第三十七条 中国保监会根据保险公司偿付能力状况将保险公司分为

下列三类，实施分类监管：

（一）不足类公司，指偿付能力充足率低于100%的保险公司；

（二）充足Ⅰ类公司，指偿付能力充足率在100%到150%之间的保险公司；

（三）充足Ⅱ类公司，指偿付能力充足率高于150%的保险公司。

中国保监会不将保险公司的动态偿付能力测试结果作为实施监管措施的依据。

第三十八条　对于不足类公司，中国保监会应当区分不同情形，采取下列一项或者多项监管措施：

（一）责令增加资本金或者限制向股东分红；

（二）限制董事、高级管理人员的薪酬水平和在职消费水平；

（三）限制商业性广告；

（四）限制增设分支机构、限制业务范围、责令停止开展新业务、责令转让保险业务或者责令办理分出业务；

（五）责令拍卖资产或者限制固定资产购置；

（六）限制资金运用渠道；

（七）调整负责人及有关管理人员；

（八）接管；

（九）中国保监会认为必要的其他监管措施。

第三十九条　中国保监会可以要求充足Ⅰ类公司提交和实施预防偿付能力不足的计划。

第四十条　充足Ⅰ类公司和充足Ⅱ类公司存在重大偿付能力风险的，中国保监会可以要求其进行整改或者采取必要的监管措施。

第四十一条　对于未按本规定建立和执行偿付能力管理制度的保险公司，中国保监会可以要求其进行整改，情节严重的，可以采取相应的监管措施，并依法给予行政处罚。

第四十二条　中国保监会对外国保险公司在境内分支机构的偿付能力实施合并评估，偿付能力监管措施适用境内所有分支机构。

第四十三条　中国保监会派出机构根据保监会授权，在偿付能力监管中履行以下职责：

（一）对保险公司分支机构的内部风险管理的合规性和有效性实施监督检查；

（二）对保险公司分支机构财务信息等偿付能力监管的基础数据的完整性和真实性实施监督检查；

（三）防范和化解保险公司分支机构的市场行为风险，防止重大的市场行为风险转化为偿付能力风险；

（四）执行中国保监会对保险公司采取的监管措施，确保监管措施在分支机构层面得到严格执行；

（五）识别、监测、防范和化解辖区内的重大偿付能力风险；

（六）中国保监会授予的其他偿付能力监管职责。

第六章　附　　则

第四十四条　保险集团的偿付能力监管适用本规定；法律、行政法规或者中国保监会另有规定的，适用其规定。

第四十五条　本规定由中国保监会负责解释和修订。

第四十六条　本规定自2008年9月1日起施行。《保险公司偿付能力额度及监管指标管理规定》（保监会令［2003］1号）同时废止。

索　　引

Z

部分习题参考答案

第一章答案

1. （1） 0.13　　（2） 0.2031　　（3） 0.68　　（4） 0.173
2. 20
3. 970
4. 0.70469
5. $s(x)=e^{-x^2}$，$F(x)=1-e^{-x^2}$，$f(x)=2xe^{-x^2}$
6. 41
7. 0.16
8. $-\ln p_x$
9. 0.089
10. 0.13
11. $1-0.985e^{-0.75c}$
12. 0.2
13. 1/3
14. 1.2
15. $\ln\frac{3-2R}{3(1-R)}$
16. 0.0811
17. 1
18. $x+1$
19. 48.755
20. -0.00007
21. 0.08
22. 1.45
23. 0.02992

第二章答案

1. 0.398
2. 0.1253

3. 750
4. 0.06545
5. 36 829.06
6. 0.5219
7. 0.03944
8. 0.2518
9. 0.263
10. 4
11. 0.4493
12. $A_{x:\overline{1}|}^{1}$
13. 0.02208
14. 14
15. 0.2347
16. 4.819
17. 7.358
18. 2 000
19. 0.3425
20. 0.1581
21. 0.3935
22. 0.1903
23. 5 765
24. 0.05485

第三章答案

1. 12.5
2. 0.16
3. 13.027
4. 14.085
5. 9.0484
6. 37 188
7. 2.2186
8. 79 012
9. 0.0798
10. 35 000
11. 0.9

12. 11.87
13. 1.49
14. 5.61
15. 5 000
16. 28 000
17. 372.26
18. 218
19. 0.0826
20. 14.11
21. 9.122
22. 114.18
23. 91 701
24. 43.75
25. 15.55
26. 12.09
27. (1) 67 020　(2) 63 860　(3) 85 370　(4) 80 369
　(5) 32 953　(6) 62 390

第四章答案

1. 0.03955
2. 0.015
3. 0.7047
4. 0.85
5. 0.04
6. 200
7. 25.96
8. 12.77
9. 25.45
10. 0.6
11. 0.05
12. 21.88
13. 0.03
14. 0.25
15. 0.2
16. 0.2346

17. 0. 3959
18. 0. 01
19. 0. 0763
20. 0. 5434
21. 0. 3561
22. 59. 66
23. 0. 0843
24. 0. 0913

第五章答案

1. 421
2. 1 428. 6
3. 884. 7
4. 152. 1
5. 139. 0
6. 0. 508
7. 9 411
8. 0. 3
9. 45. 22
10. 39 121
11. 1/6
12. 581. 87
13. 0. 9472
14. 1 180
15. 1 610. 5
16. 100
17. 0. 0752
18. 0. 0928
19. 1. 2
20. 0. 000992
21. 544. 05
22. 330. 38
23. 7. 63
24. 98. 965
25. 0. 05

26. 2 007.6

第六章答案

1. $G=\dfrac{1\,000\bar{A}_{[40]:\overline{25}|}+4\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|}+8.5}{0.98\ddot{a}_{[40]:\overline{25}|}-0.05\ddot{a}_{[40]:\overline{10}|}-0.35}$

2. $G=\dfrac{1\,000\bar{A}_{x:\overline{7}|}+2.5\ddot{a}_{x:\overline{7}|}+2.5}{0.935}$

3. 137.5

4. 6.13

5. 30.47　29.91　29.55

6. 10

8. 14 332.50

9. 3 994.33

11. （1）$\bar{\beta}=\dfrac{\bar{A}_x}{\frac{1}{m}(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{m}|}+{}_{m|}\bar{a}_x}$

（2）${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)^{Mod}=\bar{A}_{x+t}-\bar{\beta}\left[{}_{m-t|}\bar{a}_{x+t}+\frac{t}{m}\bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}+\frac{1}{m}(\bar{I}\bar{a})_{x+t:\overline{m-t}|}\right]$

12. $\alpha_x^{Mod}={}_1E_x K+\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|}$　$\beta_x^{Mod}=P_{x+1}-\dfrac{K}{\ddot{a}_{x+1}}$

15. 192.05

16. 285.6

18. （1）0.03　（2）0.28　（3）0.09

（4）$\alpha=0.03667$，$\beta=0.08667$　（5）0.02778

19. $\beta^{C}_{x:\overline{15}|}=P_{x:\overline{15}|}+\dfrac{{}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{15}|}}$，$\alpha^{C}_{x:\overline{15}|}=\beta^{C}_{x:\overline{15}|}-({}_{19}P_{x+1}-A^{1}_{x:\overline{1}|})$

20. 179.29

21. $T=\beta^{C}-{}_{19}P_{x+1}$

第七章答案

3. 2/9

4. （1）2/3　（2）18.06　（3）160.11

6. 0.2655

7. 0.9667　36.94　1 547.22　82.86

9. 0.25

18. 51

21. 7.0753

26. 1/3

29. （1） 0.2755

30. $\frac{1}{12}$

31. $f = 1/3$， $\omega = 52.6797$

第八章答案

2. 0.7756

3. （1） 400　（2） 500

7. 0.233

8. 0.226

10. 750

11. 0.753； 0.0377； 0.165

12. 0.033

14. 0.1317

16. 20.63

20. 0.00995

21. 0.0592

22. （1） 0.0909　（2） 0.0906

26. 0.09405

27. 795

29. 0.015

30. 1

31. 1 304.4

33. 8 619

35. 0.94434

第九章答案

3. 3 438.3

4. 1 031.7

5. 5 555

6. 13 931

7. 75 312

8. 19 868

18. 2 624.58

19. 22

20. (1) 280 093　(2) 13 096　(3) 149 352

21. 37 188

第十章答案

1. (1) $\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}$

(2) (7/12, 4/12, 1/12)

(3) 0.375

(4) (7/16, 5/16, 4/16)

(5) {0, 1} 常返；{2} 非常返

(6) 0.5

(7) 2

(8) 1

2. (1) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

(2) 0.256

(3) 0.25

(4) 0.0625

(5) 0.10

3. 1 904.76

4. (1) 602 000

(2) 594 030

5. (1) 0.80

(2) 1.60

(3) 0.50

6. (1) 2/3

(2) 0.60

(3) 15.56

(4) 13.33

(5) 4

(6) 11.11

7. 0.106

8. 1.54

9. 170.58

10. 2/3

11. 16.67　0.67　1.11　18.45

　　0.00　2.00　3.33

　　0.67

　　0.6899

12. 0.9146

13. 140/9

14. 0.97324

15. 37.85714

第十二章答案

6. 趸缴净保费为 $\bar{a}_{\overline{20}|} - \bar{a}_{x:\overline{20}|} + v^{20}{}_{15}p_x \bar{a}_{x+15:\overline{5}|} - v^{20}{}_{20}p_x \bar{a}_{\overline{5}|}$

7. 年缴净保费 $P = \dfrac{1\,000\,{}_{20}E_x + 120 \times (\ddot{a}^{(12)}_{\overline{20}|} - \ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|})}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}$

第十六章答案

3. ${}_0AS = 0$, ${}_1AS = 229.06$, ${}_2AS = 522.35$, ${}_3AS = 846.19$, ${}_4AS = 1\ 223.88$, ${}_5AS = 1\ 660.92$。

4. 1 942.75

5. (1) $\left(\dfrac{{}_k\bar{V}(\bar{A}_x)}{\bar{A}_{x+k}}\right)^2 \times (1-\bar{A}_x)^2$　　(2) $\dfrac{[{}^2\bar{A}^1_{x+k:\overline{s}|} - (\bar{A}^1_{x+k:\overline{s}|})^2] \times (1-\bar{A}_x)^2}{{}^2\bar{A}_{x+k} - \bar{A}^2_{x+k}}$

6. (1) $E = \dfrac{({}_{10}CV - L) - (1-L) \times \bar{A}^1_{40:\overline{10}|}}{{}_{10}E_{40}}$　　(2) $(1-L) \times \bar{A}^1_{45:\overline{5}|} + E \times {}_5E_{45}$

7. $f = \dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right) \times \dfrac{\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-1}|}}{{}_{n-t}E_{x+t}}$

第十七章答案

1. (1) $NP = 10\ 000\,\dfrac{(IA)^1_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}}$

（2）前 5 年的均衡净保费为 $10\ 000\dfrac{(IA)^{1}_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}+{}_{5|}\ddot{a}_{x:\overline{5}|}}$

后 5 年的均衡净保费为 $20\ 000\dfrac{(IA)^{1}_{x:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}+{}_{5|}\ddot{a}_{x:\overline{5}|}}$。

（3）$NP=72.18$

$NP=49.79$，$2NP=99.58$

（4）$NP=63.77$

$NP=43.99$，$2NP=87.97$

2. ${}^{h}_{t}V^{Mod}_{x:\overline{n}|}={}^{h}_{t}V^{NL}_{x:\overline{n}|}-EA\times\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$　　$(1\leqslant t\leqslant h)$

3. ${}_{5}V_{x:\overline{n}|}=1\ 000A_{x+5:\overline{n-5}|}+(10-0.9G)\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}$

4. （1）$1\ 000\beta^{Mod}_{31}=12.61$

（2）$1\ 000{}_{3}V^{FPT}_{31}=24.32$

5. （1）期末责任准备金 （2）平均责任准备金 （3）期中责任准备金

（1）期末责任准备金	（2）平均责任准备金	（3）期中责任准备金
$t=1$ 时，3 500	$t=1$ 时，2 750	$t=1$ 时，1 750
$t=2$ 时，10 500	$t=2$ 时，9 000	$t=2$ 时，7 000
$t=3$ 时，21 000	$t=3$ 时，18 750	$t=3$ 时，15 750
$t=4$ 时，35 000	$t=4$ 时，32 000	$t=4$ 时，28 000
$t=5$ 时，55 000	$t=5$ 时，50 000	$t=5$ 时，45 000

第十八章答案

1. 0 - 10 年度现金价值分别为 9 300，10 137，11 168，12 303，13 551,14 925，15 682，16 475，17 307，18 000，18 720；

保单第 4 年末的准备金为 13 819。

2.

表 18.2.5 年末账户价值、现金价值及其现值

保单年度	账户价值	现金价值	现值
0	10 000	9 500	9 500
1	10 800	10 260	9 679
2	11 664	11 197	9 965
3	12 597	12 219	**10 259**
4	13 101	12 839	10 170

表 18.2.6 现金价值、忽略退保费用的现金价值及其现值

保单年度	现金价值	现金价值忽略退保费用	现值
0	9 500	9 500	9 500
1	10 260	10 260	9 679
2	11 197	11 197	9 965
3	12 219	12 219	10 259
4	12 839	13 101	**10 377**

表 18.2.7 没有退保费用的现值

保单年度	账户价值	现值
0	10 000	10 000
1	10 800	10 189
2	11 664	10 381
3	12 597	**10 577**
4	13 101	10 377

3. 0 到 5 保单年度的准备金分别为（40），962，2 016，3 170，4 433，5 816。

4. （1）第五保单年度的基础准备金为 5 712. 12。

   （2）①一年定期准备金计算的 GMDB 准备金为 11. 34。

   ②到达年龄准备金求第五保单年度的 GMDB 准备金为 60. 86。

5. 1 004，1 035。

第十九章答案

1. 再保险后该公司授权控制水平的资本数额的变化为 −90 942. 33，新的 RBC 比率为 411%。

2. 1. 3095（亿）

3. 77

参考文献

1. 李勇权编著:《寿险精算》，中国财政经济出版社 2006 年版。

2. 卢仿先、张琳主编:《寿险精算数学》，中国财政经济出版社 2006 年版。

3. 李秀芳主编:《寿险精算实务》，中国财政经济出版社 2006 年版。

4. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. Actuarial Mathematics, Second Edition. Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois. 1997.

5. Cunningham, R., Herzog, T. London, R. L. Models for Quantifying Risk. ACTEX Publications, Inc. Winsted, Connecticut. 2005.

特 别 鸣 谢

中国精算师资格考试用书《寿险精算》得以顺利出版，得到了部分保险公司、高等院校及精算咨询机构的鼎立相助，在此特别鸣谢以下单位与个人（排名不分先后）为本书所作出的贡献。

单位名称：北京大学数学科学学院

个人名单：杨静平　吴　岚　唐　梦　吴思思

中国精算师协会

2010年11月15日